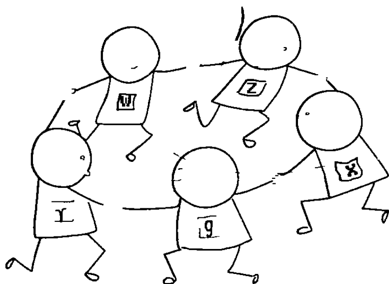
量子规范理论

IAN• GUIF·N LILUN

汪 容◎著



中国科学技术出版社

内容提要

本书系统地介绍了量子规范理论的基本知识，特别着重于量子规范理论的量子化、重正化和重正化群的介绍。除序言和引子外，全书共分十章，另加三个附录：第一、二、三、四章从介绍路径积分量子化人手，讨论了量子规范理论的量子化问题和 F - P 场的引出，还介绍了 Slavnov 恒等式以及生成泛函的知识；第五、六、七、八、九章，介绍了 BPHZ 重正化方案，讨论了一圈图和多圈图的维数正常化，给出了各种量子规范理论（包括有破缺时）的可重正化性的证明，以及么正性的证明。第十章则是重正化群的介绍。三个附录与上述内容密切相关。附录一是经典规范场理论简述，为读者提供了必要的预备知识。附录二是第八章的证明中不可缺少的部分。附录三则讨论了在深度非弹性散射问题中怎样利用重正化群。

为了便于阅读，全书推导比较详尽，可作为理论物理研究生的教材，也可供高等学校物理系、数学系高年级学生、研究生及物理与数学工作者参考。

再版前言

汪容先生的著作《量子规范理论》出版已经整整21年了。本书以汪先生一贯所具的细致、清晰的风格，全面系统地介绍了量子规范理论，其中也包括汪先生和他早期学生在这方面的研究成果。汪先生早年的学生都聆听过先生亲自用此书为教科书授课。书中对所涉及的每一个问题都有清晰的物理解释和详尽的数学推导。这对那时刚刚进入此领域学习的学生帮助极大。即使多年后成为在这一领域工作的专家，此书仍是他们案头必备的工具书。现在，虽然国内已经有若干本量子规范理论专著，但比较而言，汪先生的书在某些方面仍有不可替代的优势，特别是对规范场重正化部分的论述（第五章~第九章），是汪先生此书的精华所在。由于汪先生是这方面研究的专家，里边很多内容是他的研究成果，深刻的理解和精细的描述，给读者留下很深的印象，帮助他们更好地理解规范场。

现在，先生离我们而去，为了纪念先生，同时考虑到此书确为理论物理专业研究生和研究人员很好的参考书，故再版此书。

汪先生于1923年3月出生于北京一个铁路工程大师家庭，祖籍江苏无锡。1941年考入当时因抗战而内迁至贵州的浙江大学，1945年以优异成绩毕业于浙江大学物理系，期间积极投身于中国共产党领导下的进步学生运动。1945~1947年在中央研究院物理研究所工作。以后因病修养。1952年病愈，任中国科学院《科学通报》编辑，并于1956年加入中国共产党。1959~1961年由国家派往苏联杜布纳核子研究所进修理论物理。1961~1979年，在中国科学院高能物理研究所（1973年前为原子能研究所的一部分）工作，曾任理论研究室副主任。1964年晋升为副研究员。以其当干之年，汪先生作为中坚力量之一，参加了后来获国家自然科学二等奖的强子结构的层子模型研究。参加了中国高能加速器的早期研制工作。1979~1980年，汪先生在中国科学院研究生院工作，在此期间，多次前往浙江大学为研究生和青年教师讲授量子规范理论，并指导两名研究生从事量子规范理论重正化的研究。本书就是在那时的讲义基础上，结合当时国内外研究前沿进展写成的。

1981年，汪先生调回浙江大学物理系任教授，1984年被批准为博士生导师。1993年，他年满70，从所挚爱的科研和教学岗位上退休。在浙江大学工作的这12年，是他人生收获颇丰的12年。他在这里培养了一批年轻的理论物理人才，可谓桃李满天下，并于1991年与李政道先生一起创办了浙江近代物理中心，担任中心首任副主任（李政道先生为主任）。浙江近代物理中心在李先生和汪先生领导下起步，在国内外同行的支持下，经过中心全体成员的努力，现已成为国内理论物理学界的一支重要科研队伍。这中间，凝结了汪先生大量的心血。在浙大，汪先生在学术上也收获颇丰。他在量子规范理论和有限温度场论重正化方面完成了一系列高水平的论文。《量子规范理论》也是他在浙大工作期间完成的。在汪先生最后还能工作的几年中，他的主要精力放在《在数学物理中的微分几何和拓扑引论》一书的写作上。在与时间的赛跑中，他获得了胜利，顺利完成了该书的中文稿和英文稿。

汪先生是一位高明的科普作家，他可以把高深的物理知识用通俗的语言介绍给大众。早在上世纪40年代后期，他就为《科学时代》杂志撰写过介绍物理和数学新知识的科普文章。1976年，他任《高能物理》（后更名为《现代物理知识》）的第一任主编，并在该杂志上连续发表介绍粒子物理学知识的科普文章，后编成一书《在10 ~ 13厘米以内——小玲和老吕关于"基本"粒子的对话》，获新长征优秀科普作品奖。

汪先生是一个清心寡欲、正直善良、不善言辞、性格随和、温文尔雅的君子。他幼年和青年时期饱受病魔折磨，曾动过5次大手术。他的人生经历也很坎坷。但他的意志非常坚强，从未向命运低过头，在科学的道路上，惜时如金，奋勇进取。对年轻人，他总是谆谆教诲，甘为人梯。作为汪先生的学生和后辈，我们受惠于先生，不仅在学业上，更多的是在如何做人的道理上。我们现在再版汪先生的这部力作，就是希望先生的学问和精神得以传承，发扬光大。

许良英老先生和谢学锦老先生对汪先生生平的书面介绍为我们写下以上这段文字提供了可靠的事实依据。李小源先生和黄涛先生核实了一些史实。汪先生的夫人姚竺绍老师和儿子汪大星先生也为本书的再版作出了努力和贡献。我们在此一并感谢。本书的再版得到了浙江近代物理中心及李有泉、罗民兴、盛正卯和中国科学院理论物理研究所虞跃的帮助。

虞　跃　李有泉　盛正卯

2007年10月

序　　言

在20世纪50年代和60年代初熟悉当时的量子场论的人，进入60年代后期以至70年代时，会觉得似乎进入了一个陌生的世界。在这个领域里，由于客观原因而上升为主角的杨－米尔斯场以及处理杨－米尔斯场的量子化和重正化的巧妙方法，都是他们所不熟悉的。反之，他们所熟悉的量子电动力学，这时已发展成为弱电统一理论；他们所熟悉的用于量子电动力学的量子化和重正化的方法，在杨－米尔斯场以及一般的非阿贝尔规范场面前，却变得无能为力。从60年代后期到70年代前期的大约10年里，量子场论确是经历了一场重大的变革和发展。它所迎来的弱电统一理论已经令人信服地被实验所验证，从而刷新了人们对弱相互作用的认识；它所迎来的作为强相互作用的基本理论的量子色动力学(QCD)，则使得人们对多年来只能用唯象方法描述的强相互作用的机制，有了崭新的理解，并且在历史上第一次使高能强相互作用的理论成为逻辑上自洽的，并且可以认真严格地用实验检验的理论。这些成就又进一步鼓舞着人们去探索弱、电、强三种相互作用的统一；鼓舞着人们尝试用新的观点，即量子规范理论的观点去探讨引力理论；以及去追求弱、电、强和引力这四种相互作用的更大范围的统一。以量子规范理论作为一种手段和工具，人们还展开了对层子(夸克)和轻子的内部结构的探索。

面对着上述的科学新发展，人们很需要一本新的关于量子场论的教科书，它既要能够在逻辑上比较完整地反映近年来量子规范理论的发展，又要能够容易为读者所理解和掌握。但是，满足这两个要求的教科书实在是难找。特别是目前还根本没有一本系统地说明规范场的重正化的书。对于那些希望全面了解量子规范理论的认真的读者来说，这当然是一件憾事，因为大家都承认，在以点粒子定域相互作用为前提的量子规范理论中，重正化是不可缺少的一个组成部分——弱电统一理论正是在人们相信它可以重正化之后才被重视起来的。

写这本书的目的是想尝试着满足读者的这种需要，搭一座桥，使得有初步量子场论知识的人可以在较短的时间内通过这座桥较系统地了解现代量子规范理论的要点和技巧，从而可以较快地走向微观世界研究的前沿。为了使读者容易理解和掌握书中的内容，举例和数学推导在篇幅许可的范围内，都是力求详尽完整的。

下面简略地说一下书的内容：

书的一开头是一个较长的引子，目的是让读者对量子规范理论的发展、成就和存在的问题有一个全面的了解，但并不深入讨论细节。细节的讨论和问题的展开则归入后面的十章和三个附录。前三章主要是介绍规范场的路径积分量子化和F－P场的引出。第四章主要是讨论费曼规则和利用B. R. S.变换推导Slavnov恒等式。第五章阐明BPHZ重正化方案的基本思路。第六章、第七章介绍维数正常化及其在重正化理论中的应用，包括多圈图有害极点自动消除的讨论。第八章证明各种情况下重正化前后规范群的同构。第九章证明有自发破缺时也可以重正化和物理的S矩阵元的规范不变性。第十章介绍重正化群和渐近自由。附录一是经典规范理论简介，扼要地回顾一下经典(没有量子化的)规范

理论的基本内容。附录二是第八章所讨论的正规(1PI)顶角函数生成泛函发散部分 $\Gamma^{\mathrm{div}}_{n+1}(S^0_n)$ 的一般形式的一个证明。附录三是重正化群具体应用的一个例子，包括深度非弹性散射理论中的反常量纲的计算。各章和附录都附有参考文献。

感谢中国科技大学研究生院于 1979 ~ 1980 年给作者提供了写这本书所必需的工作条件。

作者曾以这本书的初稿作为教材，于 1980 年和 1982 年两次在浙江大学物理系给理论物理专业的研究生讲“量子规范理论”的课。在讲课和讨论中作者得到了不少收益。

感谢中国科学院理论物理研究所戴元本同志和中国科技大学研究生院赵保恒同志的很多有益的讨论。

感谢浙江大学物理系季达人同志和陈成明同志认真地阅读了原稿，提出了宝贵的意见，感谢沈建民同志帮助校对。

由于作者水平有限，书中难免仍有错误和不妥之处，请读者来信指出，以便以后改正。

汪　容

1983 年年初

于杭州浙江大学求是东村

目　　录

引　　子

在深入地叙述一些技术细节之前，让我们借这个引子对量子规范理论作一个概括的介绍，包括它的发展、成就以及面临的重大问题。考虑到历史发展的先后次序，我们的介绍就从电磁相互作用入手。

电磁相互作用　最简单的量子规范理论就是描述电磁相互作用的量子电动力学，它主要是在20世纪40年代和50年代初发展起来的。现在让我们看一看在量子电动力学中，规范相互作用是如何引入的①。取自由Dirac方程：

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{1$_1$}$$

用以导出这个Dirac方程的拉氏量是：

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi \tag{1$_2$}$$

定义如下的相因子变换，θ是常数，我们把这个相因子变换称为整体规范变换：

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &= e^{-i\theta}\psi \\ \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' &= \bar{\psi}e^{i\theta} \end{aligned} \tag{2}$$

在整体规范变换下，$\mathscr{L} \rightarrow \mathscr{L}'$：

$$\mathscr{L}' = -\bar{\psi}'(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi' = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = \mathscr{L}$$

可见(1)式的$\mathscr{L}$在整体规范变换下是不变的。

再看有相互作用的情况。早先的引入电磁相互作用的办法是从经典物理学来的，即取

$$P_\mu \rightarrow P_\mu - \frac{e}{c}B_\mu \ (B_\mu \text{ 代表电磁势}, \mu = 1,2,3,4) \tag{3}$$

然后换成量子力学的表述，

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ieB_\mu \tag{4}$$

（为了方便，我们取自然单位，即$c = \hbar = 1$）。

于是在有相互作用的情况下，Dirac方程(1)式换成

$$(\gamma_\mu \partial_\mu - ie\gamma_\mu B_\mu + m)\psi = 0 \tag{5$_1$}$$

这就是有电磁相互作用的Dirac方程，其拉氏量是

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu - ie\gamma_\mu B_\mu + m)\psi \tag{5$_2$}$$

其中$ie\bar{\psi}\gamma_\mu \psi B_\mu$是电磁相互作用项。

值得注意的是从另一条途径也可得到$(5)_1$式，就是引入规范相互作用。引入的过程说明如下。

我们定义定域规范变换：

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\theta(x)}\psi$$

① 经典规范理论的基本内容见附录一。

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{i\theta(x)} \tag{6}$$

定域规范变换与整体规范变换的区别在于 $\theta = \theta(x)$ 是 x 的函数。也就是说，在不同的 x 点（不同的空间时间点），取不同的相因子变换。此时不含相互作用项的拉氏量 $\mathscr{L}$（见(1)$_1$ 式）不再是不变的，因为

$$\mathscr{L}' = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi + i\bar{\psi}\gamma_\mu \psi \partial_\mu \theta(x) \neq \mathscr{L}$$

若要保持 $\mathscr{L}$ 不变，就必须把(1)$_1$ 式的 $\mathscr{L}$ 换成

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu - ie\gamma_\mu B_\mu + m)\psi \tag{7}$$

其中引入了规范场 B_μ，B_μ 的定域规范变换是

$$B_\mu \to B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x) \tag{8}$$

(7)式满足

$$\begin{aligned}\mathscr{L}' &= -\bar{\psi}'(\gamma_\mu \partial_\mu - ie\gamma_\mu B'_\mu + m)\psi' \\ &= -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu - ie\gamma_\mu B_\mu + m)\psi = \mathscr{L}\end{aligned}$$

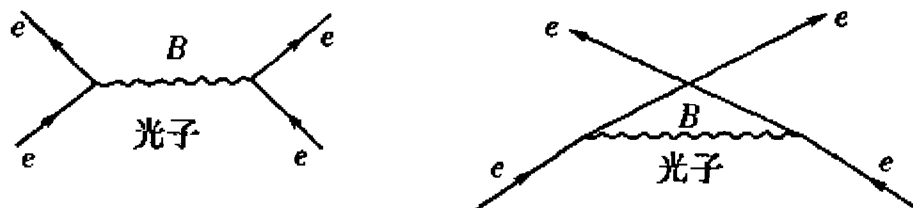
也就是满足定域规范不变。

由此可见，$\mathscr{L}$ 要在定域规范变换下保持不变，就必须引入规范场，从而也就引入了规范场与粒子的相互作用项。这里具体来说就是引入了电磁场势 B_μ，从而在 $\mathscr{L}$ 中引入了电磁相互作用项 $ie\bar{\psi}\gamma_\mu \psi B_\mu$。注意(7)式的 $\mathscr{L}$ 正好就是(5)$_1$ 式的 $\mathscr{L}$！所以说，电磁相互作用是可以通过定域规范不变而引入的。

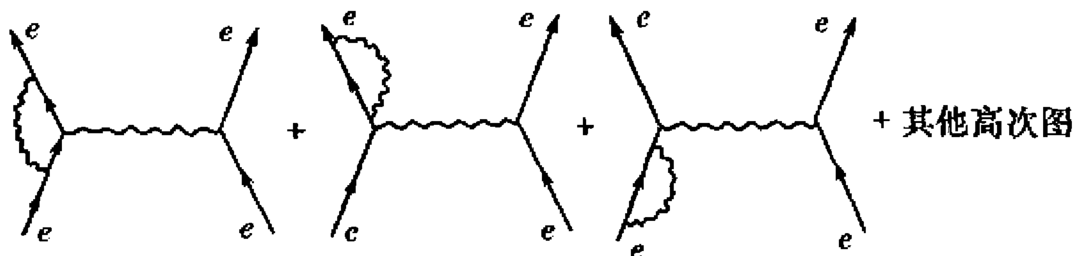
上述与电磁相互作用相联系的定域规范变换(6)和(8)称作 $U(1)$ 规范变换，有一个 $\theta(x)$。而且我们看到，保持定域规范变换不变的引入 B_μ 的方式，与 $P_\mu \to P_\mu - \frac{e}{c}B_\mu$ 的引入方式在电磁相互作用中是等价的。但下面就会知道，定域规范变换下保持不变的引入方式反映了更深刻、更普通的客观规律性。

在进一步介绍之前，先举两个电磁相互作用的例子。

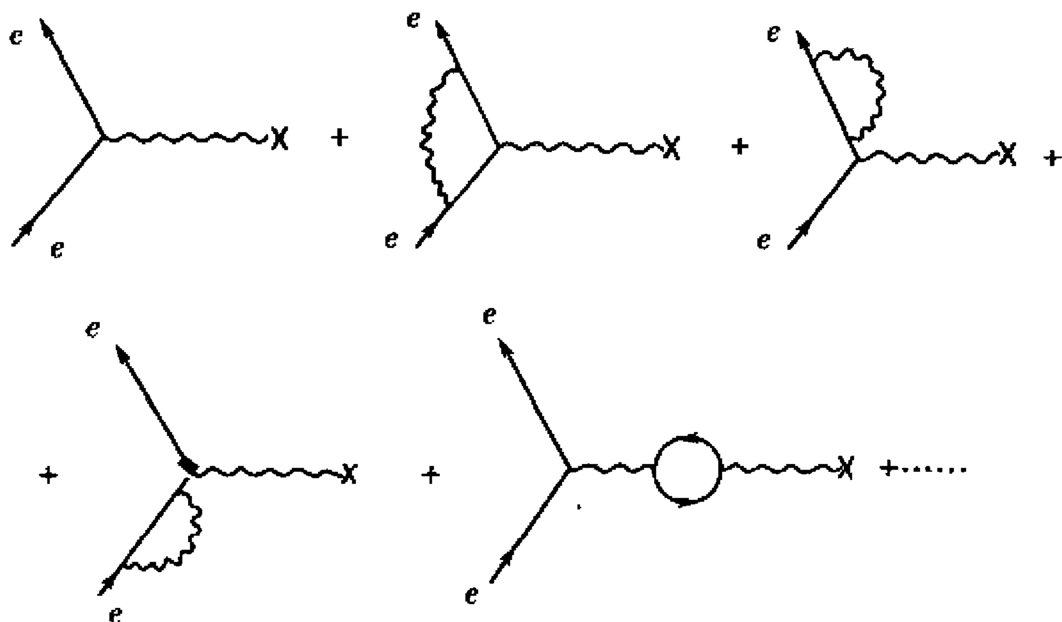
一个例子是电子与电子的散射，它有如下的交换光子的机制（B_μ 场的量子就是光子）：



同时还有高次相互作用的贡献（见如下带圈的图）：



另一个例子是电子在外电磁场（用～～～×来表示）中的散射，它有如下各图的作用机制：

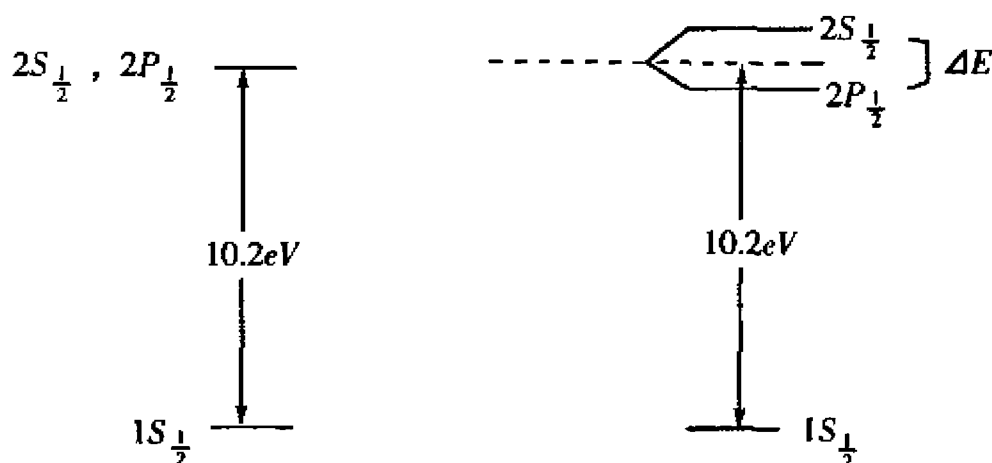


上面画出的带圈的图是很重要的，它们反映了真空的作用，反映了在真空中粒子不断地短暂地产生与湮没。人们把这称为“真空不空”。

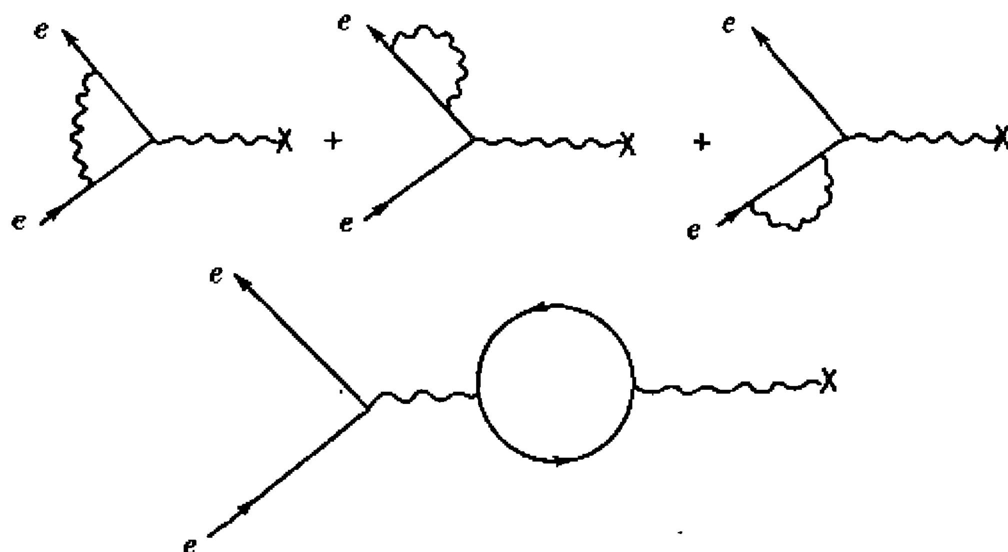
用来检验这种电磁相互作用理论的有两个有名的实验。

1. Lamb 位移（1947 年发现）

如果不考虑圈图，直接取 Dirac 方程的解，则氢原子的 $2S_{1/2}$ 态和 $2P_{1/2}$ 态有相同的能级高度。然而实验上发现这两个态的能量并不相同：



与不考虑圈图的理论计算值相比，$2S_{1/2}$ 升高很明显，$2P_{1/2}$ 则稍下降。这个现象叫 Lamb 位移。它说明带圈的图（真空的作用）绝不能略去。事实上前面说过的如下几个带圈图的效果是使 $2S_{1/2}$ 上升（电磁场的真空零点振动效应）；而另外的这个带圈图的效果是使 $2S_{1/2}$ 下降（电子—正电子场的真空极化效应）。总的效果是 $2S_{1/2}$ 明显上升。考虑了各种带圈图的贡献以后，理论值和实验值符合得很好。下面列出最近的实验值和理论值：



实验值：(1975) $\Delta E \sim 1057.893 \pm 0.020\text{MHz}$

(1976) $\Delta E \sim 1057.862 \pm 0.020\text{MHz}$

理论值：(1971) $\Delta E \sim 1057.916 \pm 0.010\text{MHz}$

(1975) $\Delta E \sim 1057.864 \pm 0.014\text{MHz}$

2. 反常磁矩(1947 年发现)

最近的实验值和理论值也列举如下。

电子，实验值(1979)

$$1.001,159,652,410(200)\ \frac{e\hbar}{2m_e c}$$

理论值(1981)

$$1.001,159,652,460(148)\ \frac{e\hbar}{2m_e c}$$

μ 子，实验值(1977)

$$1.001,165,922(9)\ \frac{e\hbar}{2m_\mu c}$$

理论值(1977)

$$1.001,165,919(10)\ \frac{e\hbar}{2m_\mu c}$$

理论值和实验值也是符合得很好的。

此外还有别的实验，特别是几十个 GeV 的高能实验，说明即使小到 10^{-16} 厘米的范围，量子电动力学的理论与实验仍是符合得很好的。所以，量子规范理论在电磁相互作用方面获得了很大的成功。

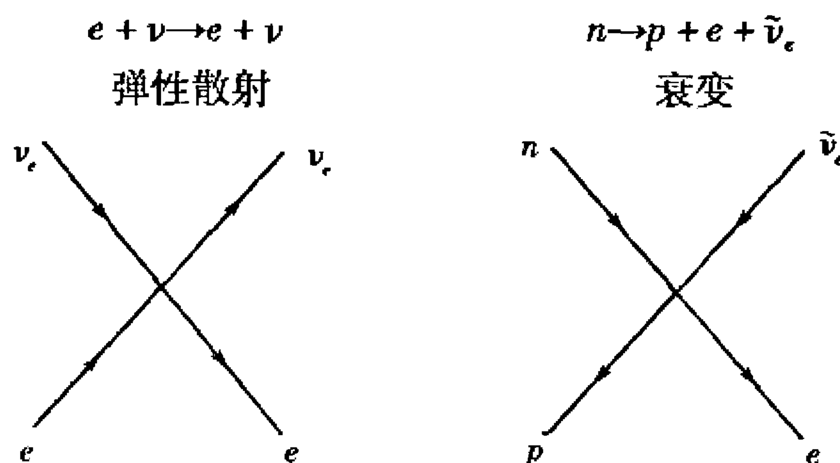
这个成功并不是很轻松地得来的，因为每一个圈都有一个发散积分。这可以说是一般的点粒子和点相互作用所固有的性质(经典的电子理论里面也有这种发散问题)。为了得到合理的结果，就必须进行重正化。重正化就是把发散部分合乎逻辑地分出来，吸收到耦合常数(例如 e)和质量(例如 m_e)中去。再重新定义理论上的观测量(包括耦合常数和质量)，从而得到不发散的结果①。在分出发散部分时要特别注意保持协变性和规范不变性以及其他的对称性质。

要说明一点，并非所有的理论都是可以重正化的。不过，量子电动力学作为一种规范理论则是可以重正化的。所以，量子电动力学的成功实际上也说明了重正化理论的成功。如果不能重正化，量子电动力学的计算就不可能这么精确。

下面，在弱相互作用中，我们立刻就要看到一个不可重正化的例子。

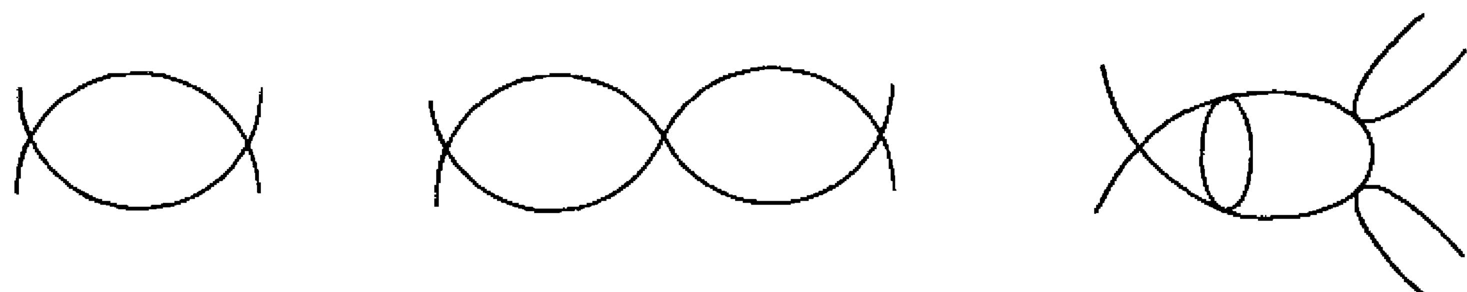
弱相互作用 最初的描述弱相互作用的理论是费米相互作用理论。在这个理论里，四个费米子在一点发生相互作用，并没有弱相互作用的传递者。例如：

① 重正化的基本要点见第五章。



用这种理论计算低能近似可以得到不错的结果，但却遇到两个根本性的困难：

1. 它是不能重正化的，因而不能计算高次图，例如：事实上，这种理论有无穷多种发散图，无法把发散部分纳入少数几种粒子的质量和耦合常数中去。所以，这是一种不自洽的理论，因为它有无法计算的高次图。



2. $e+\nu_e \to e+\nu_e$ 的弹性散射截面是：

$$\sigma \approx \frac{G^2E^2}{2\pi}$$

其中 G 是费米型弱作用耦合常数，E 是质心系总能量。在这里，σ 随能量平方（E^2）而上升。

但另一方面，如果没有传递者，则能量越高，波长越短，碰撞截面应该是：

$$\sigma \sim \pi\lambda^2 \sim \frac{1}{E^2}$$

所以是自相矛盾的。

人们看到了需要有弱作用的传递者来帮助解决困难。至少上述第二个困难可以借助于传递者来解决，因为如果有传递者，则理论上求得的高能弹性散射截面为：

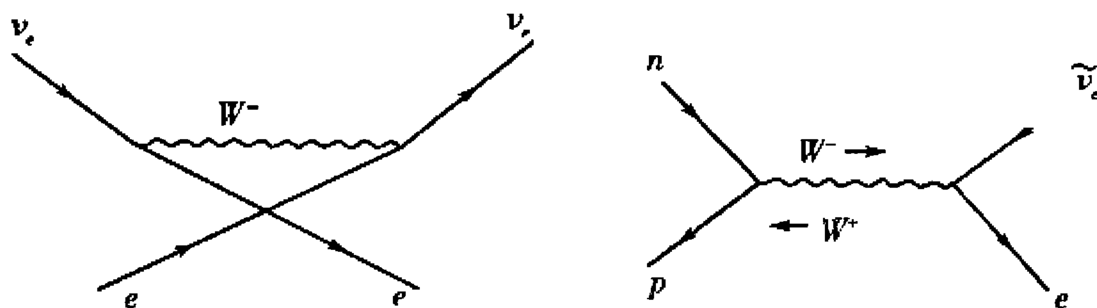
$$\sigma \sim 常数$$

它不会随能量的增加而无限地增加，也不会随能量的增加而趋于零，从而不出现第二个困难。

由于这种考虑，在 20 世纪 50 年代末和 60 年代初，人们提出了弱相互作用的中间玻色子理论。这个理论引入了中间玻色子 $W^{\pm}$ 作为弱相互作用的传递者，并用 $W^{\pm}$ 传递弱作用的机制代替了前述不要传递者的机制，例如下列过程的机制可用下一页的图来表达：

$$e+\nu_e \to e+\nu_e \qquad n \to p+e+\tilde{\nu}_e$$

这个理论要求传递者（$W^{\pm}$ 粒子）的静止质量很大，比质子重好几十倍。但是，1960 年人们又证明了以静止质量不为零的 $W^{\pm}$ 为传递者的理论是不可重正化的。于是上述第一个困难一时仍不得解决。后来，人们经过努力终于解决了这个困难，但经过了一段曲折的过程。



困难的解决与两件看来不相干的事有关。

1. 非 Abel 规范场——杨 – Mills 场[①]:

(1)式可以加以扩充。例如,由于在强相互作用下,中子(n)和质子(p)的质量差可以忽略,于是可以取

$$m_p = m_n = m$$

此时把波函数写成

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}, \bar{\psi} = (\bar{\psi}_p, \bar{\psi}_n) \tag{9}$$

(脚标 p,n 分别标出质子,中子的波函数)。则 Dirac 方程可写成

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = (\gamma_\mu \partial_\mu + m)\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} = 0 \tag{10}$$

拉氏量 $\mathscr{L}$ 是

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = -(\bar{\psi}_p \bar{\psi}_n)(\gamma_\mu \partial + m)\begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

$$= -\bar{\psi}_p(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_p - \bar{\psi}_n(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi_n \tag{11}$$

仿照(2)定义整体规范变换($SU(2)$规范群):

$$\psi \to \psi' = e^{-iT^i\theta^i}\psi$$

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{iT^i\theta^i} \tag{12}$$

其中

$$T^i = \frac{1}{2}\tau_i (i = 1,2,3)$$

τ_i 是泡利二行二列矩阵。$\theta^i(i=1,2,3)$都是常数。可以看到(11)式的拉氏量在这个整体规范变换下不变:

$$\mathscr{L}' = -\bar{\psi}'(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi' = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = \mathscr{L}$$

再仿照(6)定义定域规范变换($SU(2)$规范群):

$$\psi \to \psi' = e^{-iT^i\theta^i(x)}\psi$$

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{iT^i\theta^i(x)} \tag{13}$$

(这里 $\theta^i(x)$ 是 x 的函数),则(11)式的 $\mathscr{L}$ 和以前的例子一样,并不能满足规范不变($\mathscr{L}' \neq \mathscr{L}$)。在以前的例子中只有一个 $\theta(x)$,如要满足定域规范不变,就要引入一个规范场 $B_\mu(x)$。现在有三个 $\theta^i(x)$,如果满足定域规范不变,就要引入三个规范场 $A_\mu^i(x)$($i=$

① 非 Abel 规范场或杨 – Mills 场是杨振宁同 Mills 于 1954 年提出的,参见本书附录一。

1,2,3)。在引入$A_\mu^i(x)$的同时,就也引入了不破坏p,n对称性的相互作用,这种相互作用由A_μ^1,A_μ^2,A_μ^3传递。但是,建立这个理论有一个条件,就是A_μ^1,A_μ^2,A_μ^3必须没有静止质量。否则,第一,A_μ^i本身就不能满足规范不变的要求,第二,不能重正化。

然而世界上除光子外并不存在另外一种静止质量为零的矢量粒子(A_μ^i是矢量粒子),所以这个理论所描述的似乎是一种世界上并不存在的东西。

另一件看来不相干的事是:

2. 真空自发破缺时有 Goldstone 粒子:①

如果拉氏量和运动方程都保持规范不变,而有某个标量场φ的真空期待值不等于0:

$$\langle\varphi\rangle_0\neq 0 \tag{14}$$

则规范不变性也被破坏。叫做真空自发破缺。可以证明,真空自发破缺时,要出现静止质量为零的标量粒子,叫做 Goldstone 粒子。但静止质量为零的标量粒子又是世界上并不存在的东西。

不久以后,有人把这两件看来不相干的事结合了起来,发现了一个很别致而又很解决问题的机制:

Higgs 机制 把规范场与标量场耦合起来,则发现在真空自发破缺时,竟出现了原先意料不到的事:Goldstone 粒子消失了,而规范场粒子却获得了静止质量。似乎是规范场粒子吞食了 Goldstone 粒子,后者消失了,前者却吃成了胖子。这个机制就叫做 Higgs 机制。Higgs 机制并不破坏拉氏量和运动方程的规范不变性②。

这样就一下子解决了两个难题,一是排除了世界上不存在的 Goldstone 粒子,二是规范场粒子获得了静止质量。

Higgs 机制的发现,给出了一线希望:也许在$W^\pm$有静止质量(通过 Higgs 机制获得)的情况下,仍能实现重正化(因为考虑到拉氏量和运动方程的规范不变性仍存在)。但这并不等于已经解决了重正化的问题。

在这个希望的推动之下,Weinberg(1967 年)和 Salam(1968 年)提出了一个模型。

Weinberg - Salam 模型 这个模型也是一个量子规范理论,它所取的是$SU(2)\otimes U(1)$规范群。

前面说过,$SU(2)$规范理论要引入三个规范场A_μ^1,A_μ^2,A_μ^3;而$U(1)$规范理论要引入一个规范场B_μ。把它们线性组合一下,可得到

$$\begin{aligned}W_\mu^+ &= (A_\mu^1 - iA_\mu^2)/\sqrt{2}\\ W_\mu^- &= (A_\mu^1 + iA_\mu^2)/\sqrt{2}\\ Z_\mu^0 &= \sin\theta_W B_\mu - \cos\theta_W A_\mu^3\\ A_\mu &= \cos\theta_W B_\mu + \sin\theta_W A_\mu^3\end{aligned} \tag{15}$$

其中W_μ^+,W_μ^-,Z_μ^0有大的静止质量,它们是传递弱相互作用的;A_μ没有静止质量,它是传递电磁相互作用的,所以它就是光子。

于是看到,这个模型里面既有传递弱相互作用的粒子,又有传递电磁相互作用的光

① 真空自发破缺的情况下会出现 Goldstone 粒子,这是 Goldstone 于 1961 年提出的。参见本书附录一。

② Higgs 机制于 1964 年由 Higgs 等人提出,参见本书附录一。

子。因此 Weinberg - Salam 模型是一个弱电统一模型①。

这个模型真正为人们所接受,则是在越过了三个障碍之后。

1. 第一个碍障是量子化。人们常用的正则量子化方法在一般的规范条件下遇到了困难,所以通常采用的是路径积分量子化方法。路径积分量子化是把经过不同路径的波的振幅叠加起来,从而实现量子化,是 Feynman 在 1948 年提出来的(他采纳并发展了早年 Dirac 在这方面的一个讨论)②。用这个方法来解决非 Abel 规范场的量子化的困难,则是 Faddeev 和 Popov(1967 年)的贡献。他们发现在处理非 Abel 规范场的量子化时,规范条件的引入将在路径积分中给出一个不可忽略的雅可比行列式。这个雅可比行列式的作用等效于一组费米场,我们把它们叫做 F - P 场。可是,这一组费米场的自旋为 0,违反了正常的自旋与统计的关系,所以很多人又把 F - P 场叫做"鬼场"。原先处理非 Abel 规范场的量子化时,幺正性问题不好解决。找到了 F - P 场后,幺正性问题才解决了。特别是在取协变规范时,路径积分量子化是很方便的。

2. 第二个障碍是重正化。

1971 年,'t Hooft 找到了对重正化的讨论比较方便的一种规范条件,解决了单圈图的重正化问题。

1972 年,'t Hooft 和 Veltman 找到了维数正常化方法,用这种正常化方法消去发散,可以保证不破坏规范不变性,解决了双圈重正化问题。

以后又逐步解决了任意多圈的重正化问题(关于重正化的基本概念,请参看第五章。关于维数正常化,请参看第六章。关于任意多圈的重正化,请参看第七章,第八章和附录二。关于有自发破缺时的重正化,请参看第九章)。

为什么要重视重正化? 主要原因是:

第一,量子电动力学太准确了,这是可重正化的结果。

第二,20 世纪 50 ~ 60 年代的费米型弱相互作用理论没有希望计算高次微扰,原因就是它是不可重正化的。现在 Weinberg - Salam 模型理论能不能计算高次微扰呢? 是不是理论上自洽呢? 关键仍在于它是不是可重正化的。

在这里我们再对重正化说一点看法。

(ⅰ)如果采用点模型、点相互作用,则做微扰论计算时发散不可避免。采用点模型是由于对粒子内部结构的无知;对粒子内部结构的无知则是来自实验条件的局限性。

(ⅱ)即使实验条件解决了,这一层次的点模型换成了结构模型,但对下一层次内部结构的无知,又会导致下一层次的点模型、点相互作用,仍旧可能出现发散,仍旧可能需要重正化。所以发散的问题可能在科学的发展中会多次遇到。目前人们正在探讨下一个物质结构层次——亚夸克层次,就也采用了点模型。

(ⅲ)现代的重正化方法是一种逻辑上自洽的方法,它是按照一定的正常化规则进行的。正常化就是暂时地用含可调节参量的不发散积分去代替原先的发散积分。目前知道的能够保持规范不变性的正常化方法是维数正常化方法。这个方法的要点是把 4 维的时空推广到 n 维,从而可以把发散积分写成如下形式:

---

① 参见附录一。

② 关于路径积分量子化,参见第一章,第二章。关于非 Abel 规范场的量子化,参见第三章。

$$\frac{F_1}{n-4}+\frac{F_2}{(n-4)^2}+\cdots+\frac{F_i}{(n-4)^i}+\text{不发散项} \tag{16}$$

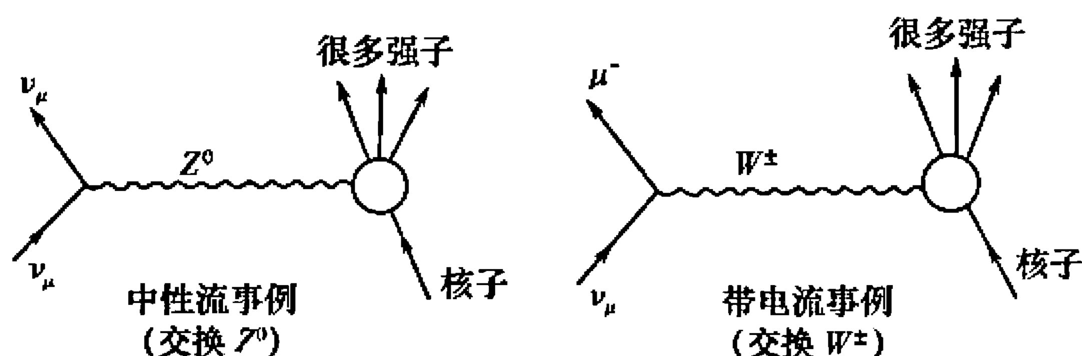
注意此式在 $n \neq 4$ 时并不发散。$F_1, F_2, \cdots, F_i$ 是动量和能量的多项式(见第七章的证明),从而可以用一定的减除方法把这些$\frac{1}{n-4}$极点项减除掉。对于可重正化的理论,只有有限的几种减除项,它们可归并到裸的质量、裸的耦合常数里面去,从而重新定义重正化的耦合常数和重正化的质量。因为$\frac{1}{n-4}$极点项都已减除掉,所以取 $n=4$ 时,一切(包括重正化的耦合常数和质量)都是不发散的。可见,整个重正化过程在数学上是有确切定义的,不再是 20 世纪 40 年代末、50 年代初的早期的无穷大减无穷大的重正化,逻辑上是自洽的。

(ⅳ)在重正化时总是要引入一个带质量量纲的参数 μ。这个参数 μ 是可以跑动的,从而重正化后不发散的格林函数也将随 μ 而跑动,但物理的结果并不随 μ 而变。这种不变性可看作是一种"群"的不变性。这个群就叫"重正化群"。由这个不变性可导出重正化群方程。利用重正化群方程又可以进一步研究大的动量传递下的渐近行为。这说明,研究重正化不仅可以消去发散,而且可以积极地预言新的物理结果①。

3. 第三个障碍是实验上的困难

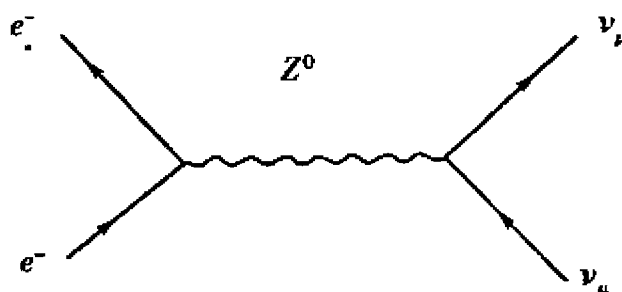
Weinberg - Salam 模型是否正确,归根结底要看实验的检验。但弱相互作用的实验是很精细的,事例很少,所以有实验上的困难。20 世纪 70 年代由于高能实验物理技术的提高,实验物理学家们提供了三个关键性的实验结果,给 Weinberg - Salam 模型以支持。

(ⅰ)1973 年的中性流实验:



实验上发现中性流事例与带电流事例的比例是 1:3。证实了理论上预言的中性流事例的存在,间接地支持了 Z^0 的存在。

(ⅱ)1979 年的 $e^- + \nu_\mu \to e^- + \nu_\mu$ 弹性散射实验:



实验上发现了 e^- 和 ν_μ 的弹性散射事例,支持了 Z^0 的存在(否则就不会出现这种散

① 关于重正化群和渐近行为,见第十章和附录三。

射)。这个实验的入射质子总数为 10^{19} 个,有

249000 个中微子作用事例,

34 个 $e^-\nu_\mu$ 弹性散射事例,

所得结果与 Weinberg - Salam 模型理论一致。

以后又有一个实验,72 个 $e^-\nu_\mu$ 弹性散射事例,结论相同。

(iii)1979 年的极化电子与氘核散射的实验:

左旋电子 + 氘(非极化)$\to e' + X$,测得截面 σ_L,

右旋电子 + 氘(非极化)$\to e' + X$,测得截面 σ_R。

给出

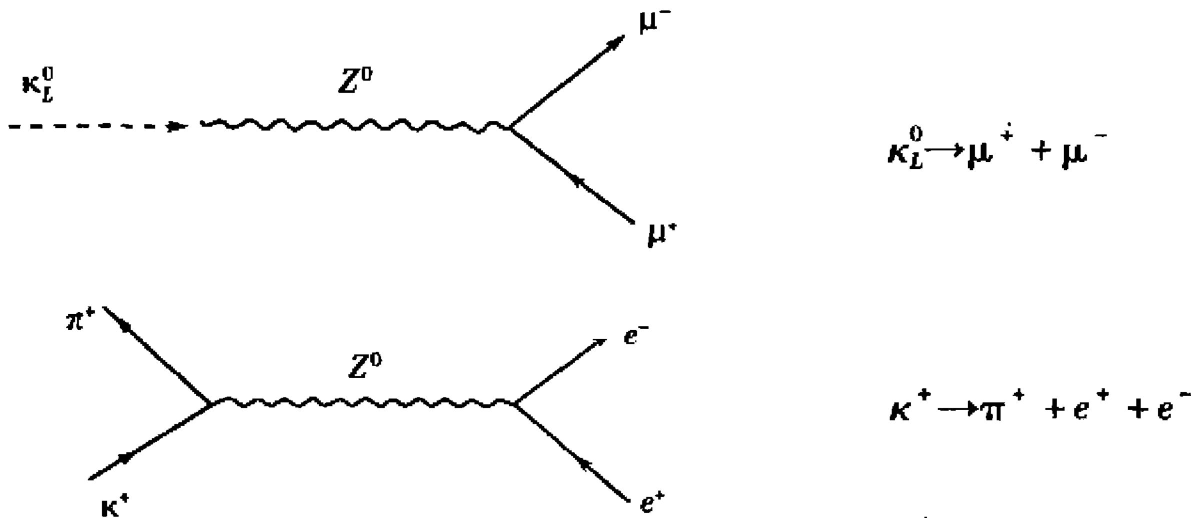
$$A = \frac{\sigma_R - \sigma_L}{\sigma_R + \sigma_L} = (-9.5 \pm 1.6) \times 10^{-5} \times Q^2 \tag{17}$$

其中 Q 以$\frac{GeV}{c}$为单位。

如果只有电磁作用,就不会左右不对称,应该 $A=0$。如果有 Z^0 参与,就会有宇称不守恒,从而左右不对称,应有 $A \neq 0$。所以这个实验也间接支持了 $W-S$ 模型所预言的 Z^0 的存在。

以上三个实验都是间接地支持 Z^0 的存在。1983 年 1 月西欧中心 $P\overline{P}$高能对撞实验中又观测到了大横动量的电子,经分析知道,它们只可能是 W 的衰变产物($W^\pm \to e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e)$)。根据电子横动量可以推断 $W^\pm$ 的静止质量 ~80Gev/c^2,与理论预言一致。1983 年 5 月又发现了 Z^0,静止质量 ~90Gev/c^2,也与理论预言一致。Weinberg - Salam 模型终于直接得到实验证实。

GIM 模型① Weinberg - Salam 模型提出之后,人们又产生了把它推广到强子弱作用的想法。当时只知道有三种层子(夸克):u,d,s,在尝试推广 Weinberg - Salam 模型时遇到一个困难,就是为什么实验上没有看到下列衰变:



1970 年 Glashow, Iliopoulos 和 Maiani 认为,组成强子的层子(夸克)不应该只有三种,而是应该有四种:u,d,s,c。这个方案一般叫做 GIM 模型。它解决了上述困难。

1974 年发现了 J/ψ 粒子,分析的结果,认为 J/ψ 粒子是由 c 和 $\bar{c}$(反 c)组成的,从而证实了 c 和 $\bar{c}$ 的存在。c 称为粲层子(或粲夸克)。

① 参见附录一。

GIM 模型的提出还同时解决了另一个很困难的问题，就是三角图反常困难，或 γ_5 反常困难。它阻碍了重正化的实现。γ_5 反常不仅有三角图，而且有四角图，五角图[1]。有趣的是，γ_5 反常的贡献与费米子的质量无关。把 4 种层子(u,d,s,c)的 γ_5 反常的贡献与 4 种轻子(e,ν_e,μ,ν_μ)的 γ_5 反常的贡献加在一起，就正好相互抵消！原先，在 Weinberg - Salam 模型中，存在着 γ_5 反常的困难。由于 GIM 模型的提出，这个困难就解决了。

由于克服了上述各种障碍和困难，具有量子规范理论特点的弱电统一理论(包括 Weinberg - Salam 模型和 GIM 模型)目前已经令人信服地为科学界所接受。

强相互作用 20 世纪 60 年代人们就已经知道，三个层子组成一个重子，一对层子和反层子组成一个介子。但是，一直到 60 年代末，强相互作用的机制仍像是一团乱麻。解开这团乱麻的最初的线索是这样一个疑问，就是层子的自旋是 $\hbar/2$，它应该服从费米统计和泡利不相容原理，可是为什么重子里面的三个层子的波函数反而是对称的？这个疑问使人们想到层子可能有另外一种未知的量子数(代表一种隐藏着的自由度)。换句话说，可能有三种 u 层子，三种 d 层子，三种 s 层子……这新的量子数或自由度人们把它叫做"色"。假定有三种"色"，即"红"、"绿"、"蓝"。那么，重子中的三个层子就总是不同色的，一个"红"，一个"绿"，一个"蓝"。这样就解释了上述疑问。三"色"合在一起就成无"色"(或白色)，所以重子都是无"色"的。介子由层子和反层子组成。层子和反层子的"色"量子数相反，所以合在一起也成无"色"。这就又说明了为什么我们以前不知道"色"自由度的存在。原来我们所接触的强子(包括重子和介子)都是无"色"的！

由于不同"色"的层子质量相同(例如"红"、"绿"、"蓝"的 u 层子质量相同，"红"、"绿"、"蓝"的 d 层子质量相同，等等)，所以和前述质子、中子的情况相仿，存在着"色"的对称性。可以仿照前面质子、中子波函数的写法，把两个分量的 ψ 再扩充成三个分量的 ψ：

$$\psi_f = \begin{pmatrix} \psi_{f红} \\ \psi_{f绿} \\ \psi_{f蓝} \end{pmatrix}, \bar{\psi}_f = (\bar{\psi}_{f红}, \bar{\psi}_{f绿}, \bar{\psi}_{f蓝}) \tag{18}$$

其中 f 代表 $u,d,s,c,\cdots$ 中的一个，自由 Dirac 方程是

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m_f)\psi_f = (\gamma_\mu \partial_\mu + m_f)\begin{pmatrix} \psi_{f红} \\ \psi_{f绿} \\ \psi_{f蓝} \end{pmatrix} = 0 \tag{19}$$

引入整体规范变换[$SU(3)$规范群]：

$$\begin{aligned} \psi_f \to \psi_f' &= e^{-iT^i\theta^i}\psi_f \\ \bar{\psi}_f \to \bar{\psi}_f' &= \bar{\psi}_f e^{iT^i\theta^i} \end{aligned} \tag{20}$$

其中 T^i 有 8 个($i=1,2,\cdots,8$)：

$$T^i = \frac{1}{2}\lambda_i \tag{21}$$

λ_i 是 $SU(3)$ 的 8 个三行三列矩阵。于是自由拉氏量

---

[1] 关于 γ_5 反常，参见第六章。

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}_f(\gamma_\mu \partial_\mu + m_f)\psi_f \tag{22}$$

在整体规范变换下不变，但在与(20)相应的定域规范变换

$$\psi_f \to \psi_f' = e^{-iT^i\theta^i(x)}\psi_f$$
$$\bar{\psi}_f \to \bar{\psi}_f' = \bar{\psi}_f e^{iT^i\theta^i(x)} \tag{23}$$

下它不是不变的。

如果要保持定域规范不变，则和前面一样，必须在(22)的 $\mathscr{L}$ 中引入规范场。

现在有 8 个 T^i，所以要引入 8 个 $A_\mu^i(i=1,2,\cdots,8)$ 规范场，才能保证 $\mathscr{L}$ 的定域规范不变。在引入 A_μ^i 规范场的同时，也就引入了相互作用。这种相互作用是作用于层子之间，也就是作用于强子之间的，属于强相互作用。传递强相互作用的传递者就是 8 种 A_μ^i 规范场，我们称它们为胶子场。于是发现，原来强相互作用也可以纳入量子规范理论。

可以看到，通过规范不变性引入强相互作用是很自然的：找到了"色"，找到了"色"的对称性，就必然可以通过定域规范变换找到有关的规范场(此地是胶子场)，引出与"色"有关的相互作用。

描述这种相互作用的量子规范理论可以和"量子电动力学"相类比，所以称为"量子色动力学"[①]。具体比较见下表：

	量子色动力学 (规范群 $SU(3)$)	**量子电动力学** (规范群 $U(1)$)
类似之处	色荷	电荷
	胶子(8 种)	光子(1 种)
	带色夸克($u_{红}, d_{绿}, \cdots$)	带电粒子($e^-, p^+, \cdots$)
	胶子场传递强作用	电磁场传递电磁作用
	有八个守恒流	有一个守恒流
不同之处	胶子带色荷	光子不带电荷
	胶子传递色荷	光子不传递电荷
	强子无色	原子可带电(离子)
	有色禁闭现象	电荷不禁闭
	有渐近自由	无渐近自由

其中更值得注意的是不同之处，特别是"色"禁闭和渐近自由。采用重正化群方法，可以从量子色动力学出发导出渐近自由[②]。但是，人们还没有能够直接从量子色动力学出发导出"色"禁闭来。

以下我们看一看实验对于量子色动力学的检验。

1. $eN, \mu N, \nu N, \bar{\nu}N$ 深度非弹性散射：

重正化群渐近自由理论和实验符合很好。例如，分析 νN 非单态矩 M(见附录三)，理论上可得：

---

① 关于量子色动力学，参见第十章和附录三。

② 关于渐近自由，参见第十章和附录三。

$$M_n(Q^2) = A_n\left[\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)\right]^{-d_n} \tag{24}$$

其中 A_n 是一个只与 n 有关的常数，与 Q^2 无关；d_n 是一个与反常量纲有关的常数。自(24)有

$$\ln M_n(Q^2) = \ln A_n - d_n \ln\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)$$

$$\ln M_m(Q^2) = \ln A_m - d_m \ln\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)$$

$$\therefore \ln M_n(Q^2) = C_{m,n} + \frac{d_n}{d_m}\ln M_m(Q^2) \tag{25}$$

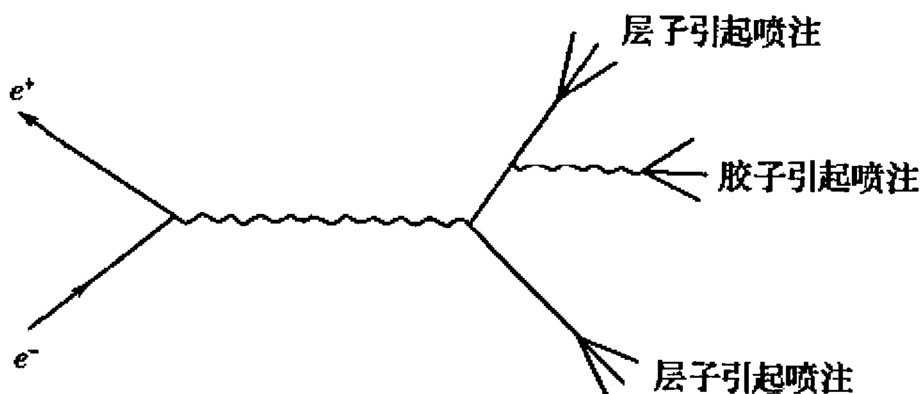
可见理论上 $\ln M_n(Q^2)$ 和 $\ln M_n(Q^2)$ 是直线关系。用重正化群方法可以算出 d_n/d_m，得到斜率。理论上求出的斜率与实验很符合。如果是完全自由，就不会有这种直线关系。

2. $e^+ + e^- \to X$ 过程：

这里 X 代表高能 e^-e^+ 对撞后产生的很多强子。这个过程的实验与量子色动力学的渐近自由理论(利用重正化群方法)也是一致的。

3. 高能 e^-e^+ 对撞产生三喷注的发现：

实验与量子色动力学的三喷注理论一致，支持胶子的存在。



4. $P + P \to -\mu^+ + \mu^- + X$ 过程：

高能质子与质子碰撞产生 μ^-，μ^+ 的实验与量子色动力学的理论计算也符合较好。

5. 高能质子与质子碰撞产生大横动量粒子：

实验结果和量子色动力学理论计算定性地符合。

量子色动力学的理论能够在这样广泛的各个实验领域里都得到一定程度的支持，使人们不能不认为量子规范理论在强相互作用方面也是成功的。

存在的问题

1. “色”禁闭问题：人们知道强子都是无“色”的，不存在自由的单个层子和自由的单个胶子。所以，“色”总是禁闭在强子里面，这就是“色”禁闭。“色”禁闭是低能现象，低能时跑动耦合常数变大，所以量子色动力学微扰论方法对研究“色”禁闭是不适用的。人们正在尝试用格点规范理论(一种非微扰理论，把空间时间离散化，只取空间时间格子点，可以避开发散)来探讨“色”禁闭问题，但一时还没有肯定的结论。

2. 弱电统一之后，有没有更大的统一？人们正在探讨如何用量子规范理论把弱、电、强三种相互作用统一起来。提出的模型已不下十几种，但短期内没有办法用实验来判断

哪一种模型更正确。大统一理论最主要的预言就是质子要衰变,寿命 $\tau_p \sim 10^{31\pm2}$年。但实验上还没有找到质子衰变的证据。

3. 更深一层的物质结构层次是什么？目前已知的层子与反层子共有 $6\times2\times3=36$ 种(包括 d,u,s,c,b,t 六种层子及其反层子),轻子与反轻子共有 $3\times2\times2=12$ 种,再加上规范场粒子,Higgs 粒子,难道它们都是基本的吗？特别是下列对应关系和周期性的性质,以及层子与轻子的弱作用性质之间的对应关系,使人不能不设想有更深的结构层次。

层子	电荷	轻子	电荷	电荷差
d	$-\frac{1}{3}e$	e	$-e$	$\frac{2}{3}e$
u	$\frac{2}{3}e$	ν_e	0	$\frac{2}{3}e$
s	$-\frac{1}{3}e$	μ	$-e$	$\frac{2}{3}e$
c	$\frac{2}{3}e$	ν_μ	0	$\frac{2}{3}e$
b	$-\frac{1}{3}e$	τ	$-e$	$\frac{2}{3}e$
t	$\frac{2}{3}e$	ν_τ	0	$\frac{2}{3}e$

这方面的情况也是模型很多,而且大多数都是量子规范理论类型的模型,但短期内没有办法用实验来判断哪一种模型更正确。

4. 引力理论是否也应是一种量子规范理论？它能不能同弱、电、强三种相互作用统一起来？到目前为止,引力理论的量子化、重正化问题还没有解决。表面看到的困难是引力常数 G 带有量纲(质量)$^{-2}$(取自然单位,下同)。我们记得,当年不可重正化的费米型弱相互作用的耦合常数也是带有量纲(质量)$^{-2}$的,而可重正化的 Weinberg - Salam 模型的耦合常数则没有量纲,但是实际的困难要比这更深刻得多。

以上就是对量子规范理论的一个概括的介绍。读者如果想知道具体的推导和更多的细节,就请阅读以下各章和有关附录。至于存在的问题,书中就不讨论了。

第一章 路径积分量子化

这一章将讨论路径积分量子化，及所涉及的一些问题，将说明如何从路径积分导出量子化场的对易关系等，说明路径积分与 S 矩阵元的关系，以及微扰论如何导出。

§1-1 路径积分的提出

对于规范场，可以采用一种比较方便的量子化方法，就是路径积分量子化方法。

什么是路径积分？我们举一个直观的 1+1 维的例子如下（见 1.1 图）：

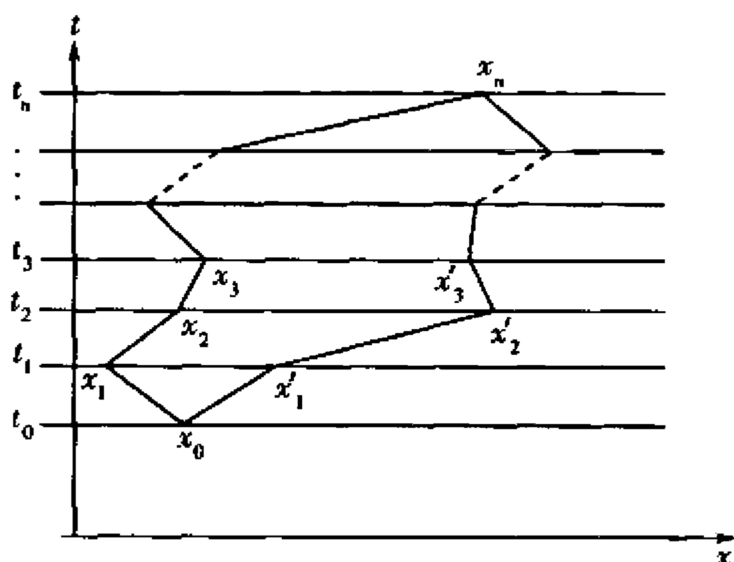


图 1.1

设想物质波传播的一条路径 $(t_0,x_0),(t_1,x_1),\cdots,(t_n,x_n)$。这个波在时间 (t_0,t_1) 之间，由 x_0 传播到 x_1；在时间 (t_1,t_2) 之间，由 x_1 传播到 x_2；…；在时间 (t_{n-1},t_n) 之间，由 x_{n-1} 传播到 x_n。我们可以在 $t-x$ 平面上把这条路径画出来，但注意不要把波的这种传播路径误解为粒子的轨道。

物质波经过这样的传播后，它的相位改变如何？根据量子论，从 (t_0,x_0) 点到 (t_1,x_1) 点，应乘上相因子：

$$e^{i2\pi\left(\frac{x_1-x_0}{\lambda_1}-\nu_1(t_1-t_0)\right)} = e^{\frac{i}{\hbar}(P_1(x_1-x_0)-E(t_1-t_0))}$$

$$\left(\text{因为 }\lambda=\frac{h}{P},\nu=\frac{E}{h}\right) \tag{1.1}$$

当波走完整个路径，总的应乘上相因子：

$$e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}[P_i(x_i-x_{i-1})-E_i(t_i-t_{i-1})]} = e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}\left(P_i\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}-E_i\right)(t_i-t_{i-1})} \tag{1.2}$$

但物质波并不仅仅走这一条路径，它还可以走各种路径，例如 $(t_0,x_0),(t_1,x_1'),\cdots,(t_n,x_n)$（见图 1.1），以及其他的路径。不同的路径，乘的相因子是不同的。然而各条路径就波的传播来说有同等的贡献，也就是有同样的权重。例如 t_1 时经过 x_1 和经过 x_1' 有

同样的权重，t_2 时经过 x_2 和 x_2' 有同样的权重，等等①。所以，从(t_0,x_0)出发的物质波，经过各种传播路径后，由于相位不同而会自相干涉。于是，到达(t_n,x_n)时，叠加的（干涉后的）波幅应是（用 H 代表 E）：

$$\sim 常数\int dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}\left(P\frac{x_i-x_{i-1}}{t_i-t_{i-1}}-H_i\right)(t_i-t_{i-1})}$$

$$= 常数\int dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}(P\dot{x}_i-H_i)(t_i-t_{i-1})} \tag{1.3}$$

在经典力学中定义 $L=P\dot{x}-H$（P 和 x 互相正则共轭），于是又可写成（注意积分中都是经典的物理量，不是量子化的算符）：

$$\sim 常数\int dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{n}L(\dot{x},x)(t_i-t_{i-1})} \tag{1.4}$$

再把(t_0,t_n)分割更细，以至分割到无穷细，其极限就是如下的无穷维积分：

$$\sim 常数\int_{x_0}^{x_n} d(x) e^{\int_{t_0}^{t_n}\frac{i}{\hbar}L(\dot{x},x)dt} \text{②} \tag{1.5}$$

[边界条件是 $x(t_0)=x_0, x(t_n)=x_n$]。这个积分代表上述所有各种路径的贡献的求和，所以称为路径积分。下面我们将用更严格的方法导出(1.5)式。为此，我们先回顾一下薛定谔绘景和海森伯绘景。

薛定谔绘景和海森伯绘景

在薛定谔绘景，基本 $\text{bra}_S \langle q|$ 与基本 $\text{ket}|q\rangle_S$（都是基矢）都不随时间而变，算符 Q_S 也不随时间而变，但描述物理态 α 的 $\text{ket}|\alpha t\rangle_S$则是随时间而变的：

$$|\alpha t\rangle_S = e^{-iHt/\hbar}|\alpha 0\rangle_S \tag{1.6}$$

引入海森伯绘景，它与薛定谔绘景之间相差一个么正变换，基本 ket 为

$$|qt\rangle_H = e^{iHt/\hbar}|q\rangle_S \tag{1.7}$$

算符 $Q_H(t)$为

$$Q_H(t) = e^{iHt/\hbar}Q_S e^{-iHt/\hbar} \tag{1.8}$$

如果$|q\rangle_S=|q\rangle$是 Q_S的本征态，本征值为 q，

$$Q_S|q\rangle_S = Q_S|q\rangle = q|q\rangle \tag{1.9}$$

则$|qt\rangle_H=e^{iHt/\hbar}|q\rangle$是 $Q_H(t)$的本征态，本征值也是 q，因为

$$Q_H(t)|qt\rangle H = e^{-iHt/\hbar}Q_S e^{-iHt/\hbar}\cdot e^{-iHt/\hbar}|q\rangle$$

$$= qe^{-iHt/\hbar}|q\rangle = q|qt\rangle H \tag{1.10}$$

注意在这里取

$$|q0\rangle_H = |q\rangle = |q\rangle_S \tag{1.11}$$

同时，如果有一个物理的态，它在薛定谔绘景中用(1.6)来表示，则根据两种绘景之间的变换(1.7)，这个物理的态在海森伯绘景中应表示为

$$|\alpha\rangle_H = e^{-iHt/\hbar}|\alpha t\rangle_S = |\alpha 0\rangle_S \tag{1.12}$$

不随时间而变。

---

① 就是说，每一条路径都有相同的权重。在经典的情况下，可由此导出哈密顿变分原理：$\delta_S=\delta\int Ldt=0$，所以，每一条路径有相同权重的假设与哈密顿原理等价。

② $d(x)$ 有一个(　)，它表明是对所有时间 t 的 $x(t)$ 作 $dx(t)$ 积分（无穷维积分）。

所以，与薛定谔绘景相对照，可以说，在海森伯绘景，基本 $\mathrm{bra}_H <qt|$ 与基本 $\mathrm{ket}|qt>_H$（也都是基矢）都是随时间而变的，算符 Q_H 也随时间而变，但描述物理态 α 的 $\mathrm{ket}|\alpha>_H$ 则并不随时间而变。

用海森伯绘景引入转换矩阵元 $<x''t''|x't'>$

考虑一个 1 + 1 维的情况。$|x't'>_H$ 和 $x''t''>_H$ 分别是时间 t' 和 t'' 的海森伯表象的基矢(ket)。$_H<x''t''|x't'>_H$ 则是时间 t' 的基矢与时间 t'' 的基矢之间的转换矩阵元。现在把 t' 和 t'' 之间的时间分成 n 等份，第一等份的时间间隔为 ε，

$$t_{i+1} = t_i + \varepsilon(i = 0,1,2,\cdots,n-1;t_0 = t',t_n = t'') \tag{1.13}$$

则按照海森伯绘景，在每一个时间 t_i 插入全部中间态后有：(x_i 是 $x(t_i)$ 的简写)

$$_H<x''t''|x't'>_H$$

$$= \int_H <x''t''|x_{n-1}t_{n-1}>_H \mathrm{d}x_{n-1H} <x_{n-1}t_{n-1}|x_{n-2}t_{n-2}>_H \mathrm{d}x_{n-2}\cdots\mathrm{d}x_{1H} <x_1t_1|x't'>_H \tag{1.14}$$

同前一样，可把 $(x',t'),(x_1,t_1),\cdots,(x'',t'')$ 看作是波的传播路径，(1.14)也是一个路径积分。

自(1.7)和(1.11)：

$$|x_it_i>_H = e^{-i\hat{H}t_i/\hbar}|x_i> \tag{1.15}$$

于是

$$_H<x_{i+1}t_{i+1}|x_it_i>_H = <x_{i+1}|e^{-i\hat{H}(t_{i+1}-t_i)/\hbar}|x_i>$$

$$= <x_{i+1}|x_i> - i\frac{\varepsilon}{\hbar}<x_{i+1}|\hat{H}|x_i> O(\varepsilon^2) \tag{1.16}$$

这里，$<x_{i+1}|$ 相当于前面所说的基本 $\mathrm{bra}<q| =_S <q|$，它是算符 $\hat{x}$ 的正交归一本征矢量，本征值为 x_{i+1}。所以(1.16)第一项是：

$$<x_{i+1}|x_i> = \delta(x_{i+1}-x_i) = \frac{1}{\hbar}\int\frac{\mathrm{d}P_i}{2\pi}e^{\frac{i}{\hbar}P_i(x_{i+1}-x_i)}$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}P_i}{h}e^{\frac{i}{\hbar}P_i(x_{i+1}-x_i)} \tag{1.17}$$

再来看第二项的 $<x_{i+1}|\hat{H}|x_i>$，我们先讨论 $\hat{H}$ 中没有 P,x 交叉项的情况，取

$$H(P,x) = \frac{1}{2m}P^2 + V(x) \tag{1.18}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P}{m} \tag{1.19}$$

$$L(\dot{x},x) = P\dot{x} - H = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) \tag{1.20}$$

$$\therefore <x_{i+1}|\hat{H}|x_i> = \int <x_{i+1}|P_i>\frac{P_i^2}{2m}\mathrm{d}P_i <P_i|P_j>\mathrm{d}P_j <P_j|x_i> + <x_{i+1}|x_i>V(x_i)$$

$$= \int\frac{e^{\frac{i}{\hbar}P_ix_{i+1}}}{h^{1/2}}\mathrm{d}P_i\frac{P_i^j}{2m}\delta(P_i-P_j)\mathrm{d}P_j\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}P_jx_i}}{h^{1/2}} + \delta(x_{i+1}-x_i)V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$$

$$= \int\frac{e^{\frac{i}{\hbar}P_i(x_{i+1}-x_i)}}{h}\mathrm{d}P_i\left(\frac{P_i^2}{2m} + V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right)$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}P_i}{h}e^{\frac{i}{\hbar}P_i(x_{i+1}-x_i)}H\left(P_i,\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) \tag{1.21}$$

$\left(<x|P> = \frac{e^{\frac{i}{\hbar}Px}}{h^{1/2}}, <P|x> = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}Px}}{h^{1/2}} \right)$，这里 H 已经是 C 数，把(1.17)，(1.21)代入(1.16)，得到：

$$
{}_H< x_{i+1}t_{i+1} | x_i t_i >_H
$$

$$
= \int \frac{\mathrm{d}P_i}{h} e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}\left[P_i\frac{(x_{i+1}-x_i)}{\varepsilon}\ \frac{P_i^2}{2m} - V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]} + O(\varepsilon^2)
$$

$$
= \int \frac{\mathrm{d}P_i}{h} e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}\left[P_i\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} - H\left(P_i, \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]} + O(\varepsilon^2) \tag{1.22}
$$

又可写成

$$
{}_H< x_{i+1}t_{i+1} | x_i t_i >_H
$$

$$
= \int \frac{\mathrm{d}P_i}{h} e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}\left[-\frac{1}{2m}\left(P_i - \frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}m\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2 - V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]} + O(\varepsilon^2) \tag{1.22$'$}
$$

赝高斯积分

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ip^2}\mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i(ReP - ImP) \mp 2RePImP}\mathrm{d}p
$$

$$
(P = ReP + iImP)
$$

在取 e^{ip^2} 积分时，把 p 从实轴 AD 延拓到 BC。在 AB 段和 CD 段，$RePImP > 0$，$\therefore$ 当 $|p| \to \infty$，AB 段和 CD 段的积分为零。再者，在 OAB 和 ODC 回路中无奇点，故积分路径可取 BC 直线：

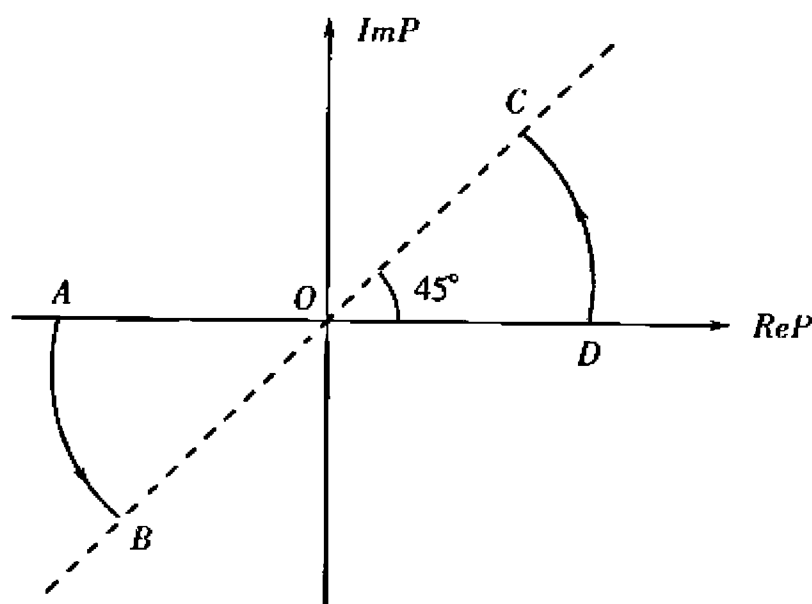


图 1.2

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip^2}\mathrm{d}p = \int_{-(1+i)\infty}^{(1+i)\infty} e^{ip^2}\mathrm{d}p = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p'^2}\mathrm{d}p'\sqrt{i} = \sqrt{i\pi}
$$

$\left(\text{此处换变数}, P = \frac{1+i}{\sqrt{2}}P' \to iP^2 = -P'^2, \mathrm{d}P = \mathrm{d}P'\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{i}\mathrm{d}P'\right)$

由于 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip^2}\mathrm{d}P$ 是 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ip^2}\mathrm{d}P$ 的复共轭，故

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ip^2}\mathrm{d}P = \sqrt{-i\pi}
$$

合在一起：$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ip^2}\mathrm{d}P = \sqrt{\pm i\pi}$

于是$(1.22)^2$积分得

$$
{}_H\langle x_{i+1}t_{i+1} | x_i t_i \rangle_H = \sqrt{\frac{-im}{\hbar\varepsilon}} e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2 - V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]}
$$

$$
= \sqrt{\frac{-im}{\hbar\varepsilon}} e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)} + O(\varepsilon^2) \tag{1.23}
$$

所以当$n\to\infty$，$\varepsilon\to 0$，(1.14)可写成(根据$(1.22)_1$)：

$$
{}_H\langle x''t'' | x't' \rangle_H
$$

$$
= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{x'}^{x''} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}x_i\right) \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\mathrm{d}P_i}{\hbar}\right) e^{i\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\left[P_i\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} - H\left(P_i, \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]}
$$

$$
= \text{常数}\int_{x'}^{x''} \mathrm{d}(x)\mathrm{d}(p) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t[P\dot{x} - H(p,x)]} \tag{1.24}
$$

又可写成[根据(1.23)]：

$$
{}_H\langle x''t'' | x't' \rangle_H
$$

$$
= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{x'}^{x''} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}x_i \sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}}\right) e^{i\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)} \sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}}
$$

$$
= \text{常数}\int_{x'}^{x''} \mathrm{d}(x) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t L(\dot{x},t)} \tag{1.25}
$$

$\left(\text{这里}\sum\varepsilon\cdots\text{换成}\int\mathrm{d}t\cdots\right)$。(1.25)式右方和前面朴素的考虑得到的(1.5)式一致。以后可看到，(1.24)，(1.25)的常数值在理论计算中不起作用，所以是不重要的。

路径积分量子化的好处首先在于把转换矩阵元写成路径积分后，可以用经典的拉氏量来表达出量子化的物理量，从而便于保持理论的规范不变性，便于研究经典拉氏量的各种对称性质的各种后果。

§1－2　p和x有交叉项的情况

也是先举一个例子：

$$
H(p,x) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{p}{m}f_1(x) + V(x) \tag{1.26}
$$

$$
\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} + \frac{1}{m}f_1(x)
$$

$$
\to p = m\dot{x} - f_1(x) \tag{1.27}
$$

$$
L(\dot{x},x) = p\dot{x} - H = (m\dot{x} - f_1(x))\dot{x} - H = m\dot{x}^2 - \dot{x}f_1(x) - \frac{1}{2m}(m\dot{x} - f_1(x))^2
$$

$$
- \frac{1}{m}(m\dot{x} - f_1(x))f_1(x) - V(x)
$$

$$
= \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \dot{x}f_1(x) + \frac{1}{2m}f_1^2(x) - V(x) \tag{1.28}
$$

这里，出现了p和x排列顺序的问题，而我们应把$\hat{H}$写成厄米形式：

$$
\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2m}(\hat{p}f_1(\hat{x}) + f_1(\hat{x})\hat{p}) + V(x) \tag{1.29}
$$

注：别的厄米性的顺序，也可化为如上形式。例如，利用$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar=C$数，厄米算符$f^{1/2}(\hat{x})\hat{p}f^{1/2}(\hat{x})$可写成：

$$f^{1/2}(\hat{x})\hat{p}f^{1/2}(\hat{x})=[\hat{x},\hat{p}]\frac{\partial f^{1/2}(\hat{x})}{\partial\hat{x}}f^{1/2}(\hat{x})+\hat{p}f(\hat{x}),$$

$$f^{1/2}(\hat{x})\hat{p}f^{1/2}(\hat{x})=f(\hat{x})\hat{p}+f^{1/2}(\hat{x})[\hat{p},\hat{x}]\frac{\partial f^{1/2}(\hat{x})}{\partial\hat{x}},$$

$$\therefore\quad f^{1/2}(\hat{x})\hat{p}f^{1/2}(\hat{x})=\frac{1}{2}(\hat{p}f(\hat{x})+f(\hat{x})\hat{p})$$

$$<x_{i+1}|\hat{H}|x_i> = <x_{i+1}|\frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{1}{2m}(\hat{p}f_1(\hat{x})+f_1(\hat{x})\hat{p})+V(\hat{x})|x_i>$$

$$=\int\frac{e^{\frac{i}{\hbar}p_i(x_{i+1}-x_i)}}{h}\mathrm{d}p_i\left(\frac{p_1^2}{2m}+\frac{1}{2m}[p_if_1(x_i)+f_i(x_{i+1})p_i]+V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right)\tag{1.30}$$

和以前一样，最后一项是从$\delta(x_{i+1}-x_i)V(x_i)$得来的。

把(1.17)，(1.30)代入(1.16)得到

$$_H<x_{i+1}t_{i+1}|x_it_i>_H$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}p_i}{h}e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[p_i\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}-\frac{p_i^2}{2m}-\frac{1}{2m}(p_if_1(x_i)+f_1(x_{i+1})p_i)-V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]}+O(\varepsilon^2)$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}p_i}{h}e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[-\frac{1}{2m}\left(p_i-m\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}+\frac{f_1(x_{i+1})+f_1(x_i)}{2}\right)^2\right]}$$

$$\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[\frac{1}{2m}\left(m\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}-\frac{f_1(x_{i+1})+f_1(x_i)}{2}\right)^2-V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]}+O(\varepsilon^2)=\sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}}$$

$$\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}(f_1(x_{i+1})+f_1(x_i))+\frac{1}{2m}\left(\frac{f_1(x_{i+1})+f_1(x_i)}{2}\right)^2-V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]}+O(\varepsilon^2)\tag{1.31}$$

再考察(1.31)。在代入(1.14)作积分时，只在$|x_{i+1}-x_i|\sim\sqrt{\frac{\hbar}{m}}\varepsilon^{1/2}$邻近区域有贡献，出了这个区域就振荡极快，正负抵消，结果贡献为零。所以可以认为$|x_{i+1}-x_i|=O(\varepsilon^{1/2})$：

$$f_1(x_{i+1})=f_1\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)+\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\frac{\mathrm{d}f_1(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=\frac{x_{i+1}+x_i}{2}}+O(\varepsilon)$$

$$f_1(x_i)=f_1\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)-\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\frac{\mathrm{d}f_1(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=\frac{x_{i+1}+x_i}{2}}+O(\varepsilon)$$

$$\therefore\qquad f_1(x_{i+1})+f_1(x_i)=2f_1\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)+O(\varepsilon)$$

(1.31)就可写成(参照(1.28))：

$$_H<x_{i+1}t_{i+1}|x_it_i>_H=\sqrt{\frac{m}{i\varepsilon\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}+O(\varepsilon^2)\tag{1.32}$$

当$n\to\infty$，$\varepsilon\to0$，把(1.31)代入(1.14)(参照(1.26))，得到

$$_H<x''t''|x't'>_H$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{x'}^{x''} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}x_i \right) \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\mathrm{d}p_i}{\hbar} \right) e^{i \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{\hbar} \left[p_i \frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} - \frac{1}{2}(H(p_i,x_{i+1}) + H(p_i,x_i)) \right]} ①$$

$$= 常数 \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}(x)\mathrm{d}(p) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}t [p\dot{x} - H(p,x)]} \tag{1.33}$$

这里 $\hat{H}$ 是按上述厄米顺序排列的。我们还利用 $\delta(x_{i+1}-x_i)V(x_i) = \delta(x_{i+1}-x_i)\frac{1}{2}[V(x_{i+1}) + V(x_i)]$，把(1.31)中的 $V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$ 换成了 $\frac{1}{2}[V(x_{i+1}) + V(x_i)]$。

又可把(1.32)代入(1.14)，得到

$${}_H\langle x''t'' | x't' \rangle_H$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{x'}^{x''} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}x_i \sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}} \right) e^{i \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)} \sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}}$$

$$= 常数 \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}(x) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}t L(\dot{x},x)} \tag{1.34}$$

形式上和(1.25)一样，也和前面朴素的考虑得到的(1.5)式一致。

现在要作三点说明：

1. 在 p 和 x 有交叉项时，排列顺序问题是不能忽视的。为了与(1.32)比较，我们把(1.29)改成如下的排列顺序：

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{m}f_1(\hat{x})\hat{p} + V(\hat{x}) \tag{1.35}$$

于是

$$\langle x_{i+1} | \hat{H} | x_i \rangle = \langle x_{i+1} \left| \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{m}f_1(\hat{x})\hat{p} + V(\hat{x}) \right| x_i \rangle$$

$$= \int \frac{e^{\frac{i}{\hbar}p_i(x_{i+1}-x_i)}}{\hbar} \mathrm{d}p_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{m}f_1(x_{i+1})p_i + V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) \right) \tag{1.36}$$

把(1.36)，(1.17)代入(1.16)，得到：

$${}_H\langle x_{i+1}t_{i+1} | x_i t_i \rangle_H$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}p_i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[p_i \frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} - \frac{p_i^2}{2m} - \frac{1}{m}f_1(x_{i+1})p_i - V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) \right]} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}p_i}{h} e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[-\frac{1}{2m}\left(p_i - m\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} + f_1(x_{i+1})\right)^2 \right]} \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[\frac{1}{2m}\left(m\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} - f_1(x_{i+1})\right)^2 - V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) \right]} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}} e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} + f_1(x_{i+1}) + \frac{1}{2m}f_1^2(x_i+1) - V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) \right]} + O(\varepsilon^2) \tag{1.37}$$

(1.37)与(1.31)相对应。利用 $\delta(x_{i+1}-x_i)V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right) = \delta(x_{i+1}-x_i)V(x_{i+1})$，把(1.37)中的 $V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$ 换成 $V(x_{i+1})$。则(1.37)写成：

$${}_H\langle x_{i+1}t_{i+1} | x_i t_i \rangle_H = \sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}} e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}, x_{i+1}\right)} + O(\varepsilon^2) \tag{1.38}$$

---

① 这里在 $\varepsilon \to 0$ 时 $1/2[H(p_i,x_{i+1}) + H(p_i,x_i)] \to H\left(p_i, \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$。

(1.38)与(1.32)相对应。再代入(1.14)得到

$$
{}_H\langle x''t''|x't'\rangle_H
$$

$$
= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{x'}^{x''} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}x_i \sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}} \right) e^{i\sum_{i=0}^{n=0} \frac{\varepsilon}{\hbar} L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}, x_{i+1}\right)} \sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}} \tag{1.39}
$$

(1.39)与(1.34)相对应。

现在就来考察(1.39)与(1.34)积分后的差别:

(1.34):先积 dx_1:

$$
\int \mathrm{d}x_1 e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{\varepsilon} - (x_2-x_1) f_1\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2m} f_1^2\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right) - \varepsilon V\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)\right]}
$$

$$
= \int \mathrm{d}\xi \exp \frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{\xi^2}{\varepsilon} - \xi\left(f_1(x_2) - \frac{\xi}{2}\frac{\mathrm{d}f_1(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_2}\right) - \varepsilon\left(f_0(x_2) - \frac{\xi}{2}\frac{\mathrm{d}f_0(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_2}\right)\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{l} \text{这里利用了} f(a) = f(b) + (a-b)\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=b}, \text{还取了} \\ \xi = x_2 - x_1, f_0(x) = -\dfrac{1}{2m} f_1^2(x) + V(x)。\end{array}\right.
$$

$$
= \int \mathrm{d}\xi \exp \frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right)\xi^2 - \xi\left(f_1(x_2) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}f_0(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right) - \varepsilon f_0(x_2)\right]
$$

$$
= \int \mathrm{d}\xi \exp \frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right)\left(\xi - \frac{f_1(x_2) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}f_0(x_2)}{\mathrm{d}x_2}}{\frac{m}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right)}\right)^2 \right.
$$

$$
\left. - \frac{m}{2}\frac{1}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right)\frac{\varepsilon^2}{m^2}\left(\frac{f_1(x_2) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}f_0(x_2)}{\mathrm{d}x_2}}{1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}}\right)^2 - \varepsilon f_0(x_2)\right]
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{m\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right)}{2\hbar\varepsilon}}} \sqrt{i\pi} \exp \frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\varepsilon}{2m} f_1^2(x_2) - \varepsilon f_0(x_2)\right] + O(\varepsilon^2)
$$

(exp 中取到 ε 一次)

$$
= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{m}{i\hbar\varepsilon}}} \exp \frac{i}{\hbar}\varepsilon\left\{-\frac{1}{2m} f_1^2(x_2) - f_0(x_2) + \frac{i\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right\} + O(\varepsilon^2)
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{m}{i\hbar\varepsilon}}} \exp\left(-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\right)\left\{V(x_2) - \frac{i\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right\} + O(\varepsilon^2) \tag{1.40}
$$

再积 $\mathrm{d}x_2$

$$
\int \mathrm{d}x_2 e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(x_3-x_2)^2}{\varepsilon} - (x_3-x_2) f_1\left(\frac{x_3+x_2}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2m} f_1^2\left(\frac{x_3+x_2}{2}\right) - \varepsilon V\left(\frac{x_3+x_2}{2}\right) - \varepsilon V(x_2) + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\right]} + O(\varepsilon^2)
$$

$$
= \int \mathrm{d}\xi \exp \frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{\xi^2}{\varepsilon} - \xi\left(f_1(x_3) - \frac{\xi}{2}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right)\right.
$$

$$- \varepsilon\left(f_0(x_3) - \frac{\xi}{2}\frac{\mathrm{d}f_0(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right) - \varepsilon V(x_2) + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_2)}{\mathrm{d}x_2}\Big] + O(\varepsilon^2)$$

$$= \int \mathrm{d}\xi \exp\frac{i}{\hbar}\Big[\frac{m}{2\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_2(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right)\xi^2 - \xi\left(f_1(x_3) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}f_0(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right) - \varepsilon f_0(x_3) - \varepsilon V(x_3)$$

$$+ \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3} + \varepsilon\frac{\mathrm{d}V(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\xi - \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3^2}\xi\Big] + O(\varepsilon^2)$$

$$= \int \mathrm{d}\xi \exp\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right)\left(\xi - \frac{f_1(x_3) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}f_0(x_3)}{\mathrm{d}x_3} - \varepsilon\frac{\mathrm{d}V(x_3)}{\mathrm{d}x_3} + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3^2}\xi}{\frac{m}{\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right)}\right)^2\right.$$

$$- \frac{m}{2\varepsilon}\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right)\frac{\varepsilon^2}{m^2}\left(\frac{f_1(x_3) - \frac{\varepsilon}{2}\frac{\mathrm{d}f_0(x_3)}{\mathrm{d}x_3} - \varepsilon\frac{\mathrm{d}V(x_3)}{\mathrm{d}x_3} + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2 f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3^2}\xi}{1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}}\right)^2$$

$$\left. - \varepsilon f_0(x_3) - \varepsilon V(x_3) + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{m\left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right)}{2\hbar\varepsilon}}}\sqrt{i\pi}\exp\frac{i}{\hbar}\Big[-\frac{\varepsilon}{2m}f_1^2(x_3) - \varepsilon f_0(x_3) - \varepsilon V(x_3) + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\Big]$$

$$+ O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{m}{i\hbar\varepsilon}}}\exp\frac{i}{\hbar}\Big[-\varepsilon V(x_3) - \varepsilon V(x_3) + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3} + \frac{i\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}f_1(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\Big] + O(\varepsilon^2) \qquad (1.41)$$

可见$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}$项是逐次积累的，不会自动消去。

(1.39)：先积 $\mathrm{d}x_1$

$$\int \mathrm{d}x_1 e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{\varepsilon} - (x_2-x_1)f_1(x_2) + \frac{\varepsilon}{2m}f_1^2(x_2) - \varepsilon V(x_2)\right]}$$

$$= \int \mathrm{d}\xi \exp\frac{i}{\hbar}\Big[\frac{m}{2}\frac{\xi^2}{\varepsilon} - \xi f_1(x_2) + \frac{\varepsilon}{2m}f_1^2(x_2) - \varepsilon V(x_2)\Big]$$

$$= \int \mathrm{d}\xi \exp\frac{i}{\hbar}\Big[\frac{m}{2\varepsilon}\left(\xi - \frac{\varepsilon}{m}f_1(x_2)\right)^2 - \frac{m}{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{m^2}f_1^2(x_2) + \frac{\varepsilon}{2m}f_1^2(x_2) - \varepsilon V(x_2)\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{m}{i\hbar\varepsilon}}}\exp\frac{-i\varepsilon}{\hbar}V(x_2) \qquad (1.42)$$

再积 $\mathrm{d}x_2$

$$\int \mathrm{d}x_2 e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{(x_3-x_2)^2}{\varepsilon} - (x_3-x_2)f_1(x_3) - \varepsilon f_0(x_3) - \varepsilon V(x_2)\right]} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \int \mathrm{d}\xi e^{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2}\frac{\xi^2}{\varepsilon} - \xi f_1(x_3) - \varepsilon f_0(x_3) - \varepsilon V(x_2)\right]} + O(\varepsilon^2)$$

$$= \int \mathrm{d}\xi \exp \frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}\xi^2 + \xi\left(-f_1(x_3) + \varepsilon \frac{\mathrm{d}V(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right) - \varepsilon f_0(x_3) - \varepsilon V(x_3)\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$= \int \mathrm{d}\xi \exp \frac{i}{\hbar}\left[\frac{m}{2\varepsilon}\left(\xi + \frac{\varepsilon}{m}\left(-f_1(x_3) + \varepsilon \frac{\mathrm{d}V(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right)\right)^2\right.$$

$$\left. - \frac{m}{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{m^2}\left(-f_1(x_3) + \varepsilon \frac{\mathrm{d}V(x_3)}{\mathrm{d}x_3}\right)^2 - \varepsilon f_0(x_3) - \varepsilon V(x_3)\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}}} \exp \frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\varepsilon}{2m} f_1^2(x_3) - \varepsilon f_0(x_3) - \varepsilon V(x_3)\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}}} \exp \frac{i}{\hbar}[-\varepsilon V(x_3) - \varepsilon V(x_3)] + O(\varepsilon^2) \tag{1.43}$$

把(1.43)和(1.41)比较,可见其差别$\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}$项也是逐次累积起来的,不会消去。

从而知道,在 H 中有 p,x 交叉项时,所取的 p,x 的排列顺序如果不同,则整个积分结果也是不同的。

2. 关于 Weyl 顺序。$(x^n p^m)_W$ 代表 $x^n p^m$ 的 Weyl 顺序,它的定义是:把 n 个 x 和 m 个 p 作所有各种顺序的排列,然后取其平均。例如:

$$(x^m p)_W = \frac{1}{m+1}(x^m p + x^{m-1} p x + \cdots + p x^m)$$

$$(x^n p^2)_W = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \sum_{l=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-l} x^{n-l-m} p x^l p x^m \tag{1.44}$$

可以看到,Weyl 顺序是厄米的。

还可以证明(见参考文献[4]),如果 $\hat{H}$ 取 Weyl 顺序,则(1.33)一般地可以写成如下形式:

$$_H\langle x''t'' | x't' \rangle_H$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}p_i}{\hbar}\right) e^{i\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\left(p_i \frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon} - H\left(p_i, \frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right)} \tag{1.45}$$

不过我们以后讨论重正化时,主要只涉及协变规范,并不会遇到场 φ_i 和它的共轭场 π_i 的交叉项,所以此地不多费篇幅讨论这个证明。

3. 如果 p^2 项也是交叉项,例如:

$$H(p,x) = \frac{1}{2} p^2 K^2(x) + V(x) \tag{1.46}$$

则取 Weyl 顺序时有

$$(H(\hat{p},\hat{x}))_W = \frac{1}{8}(\hat{p}^2 K^2(\hat{x}) + 2\hat{p} K^2(\hat{x})\hat{p} + K^2(\hat{x})\hat{p}^2) + V(\hat{x})$$

拿这个 $(H(\hat{p},\hat{x}))_W$ 去求路径积分,则有:

$$_H\langle x''t'' | x't' \rangle_H = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{x'}^{x''} \left(\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{d}x_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}p_i}{\hbar}\right)$$

$$\cdot e^{\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(p_i\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}-\frac{1}{2}p_i^2K^2\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)-V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right)+O(\varepsilon^2)}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{x'}^{x''}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}x_i\right)\left(\prod_{i=0}^{n-1}\frac{dp_i}{\hbar}\right)\cdot\left\{\exp\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[-\frac{1}{2}K^2\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\left(p_i-\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\frac{1}{K^2\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2\frac{1}{K^2\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}-V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]+O(\varepsilon^2)\right\}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{x'}^{x''}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}x_i}{\sqrt{i\hbar\varepsilon}}\frac{1}{K^2\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}$$

$$\left\{\exp\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2\frac{1}{K^2\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}-V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right)+O(\varepsilon^2)\right\}$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{x'}^{x''}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}x_i}{\sqrt{i\hbar\varepsilon}}\right)\left\{\exp\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2\frac{1}{K^2\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-V\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)-\frac{\hbar}{i\varepsilon}\ln K\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]+O(\varepsilon^2)\right\}\frac{1}{\sqrt{i\hbar\varepsilon}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{当}\, n\to\infty,\varepsilon\to 0,\text{则}\sum\varepsilon\to\int\mathrm{d}t,\ \frac{1}{\varepsilon}\delta_{ij}\to\delta(t_i-t_j),\ \frac{1}{\varepsilon}\to\delta(0)。\\ \text{又}\, \dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}=pK^2(x),\ L(\dot{x},x)=\dot{x}p-H(p,x)=\frac{1}{2}\dot{x}^2K^{-2}(x)-V(x)\end{array}\right.$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{x'}^{x''}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mathrm{d}x_i}{\sqrt{i\hbar\varepsilon}}\right)\left\{\exp\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{i\hbar}{\varepsilon}\ln K\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]+O(\varepsilon^2)\right\}\frac{1}{\sqrt{i\hbar\varepsilon}} \tag{1.47}$$

这就说明，在最一般的情况下，$_H\langle x''t''|x't'\rangle_H$ 的路径积分，在 dp_i 积分后，指数上出现的并不只是 $L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$，还有 $\frac{i\hbar}{\varepsilon}\ln K\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$ 项。但我们后面主要只讨论协变规范，它导致 $K=$ 常数，所以(1.34)可用。

以下我们就以(1.25)，(1.34)作为讨论的出发点。为了转入量子场论的讨论，可把(1.25)，(1.34)推广到 $r+1$ 维的情况如下：

$$_H\langle q''_1,\cdots,q''_r,t''|q'_1,\cdots,q'_r,t'\rangle_H$$

$$= \text{常数}\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{q'}^{q''}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}q_1^i\mathrm{d}q_2^i\cdots\mathrm{d}q_r^i\right)e^{\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i\varepsilon}{\hbar}L(\dot{q}i,1\cdots\dot{q}i,r;\bar{q}i,1\cdots\bar{q}i,r)}$$

$$\left(\dot{q}i,1=\frac{q_{i+1,1}-q_{i,1}}{\varepsilon},\text{etc};\bar{q}_{i,1}=\frac{q_{i+1,1}+q_{i,1}}{2},\text{etc}\right)$$

$$= \text{常数}\int_{q'}^{q''}\mathrm{d}(q_1)\mathrm{d}(q_2)\cdots\mathrm{d}(q_r)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}tL(\dot{q}_1\cdots\dot{q}_r;q_1\cdots q_r)} \tag{1.48}$$

§1-3 路径积分和量子场论

先从 1+1 维的情况看一看如何从路径积分导出量子力学的对易关系。参照(1.25),可定义一个泛函积分($t''>t_k>t'$)如下:

$$
\begin{aligned}
& {}_H\langle x''t''|F(\hat{x}(t_k))|x't'\rangle_H \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{x'}^{x''}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}x_i\sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}}\right)e^{i\sum\limits_{i=k+1}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}\cdot e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{\varepsilon},\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)}F(x_k)e^{i\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{x_k-x_{k-1}}{\varepsilon},\frac{x_k+x_{k-1}}{2}\right)} \\
&\quad\cdot e^{i\sum\limits_{i=0}^{k-2}\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

(简写 $x_k=x(t_k)$)。这个积分是在整个空间进行的,所以如果换变数(平移)x_k 为 $x_k+\eta_k$,$\mathrm{d}(x_k+\eta_k)=\mathrm{d}x_k$,而 η_k 是任意一个常数,则积分不变。因此有:

$$
\begin{aligned}
0 = &\lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{x'}^{x''}\left(\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}x_i\sqrt{\frac{m}{i\hbar\varepsilon}}\right)\cdot e^{i\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)}\cdot\left\{i\frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)_k\left(\frac{-\eta_k}{\varepsilon}\right)F(x_k)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_k\eta_k\right. \\
&\left.+F(x_k)i\frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)_{k-1}\left(\frac{\eta_k}{\varepsilon}\right)\right\}+O(\eta_k^2)^{①}
\end{aligned}
\tag{1.50}
$$

在(1.50)中,还有两个 η_k 一次项,它们是

$$\sim i\frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_k\frac{\eta_k}{2},\quad \sim i\frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_{k-1}\frac{\eta_k}{2}$$

当 $\varepsilon\to 0$,其贡献 $\to 0$,所以没有写出来。

在(1.50)中,η_k 一次项 $=0$,所以得到

$$
\begin{aligned}
0 = &\lim_{\varepsilon\to 0}{}_H\langle x''t''\left|\frac{-i}{\hbar}\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{x}}\right)_{t_k}F(\hat{x}(t_k))+\frac{i}{\hbar}F(\hat{x}(t_k))\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{x}}\right)_{t_k-\varepsilon}\right. \\
&\left.+\left(\frac{\partial\hat{F}}{\partial x}\right)_{t_k}\right|x't'\rangle_H\to\lim_{\varepsilon\to 0}{}_H\langle x''t''\left|\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{x}}\right)_{t_k}F(\hat{x}(t_k))\right. \\
&\left.-F(\hat{x}(t_k))\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{x}}\right)_{t_k-\varepsilon}\right|x't'\rangle_H=\lim_{\varepsilon\to 0}{}_H\langle x''t''\left|\frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial\hat{F}}{\partial x}\right)_{t_k}\right|x't'\rangle_H
\end{aligned}
\tag{1.51}
$$

注意,现在回到了算符方程,算符应该按时间的顺序排列,t 大的靠左边。

取 $F(\hat{x}(t_k))=\hat{x}(t_k)$,并把 $\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{x}}\right)_{t_k}$ 写成

$$\left(\frac{\partial\hat{L}}{\partial\dot{x}}\right)_{t_k}=\hat{P}(t_k)\tag{1.52}$$

则(1.51)写成:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}{}_H\langle x''t''|\hat{P}(t_k)\hat{x}(t_k)-\hat{x}(t_k)\hat{P}(t_k-\varepsilon)|x't'\rangle_H=\lim_{\varepsilon\to 0}{}_H\langle x''t''\left|\frac{\hbar}{i}\right|x't'\rangle_H$$

因为 x'',x' 是任意取的,所以得到算符关系:

---

① η_k 取微小量,则 $O(\eta_k^2)$ 可以略去。

$$\hat{P}(t_k)\hat{x}(t_k) - \hat{x}(t_k)\hat{P}(t_k) = \frac{\hbar}{i} \tag{1.53}$$

这正好是量子力学的对易关系。另外，关于从路径积分导出量子力学的薛定谔方程等，可参见参考文献〔1〕,〔2〕。

既然从路径积分出发可导出量子力学，就也可以期望从路径积分出发导出量子场论。以下我们就来引入场量的路径积分。

场量的路径积分

与前不同的是，(1.24)中的 x 是坐标，现在则要换成场量 φ(包括 $A,\psi,\varphi_{\text{Higgs}}$等)，(1 24)中的 P 是动量，现在则要换成共轭场 π(包括 $\pi_A,\pi_\psi,\pi_{\text{Higgs}}$等)。在(1.24)中有一个 $x(t)$；在(1.48)中，$q_1(t),\cdots,q_r(t)$共有 r 个；而在场的情况中，空间每一个点 $\mathbf{x}$ 都有一个 $\varphi(\mathbf{x},t)$，所以相当于 $r\to\infty$(无穷维)。为了处理这种情况，我们把空间分成很多小格，每一个小格都用一个指标 α 来标志它。小格的体积为 $\delta V_\alpha=\lambda^3$。在小格 α 中，又可定义一个 $\varphi_\alpha(t)$

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\delta V_\alpha}\int_{\delta V_\alpha} \mathrm{d}^3x\varphi(\mathbf{x},t) \tag{1.54}$$

每一个 $\varphi_\alpha(t)$相当于(1.48)中的一个 $q_l(t)(l=1,2,\cdots,r)$，只是现在 $\alpha=1,2,\cdots,\infty$。

拉氏量可写成

$$L(t) = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\mathbf{x},t) = \sum_\alpha \lambda^3\mathscr{L}_\alpha(t)$$

$$\mathscr{L}_\alpha(t) = \frac{1}{\delta V_\alpha}\int_{\delta V_\alpha} \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\mathbf{x},t) \tag{1.55}$$

哈密顿量可写成

$$H = \int \mathrm{d}^3x\mathscr{H}(\mathbf{x},t) = \sum_\alpha \lambda^3\mathscr{H}_\alpha(t)$$

$$\mathscr{H}_\alpha(t) = \frac{1}{\delta V_\alpha}\int_{\delta V_\alpha} \mathrm{d}^3x\mathscr{H}(\mathbf{x},t) \tag{1.56}$$

与 $\varphi_\alpha(t)$正则共轭的 $P_\alpha(t)$是

$$P_\alpha(t) = \frac{\partial L_\alpha(t)}{\partial\dot{\varphi}(t)}\left(= \lambda^3\frac{\partial\mathscr{L}_\alpha(t)}{\partial\dot{\varphi}_\alpha(t)}\right) = \lambda^3\pi_\alpha(t) \tag{1.57}$$

当 $\lambda\to 0$，就得到

$$\frac{\partial\mathscr{L}(\mathbf{x},t)}{\partial\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)} = \pi(\mathbf{x},t) \tag{1.58}$$

这个 $\pi(\mathbf{x},t)$就叫做 $\varphi(\mathbf{x},t)$的共轭场。

于是，和(1.48)相仿，我们用 $\varphi(t'')$或者 φ''代表 t''时所有的 $\varphi(\mathbf{x}'',t'')$，用 $\varphi(t')$或者 φ'代 t'时所有的 $\varphi(\mathbf{x}',t')$。(1.48)就可推广为①：

$_H\langle\varphi''t''|\varphi't'\rangle_H$

---

① 如果 π 和 φ 没有交叉项，则可沿用前面的证明；对于带静止质量的矢量场，证明见§3-1；对于规范场，见第三章的讨论。

另外，自(1.57)，P_α 换成 $\lambda^3\pi_\alpha$，$\mathrm{d}P_\alpha$ 换成 $\lambda^3 d\pi_\alpha$，λ^3 归入常数因子。

$$
\begin{aligned}
&= 常数\lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{\alpha}\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}\varphi_\alpha(t_i)\prod_{i=0}^{n-1}\mathrm{d}\pi_\alpha(t_i)\cdot e^{i\sum\limits_{\alpha}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\lambda^3(\pi_\alpha(t_i)\dot{\varphi}_\alpha(t_i)-\mathscr{H}_\alpha(t_i))} \\
&= 常数\lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{\alpha}\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}\varphi_\alpha(t_i)e^{i\sum\limits_{\alpha}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\lambda^3\mathscr{L}_\alpha(t_i)} \\
&= 常数\int_{\varphi'}^{\varphi''}\mathrm{d}(\varphi)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\mathscr{L}(\dot{\varphi}(x,t),\varphi(x,t))}\text{①}
\end{aligned}
\tag{1.59}
$$

这里 $\lambda^3\mathscr{L}_\alpha(t_i)=\int_{\delta V_\alpha}\mathscr{L}(\dot{\varphi}(\mathrm{x},t),\varphi(\mathrm{x},t))\mathrm{d}^3x$，见(1.55)，但时间微商 $\dot{\varphi}(\mathrm{x},t_i)$ 换成 $\dfrac{\varphi(\mathrm{x},t_{i+1})-\varphi(\mathrm{x},t_i)}{\varepsilon}$，$\bar{\varphi}(\mathrm{x},t_i)$ 则是 $\bar{\varphi}(\mathrm{x},t_i)=\dfrac{\varphi(\mathrm{x},t_{i+1})-\varphi(\mathrm{x},t_i)}{2}$。同时，由于 $\partial_k\varphi(\mathrm{x},t_i)$ $(k=1,2,3)$ 可写成 $\partial_k\delta(x_k-x_k')dx_k'\varphi(\mathrm{x},t)$，所以空间微商可用双重积分 $dxdx'$ 来表示。而 $\partial_\mu\delta(x_k-x_k')$ 可看作系数。于是 $\partial_k\varphi(\mathrm{x},t_i)$ 可和 $\dot{\varphi}(\mathrm{x},t_i)$ 同样处理，即取

$$
\partial_k\bar{\varphi}(\mathrm{x},t_i)=\partial_k\left(\frac{\varphi(\mathrm{x},t_{i+1})+\varphi(\mathrm{x},t_i)}{2}\right)
$$

讨论

1. (1.59)就是 φ 场的路径积分。由于 $\alpha=1,2,\cdots,\infty$，所以这是一个无穷多维的泛函积分。如果 $\hat{\mathscr{H}}$ 中有 $\hat{\pi}$，$\hat{\varphi}$ 交叉项，则取 $\hat{\mathscr{H}}_w$（Weyl 顺序）后（和(1.45)一样），(1.59)中的 $\mathscr{H}_\alpha(t_i)=\hat{\mathscr{H}}_\alpha\left(\pi_{\alpha,i}\dfrac{\varphi_{\alpha,i+1}+\varphi_{\alpha,i}}{2}\right)$。然而 $\mathrm{d}\pi$ 积分后，一般来说与(1.59)最后结果仍有差别，即指数上除 $\mathscr{L}$ 外还要多出来一些项（见(1.47)的例子）。不过，在以后的讨论中，主要只取协变规范，就可避免这种问题（见第三章）。

2. 正如前面曾指出的，路径积分中用的是经典的 $\mathscr{L}(\varphi,\partial_\mu\varphi)$，从而便于在理论中保持经典场所具有的对称性质，特别是 Lorentz 不变性和规范不变性。

3. (1.59)可以推广到多个 $\hat{\varphi}_l(\mathrm{x},t)$ $(l=1,2,\cdots,r)$。

$$
\begin{aligned}
&{}_H\langle\varphi_1(t''),\cdots,\varphi_r(t''),t''|\varphi_r(t')\cdots,\varphi_r(t'),t'\rangle_H \\
&= 常数\lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{l=1}^{r}\prod_{\alpha}\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}\varphi_{l\alpha}(t_i)\prod_{i=0}^{n-1}\mathrm{d}\pi_1\alpha(t_i) \\
&\qquad\qquad\cdot e^{i\sum\limits_{\alpha}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\lambda^3(\pi_{l\alpha}(t_i))\dot{\varphi}_{l\alpha}(t_i)-\mathscr{H}_\alpha(t_i))} \\
&= 常数\lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{l=1}^{r}\prod_{\alpha}\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}\varphi_{lk}(t_i)e^{i\sum\limits_{\alpha}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\lambda^3\mathscr{H}_\alpha(t_i)} \\
&= 常数\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{l=1}^{r}\mathrm{d}(\varphi_1(\mathrm{x},t))e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3x\mathscr{L}(x)}
\end{aligned}
\tag{1.60}
$$

前面"讨论 1"关于 $\mathrm{d}\pi$ 积分后指数上是否正好是 $\mathscr{L}$ 的讨论，以及"讨论 2"关于保持对称性的讨论，此地都适用。此地有

$$
\lambda^3\mathscr{L}_\alpha(t_i)=\int_{\delta V_\alpha}\mathscr{L}(\dot{\varphi}_1(\mathrm{x},t_i)),\cdots,\dot{\varphi}_r(\mathrm{x},t_i);\bar{\varphi}_1(\mathrm{x},t_i),\cdots,\bar{\varphi}_r(\mathrm{x},t_i)
$$

---

① 与(1.5)类似，$\mathrm{d}(\varphi)$ 表明是对所有时间 t，所有位置 x 的 $\varphi(\mathrm{x},t)$ 作 $\mathrm{d}\varphi(\mathrm{x},t)$ 积分（无穷维积分）。以后类似情况不再说明。

前面关于 $\dot{\varphi},\bar{\varphi}$ 的说明，以及关于 $\partial_\mu\varphi$ 换成 $\partial_\mu\bar{\varphi}$ 的讨论，这里也都适用。

4. 可给出 $\hat{\varphi}_m(\mathrm{x}_\alpha,t^i)$ 的矩阵元。取 t^i，令

$$t''>t^i>t'$$

则有（以下简写，φ 代表所有的 φ_l）：

$$
\begin{aligned}
&{}_H\langle\varphi''t''|\hat{\varphi}_m(\mathrm{x}_\alpha,t^i)|\varphi't'\rangle_H\\
&=\lim_{n\to\infty}\int {}_H\langle\varphi'',t''|\varphi^{n-1},t^{n-1}\rangle_H\prod_{\alpha=1}^r d(\varphi_\alpha^{n-1})\,{}_H\langle\varphi^{n-1},t^{n-1}|\varphi^{n-2},t^{n-2}\rangle_H\\
&\quad\cdot\prod_{\beta=1}^r d(\varphi_\beta^{n-2})\,{}_H\langle\varphi^{n-2},t^{n-2}|\varphi^{n-3},t^{n-3}\rangle_H,\cdots,\\
&\quad\cdots\prod_{\alpha=1}^r d(\varphi_\alpha^i)\,{}_H\langle\varphi^i,t^i|\hat{\varphi}_m(\mathrm{x}_\alpha,t^i)|\varphi^{i-1},t^{i-1}\rangle_H\prod_{\delta=1}^r d(\varphi_\delta^{i-1}),\cdots,\\
&\quad\cdots\prod_{\zeta=1}^r d(\varphi_\zeta^1)\,{}_H\langle\varphi^1,t^1|\varphi't'\rangle_H\\
&=\lim_{n\to\infty}\int {}_H\langle\varphi'',t''|\varphi^{n-1},t^{n-1}\rangle_H\prod_{\alpha-1}^r d(\varphi_\alpha^{n-1})\,{}_H\langle\varphi^{n-1},t^{n-1}|\varphi^{n-2},t^{n-2}\rangle_H\\
&\quad\cdot\prod_{\beta=1}^r d(\varphi_\beta^{n-2})\,{}_H\langle\varphi^{n-2},t^{n-2}|\varphi^{n-3}t^{n-3}\rangle_H,\cdots,\\
&\quad\cdots\prod_{\gamma=1}^r d(\varphi_\gamma^i)\varphi_m(\mathrm{x}_\alpha,t^i)\,{}_H\langle\varphi^i,t^i|\varphi^{i-1},t^{i-1}\rangle_H\prod_{\delta=1}^r d(\varphi_\delta^{i-1}),\cdots,\\
&\quad\cdots\prod_{\zeta=1}^r d(\varphi_\zeta^1)\,{}_H\langle\varphi^1,t^1|\varphi't'\rangle_H\\
&=\text{常数}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{l=1}^r d(\varphi_l(\mathrm{x},t))\varphi_m(\mathrm{x}_\alpha,t^i)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}dt\int d^3x\mathscr{L}(x)}
\end{aligned}
\tag{1.61}
$$

m 包括在 $l=1,2,\cdots,r$ 之中。$d(\varphi_\alpha^i)=d(\varphi_\alpha(\mathrm{x},t^i))$，其中 x 包括空间的每一个点，也包括 x_α 点。$d(\varphi_\gamma^i)$ 是对 t^i 时间的空间中每一个点 x 的 $\varphi_\gamma(\mathrm{x},t^i)$ 场量积分，也包括对 $\varphi_m(\mathrm{x}_\alpha,t^i)$ 作积分。但 x_α 是取定的一个点，对 x_α 并不积分！从而这个泛函积分必定是 x_α 的函数①！

5. 编时乘积的矩阵元也可写成路径积分，例如，取

$$t''>t^i>t^j>t'$$

则有

$$
\begin{aligned}
&{}_H\langle\varphi'';t''|\hat{\varphi}_l(\mathrm{x}_a,t^i)\hat{\varphi}_m(\mathrm{x}_b,t^j)|\varphi',t'\rangle_H\\
&=\lim_{n\to\infty}\int {}_H\langle\varphi'',t''|\varphi^{n-1},t^{n-1}\rangle_H\prod_{\alpha=1}^r d(\varphi_\alpha^{n-1})\,{}_H\langle\varphi^{n-1},t^{n-1}|\varphi^{n-2},t^{n-2}\rangle_H\\
&\quad\cdot\prod_{\beta=1}^r d(\varphi_\beta^{n-2})\cdots\prod_{r=1}^r d(\varphi_\gamma^i)\,{}_H\langle\varphi^it^i)|\hat{\varphi}_l(\mathrm{x}_a,t^i)|\varphi^{i-1}t^{i-1}\rangle_H\prod_{\delta=1}^r d(\varphi_\delta^{i-1}),\cdots\\
&\quad\cdots\prod_{\zeta=1}^r d(\varphi_\zeta^j)\,{}_H\langle\varphi^j,t^j|\hat{\varphi}_m(\mathrm{x}_b,t^j)|\varphi^{j-1},t^{j-1}\rangle_H\prod_{\eta=1}^r d(\varphi_\eta^{j-1}),\cdots\\
&\quad\cdots\prod_{\kappa=1}^\gamma d(\varphi_\kappa^1)\,{}_H\langle\varphi^1,t^1|\varphi't'\rangle_H\\
&=\lim_{n\to\infty}\int {}_H\langle\varphi'',t''|\varphi^{n-1},t^{n-1}\rangle_H\prod_{\alpha=1}^r d(\varphi_\alpha^{n-1})\,{}_H\langle\varphi^{n-1},t^{n-1}|\varphi^{n-2},t^{n-2}\rangle_H\cdot\prod_{\beta=1}^r d(\varphi_\beta^{n-2})
\end{aligned}
$$

---

① 注意(1.61)的导出和(1.25)，(1.34)的导出没有什么不同，只是多了一个并不引起什么麻烦的因子 $\varphi_m(x_\alpha,t^i)$ 而已。

$$\cdots\prod_{\gamma=1}^{r}\mathrm{d}(\varphi_\gamma^i)\varphi_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)_H<\varphi^i,t^i|\varphi^{i-1},t^{i-1}>_H\prod_{\delta=1}^{r}\mathrm{d}(\varphi_\delta^{i-1}),\cdots$$

$$\cdots\prod_{\zeta=1}^{r}\mathrm{d}(\varphi_\zeta^j)\varphi_m(\mathbf{x}_b,t^j)_H<\varphi^j,t^j|\varphi^{j-1},t^{j-1}>_H\prod_{\eta=1}^{r}\mathrm{d}(\varphi_\eta^{j-1}),\cdots$$

$$\cdots\prod_{\kappa=1}^{r}\mathrm{d}(\varphi_\kappa^1)_H<\varphi^1t^1|\varphi't'>_H$$

$$=\text{常数}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{k=1}^{\gamma}\mathrm{d}(\varphi_k(\mathbf{x},t))\cdot\varphi_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)\varphi_m(\mathbf{x}_b,t^j)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(x)} \tag{1.62}$$

若

$$t''>t^j>t^i>t'$$

则相仿有：

$$_H<\varphi'',t''|\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_b,t^j)\hat{\varphi}_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)|\varphi',t'>_H$$

$$=\text{常数}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{k=1}^{r}\mathrm{d}(\varphi_l(\mathbf{x},t))\cdot\varphi_m(\mathbf{x}_b,t^j)\varphi_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(x)} \tag{1.63}$$

(1.62)和(1.63)的导出，也和(1.25)，(1.34)的导出没有什么不同，因为 $\hat{\varphi}_m$ 和 $\hat{\varphi}_l$ 是按时间顺序排列的，否则右方就应多出 $\hat{\varphi}_m$ 和 $\hat{\varphi}_l$ 对易或反对易的项。

要注意一点，积分里的 $\varphi,\partial_\mu\varphi$ 不是算符，它们在 Bose 场的情况是普通可对易 c – 数，但在 Fermi 场的情况则是反对易的 c – 数（见下一章的关于 Fermi 场路径积分的讨论）。因此：

$$_H<\varphi'',t''|T\hat{\varphi}_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_b,t^j)|\varphi't'>_H$$

$$=\begin{cases}_H<\varphi'',t''|\hat{\varphi}_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j)|\varphi't'>_H & (t^i>t^j)\\ \pm\,_H<\varphi'',t''|\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_b,t^j)\hat{\varphi}_l(\mathbf{x}_b,t^i)|\varphi't'>_H & (t^i>t^j)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int\cdots\varphi_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)\varphi_m(\mathbf{x}_b,t^j)\cdots(t^i<t^j)\\ \pm\int\cdots\varphi_m(\mathbf{x}_l,t^j)\varphi_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)\cdots(t^i>t^j)\end{cases}$$

$$=\text{常数}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\prod_{k=1}^{r}\mathrm{d}(\varphi_k(\mathbf{x},t))\cdot\varphi_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)\cdot\varphi_m(\mathbf{x}_b,t^j)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3x\mathscr{L}(x)} \tag{1.64}$$

从而看到，(1.64)路径积分所表示的是一个编时乘积矩阵元。容易看出，这一点可以推广到任意个算符的编时乘积。

另外，和前一节一样，应注意这里对 $\varphi_l(\mathbf{x}_\alpha,t^i)$ 和 $\varphi_m(\mathbf{x}_b,t^j)$ 两个场量是作积分的，但 $\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_b$ 是取定的两个点，对 $\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_b$ 并不积分，从而这个泛函积分必定是 $\mathbf{x}_\alpha,\mathbf{x}_b$ 的函数。

量子场的对易关系

现在我们就要从场的路径积分导出量子化场的对易关系。为此，先说明一下泛函微商。仍把空间分成很多小格子，α 是小格子的标志。小格子 α 的体积是 $\delta V_\alpha=\lambda^3$。在每一个小格子里，可以定义

$$\varphi_\alpha(t)=\frac{1}{\delta V_\alpha}\int_{\delta V_\alpha}\varphi(\mathbf{x},t)\mathrm{d}^3x$$

$$\dot{\varphi}_\alpha(t)=\frac{1}{\delta V_\alpha}\int_{\delta V_\alpha}\dot{\varphi}(\mathbf{x},t)\mathrm{d}^3x \tag{1.65}$$

而 $L(t)$ 则是所有这些 $\varphi_\alpha(t),\dot{\varphi}_\alpha(t)$ 的函数：

$$L(t) = L(\varphi_\alpha(t), \dot{\varphi}_\alpha(t)) \tag{1.66}$$

当 $\delta V_\alpha \to 0$，则（$\mathbf{x}_\alpha$ 是 δV_α 中的一个点）：

$$\lim_{\delta V_\alpha \to 0} \varphi_\alpha(t) \to \varphi(\mathbf{x}_\alpha, t)$$

$$\lim_{\delta V_\alpha \to 0} \dot{\varphi}_\alpha(t) \to \dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha, t) \tag{1.67}$$

而且有 $\lim\limits_{\delta V_\alpha \to 0} L(t) = \int d^3x \mathscr{L}(\varphi(x,t), \dot{\varphi}(\mathbf{x},t))$ (1.68)

在 $\lim\limits_{\delta V_\alpha \to 0}$ 时，$L(t)$ 由很多变数 $\varphi_\alpha(t)$，$\dot{\varphi}_\alpha(t)$ 的函数(1.66)，转化为 $\varphi(\mathbf{x},t)$，$\varphi(\mathbf{x},t)$ 的泛函，写成

$$L[\varphi(\mathbf{x},t), \dot{\varphi}(\mathbf{x},t)] = L[\varphi, \dot{\varphi}] = \lim_{\delta V_\alpha \to 0} L(t) \tag{1.69}$$

就是说，L 的值依赖于每一个 $\mathbf{x}$ 点的 φ 值和 $\dot{\varphi}$ 值。符号[　]表示泛函。

泛函微商 $\dfrac{\delta L[\varphi,\dot{\varphi}]}{\delta\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)}$ 和 $\dfrac{\delta L[\varphi,\dot{\varphi}]}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t)}$ 可由

$$\delta L[\varphi,\dot{\varphi}] = \int\left(\frac{\delta L[\varphi,\dot{\varphi}]}{\delta\varphi(\mathbf{x}',t)}\delta\varphi(\mathbf{x}',t) + \frac{\delta L[\varphi,\dot{\varphi}]}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}',t)}\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}',t)\right)d^3x' \tag{1.70}$$

来定义。然而自(1.66) $L(t)$ 的定义：

$$\begin{aligned}\delta L(t) &= \sum_\alpha \frac{\partial L(t)}{\partial\varphi_\alpha(t)}\delta\varphi_\alpha(t) + \sum_\alpha \frac{\partial L(t)}{\partial\dot{\varphi}_\alpha(t)}\delta\dot{\varphi}_\alpha(t) \\ &= \sum_\alpha\left(\frac{1}{\delta V_\alpha}\frac{\partial L(t)}{\partial\varphi_\alpha(t)}\delta\varphi_\alpha(t) + \frac{1}{\delta V_\alpha}\frac{\partial L(t)}{\partial\dot{\varphi}_\alpha(t)}\delta\dot{\varphi}_\alpha(t)\right)\delta V_\alpha\end{aligned} \tag{1.71}$$

取 $\delta V_\alpha \to 0$ 极限，考虑到(1.67)，(1.68)和(1.65)，以及

$$\lim_{\delta V_\alpha \to 0} \delta\varphi_\alpha(t) \to \delta\varphi(\mathbf{x}_\alpha, t)$$

$$\lim_{\delta V_\alpha \to 0} \delta\dot{\varphi}_\alpha(t) \to \delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha, t)$$

(1.71)写成（当 $\delta V_\alpha \to 0$）：

$$\begin{aligned}\delta L[\varphi,\dot{\varphi}] &= \lim_{\delta V_\alpha \to 0}\sum_\alpha \delta V_\alpha\left(\frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t),\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t))}{\partial\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)}\delta\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t),\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t))}{\partial\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t)}\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t)\right) \\ &= \int\left(\frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t),\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t))}{\partial\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)}\delta\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t),\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t))}{\partial\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t)}\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t)\right)d^3x\end{aligned} \tag{1.72}$$

与(1.70)对比，因 $\delta\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)$，$\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t)$ 是任意的，所以有：

$$\frac{\delta L[\varphi,\dot{\varphi}]}{\delta\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)} = \frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t),\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t))}{\partial\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)}$$

$$\frac{\delta L[\varphi,\dot{\varphi}]}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t)} = \frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t),\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t))}{\partial\dot{\varphi}(\mathbf{x}_\alpha,t)} \tag{1.73}$$

其实，$L[\varphi,\dot{\varphi}]$ 中还有含 $\partial_k\varphi(k=1,2,3)$ 的部分。具体来说，$L[\varphi,\dot{\varphi}]$ 关于 $\partial_k\varphi(k=1,2,3)$ 的变分以

$$\int \mathrm{d}^3x A(x)\delta(\partial_k\varphi(x))$$

$$= \int d^3x A(x) \partial_k \delta(x - x') d^3x' \delta\varphi(x')$$

$$= - \int d^3x' A(x') (\partial_k \delta(x' - x)) d^3x \delta\varphi(x)$$

$$= - \int (\partial_k A(x)) d^3x \delta\varphi(x)$$

的形式出现，所以对 $\varphi(x)$ 微商后，得到 $-\partial_k A(x)$。这就是说，如果把 $\mathscr{L}$ 写成 $\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x},t), \partial_k\varphi(\mathbf{x},t), \dot{\varphi}(\mathbf{x},t))$，则$(1.73)_1$ 第一式就应改写成

$$\frac{\delta L[\varphi,\dot{\varphi}]}{\delta\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)} = \left(\frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x},t), \partial k\varphi(\mathbf{x},t), \dot{\varphi}(\mathbf{x},t))}{\partial\varphi(\mathbf{x},t)} - \partial_k \frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x},t), \partial_k\varphi(\mathbf{x},t), \dot{\varphi}(\mathbf{x},t))}{\partial(\partial_k\varphi(\mathbf{x},t))}\right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_\alpha} \tag{1.73_2}$$

这里把 φ 和 $\partial_k\varphi$ 看做是互相独立的，而(1.73)的 $\partial\varphi(\mathbf{x},t)$ 微商项包括$(1.73)_2$ 右方的两项。

与(1.68)类比有：

$$\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t) = \int d^3x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)\varphi(\mathbf{x},t)$$

再与(1.73)类比，就得到如下泛函微商：

$$\frac{\delta\varphi(\mathbf{x}_\alpha,t)}{\delta\varphi(\mathbf{x},t)} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \tag{1.74}$$

取得了上述泛函微商的知识以后，就可以从路径积分得到场的对易关系。

相仿于(1.49)，先利用(1.61)的办法定义如下泛函：

$$\begin{aligned}
&{}_H\langle \varphi'', t'' | F(\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_\alpha, t^j)) | \varphi', t' \rangle_H \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \left(\prod_{k=1}^{r}\prod_{i=0}^{n-1} d(\varphi_k(\mathbf{x},t^i))\right) \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=j+1}^{n-1}\varepsilon L\left(\frac{\varphi^{i+1}+\varphi^i}{2}, \frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\varepsilon}\right)} \\
&\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L\left(\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2}, \frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\varepsilon}\right)} F(\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha, t^j)) e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon L\left(\frac{\varphi^j\varphi^{j-1}}{2}, \frac{\varphi^j-\varphi^{j-1}}{\varepsilon}\right)} \\
&\cdot e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{i=0}^{j-2}\varepsilon L\left(\frac{\varphi^{i+1}+\varphi^i}{2}, \frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\varepsilon}\right)}
\end{aligned} \tag{1.75}$$

此地 φ^j 是 $\varphi(\mathbf{x},t^j)$ 的简写，$F(\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j))$ 来自

$$\begin{aligned}
&{}_H\langle \varphi^{j+1}, t^{j+1} | F(\hat{\varphi}_m) | \varphi^j, t^j \rangle_H \\
&= F(\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha, t))\, {}_H\langle \varphi^{j+1}, t^{j+1} | \varphi^j, t^j \rangle_H
\end{aligned} \tag{1.76}$$

换变数 $\varphi_n(\mathbf{x},t^j)$ 为 $\varphi_n(\mathbf{x},t^j) + \delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)$（$\varphi$ 平移），φ 积分不因 φ 平移而变，所以有$\left(\text{此地 } L^j = L\left(\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2}, \frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\varepsilon}\right)\right)$：

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\substack{n\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\varphi'}^{\varphi''} \left(\prod_{k=1}^{r}\prod_{i=0}^{n-1} d(\varphi_k(\mathbf{x},t^i))\right) \\
&\cdot \left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(\int \frac{\delta L^j}{\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)}\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j) d^3x\right) \cdot F(\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j))\right. \\
&+ \int \frac{\delta F(\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j))}{\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)}\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j) d^3x
\end{aligned} \tag{1.66}$$

$$+ F(\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j))\ \frac{i}{\hbar}\varepsilon\left(\frac{\delta L^{j-1}}{\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)}\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)\,\mathrm{d}^3x\right)\Big\}$$

$$\cdot\, e^{i\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{\varphi^{i+1}+\varphi^i}{2},\frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\varepsilon}\right)} \tag{1.77}$$

这里的顺序是按照各个时间的矩阵元的顺序，而 $F(\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j))$ 则来自(1.76)的矩阵元。

根据(1.73) 和 $L^j = L\left(\frac{\varphi^{j+1}+\varphi^j}{2},\frac{\varphi^{j+1}-\varphi^j}{\varepsilon}\right)$：

$$\frac{\delta L^j}{\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)} = \frac{\partial\mathscr{L}(\bar{\varphi}(\mathbf{x},t^j),\dot{\varphi}(\mathbf{x},t^j))}{\partial\varphi_n(\mathbf{x},t^j)} = \frac{\partial\mathscr{L}^j}{\partial\dot{\varphi}_n(\mathbf{x},t^j)}\frac{\partial\dot{\varphi}_n(\mathbf{x},t^j)}{\partial\varphi_n(\mathbf{x},t^j)} + \cdots = \frac{\partial\mathscr{L}^j}{\partial\dot{\varphi}_n(\mathbf{x},t^j)}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) + \cdots$$

$$\frac{\delta L^{j-1}}{\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)} = \frac{\partial\mathscr{L}(\bar{\varphi}(\mathbf{x},t^{j-1}),\dot{\varphi}(\mathbf{x},t^{j-1}))}{\partial\varphi_n(\mathbf{x},t^j)} = \frac{\partial\mathscr{L}^{j-1}}{\partial\dot{\varphi}_n(\mathbf{x},t^{j-1})}\frac{\partial\dot{\varphi}_n(\mathbf{x},t^{j-1})}{\partial\varphi_n(\mathbf{x},t^j)} + \cdots = \frac{\partial\mathscr{L}^{j-1}}{\partial\dot{\varphi}_n(\mathbf{x},t^{j-1})}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \cdots \tag{1.78}$$

其中 $\bar{\varphi}$ 的定义是

$$\bar{\varphi}(\mathbf{x},t^i) = \frac{\varphi(\mathbf{x},t_{i+1}) + \varphi(\mathbf{x},t_i)}{2}$$

$\dot{\varphi}$ 的定义是

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x},t^i) = \frac{\varphi(\mathbf{x},t_{i+1}) - \varphi(\mathbf{x},t_i)}{\varepsilon}$$

$+\cdots$代表$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\varphi}}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\varphi_n}$项，这个项在乘上 ε 取$\lim\limits_{\varepsilon\to0}$后为零(和(1.50)的情况一样)，不必写出来。

$$取\ F(\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j)) = \varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j) \tag{1.79}$$

利用(1.78)和(1.74)，再采取通常的共轭场的定义：

$$\pi_n(\mathbf{x},t) = \frac{\partial\mathscr{L}(\varphi(\mathbf{x},t),\dot{\varphi}(\mathbf{x},t))}{\partial\dot{\varphi}_n(\mathbf{x},t))} \tag{1.80}$$

代入(1.77)得到：

$$0 = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\left(\prod_{k=1}^{r}\prod_{i=0}^{n-1}\mathrm{d}(\varphi_k(\mathbf{x},t^i))\right)\cdot\left\{\frac{i}{\hbar}\int -\pi_n(\mathbf{x},t^j)\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)d^3x\cdot\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j)\right.$$
$$\left.\int_{\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)\mathrm{d}^3x}^{\delta_{mn}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_\alpha)} + \frac{i}{\hbar}\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j)\int\pi_n(\mathbf{x},t^{j-1})\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)\,\mathrm{d}^3x\right\}\cdot e^{i\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{\varphi^{i+1}+\varphi^i}{2},\frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\varepsilon}\right)}$$

把 $\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)$ 都抽到右边：

$$0 = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\int_{\varphi'}^{\varphi''}\left(\prod_{k=1}^{r}\prod_{i=0}^{n-1}\mathrm{d}(\varphi_k(\mathbf{x},t^i))\right)$$
$$\cdot\left\{\frac{i}{\hbar}\int[\mp\pi_n(\mathbf{x},t^j)\varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j) + \varphi_m(\mathbf{x}_\alpha,t^j)\pi_n(\mathbf{x},t^{j-1})\right.$$
$$\left.+\frac{\hbar}{i}\delta_{mn}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}_\alpha)]\delta\varphi_n(\mathbf{x},t^j)\,\mathrm{d}^3x\right\}\cdot e^{i\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}L\left(\frac{\varphi^{i+1}+\varphi^i}{2},\frac{\varphi^{i+1}-\varphi^i}{\varepsilon}\right)}$$

$\mp$ 号是 $\delta\varphi_n$ 和 φ_m 对易的结果。Bose 场取 $-$，Fermi 场取 $+$。因为 Fermi 场的情况下，$\delta\varphi_n$ 和

φ_m 是反对易的 c - 数。于是有

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} {}_H < \varphi''t'' \left| \left\{ \frac{i}{\hbar}\int [\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_\alpha, t^j)\hat{\pi}_n(\mathbf{x}, t^j - \varepsilon) \mp \hat{\pi}_n(\mathbf{x}, t^j)\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_\alpha, t_j) + \frac{\hbar}{i}\delta_{mn}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)] \delta\varphi_n(\mathbf{x}, t^j) d^3x \right\} \right| \varphi't' >_H$$

由于不同 $\mathbf{x}$ 的 $\delta\varphi_n(\mathbf{x}, t^j)$ 互相独立，是任意取的(但在 $d\varphi_n(x)$ 积分中 $\delta\varphi_n(x)$ 保持为常数)，所以 $\varepsilon\to 0$ 后有：

$$_H < \varphi''t'' | \hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_\alpha, t^j)\hat{\pi}_n(\mathbf{x}, t^j) \mp \hat{\pi}_n(\mathbf{x} - t^j)\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_\alpha, t^j) | \varphi't' >_H = < \varphi''t'' \left| -\frac{\hbar}{i}\delta_{mn}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \right| \varphi't' >$$

又因为 φ'', φ' 是任意取的，所以：

对于 Bose 场，

$$[\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_\alpha, t^j), \hat{\pi}_n(\mathbf{x}, t^j)] = -\frac{\hbar}{i}\delta_{mn}\delta^3(x - x_\alpha) \tag{1.81$_1$}$$

对于 Fermi 场，

$$\{\hat{\varphi}_m(\mathbf{x}_\alpha, t^j), \hat{\pi}_n(\mathbf{x}, t^j)\} = -\frac{\hbar}{i}\delta_{mn}\delta^3(x - x_\alpha) \tag{1.81$_2$}$$

从而说明了从场量的路径积分入手，也可以推导出量子场论的对易关系。

§1-4　从路径积分给出真空矩阵元

前一节已经引入了用路径积分表达矩阵元的概念，但两端写的 $<\varphi''t''|$ 和 $|\varphi't'>$ 中的 φ'', φ' 是任意的。这一节我们要讨论一下怎样用路径积分来表达真空态($|0>$)到真空态($<0|$)的各种矩阵元。分两步走：

1. 第一步：在 $\mathscr{L}$ 中或 $\mathscr{L}_{eff}$ 中(例如，在非 Abel 规范场的情况要用 $\mathscr{L}_{eff}$ 代替 $\mathscr{L}$，见第三章)引入一个 $J\varphi$ 项，$J(x)$ 是任意的一个外来经典源(以后通过它来得到各种矩阵元)，并让 $J(x)$ 只在 (t_1, t_2) 区间不为零。另外，再取两个时间 t', t''。t' 是长远过去的一个时间，t'' 是长远将来的一个时间：

$$t'' > t_1 > t_2 > t'$$

相仿于(1.25)，(1.34)，(1.48)，(1.59)，(1.60)等，可以写出如下的含 J 的转换矩阵元(为了方便，我们只讨论一个 φ 的情况，很容易推广到多个 φ 的情况)：

$$\begin{aligned} &_H < \varphi''t'' | \varphi't' >_H^J \\ &= \int {}_H < \varphi''t'' | \varphi_1 t_1 >_H d\varphi_1 {}_H < \varphi_1 t_1 | \varphi_2 t_2 >_H^J d\varphi_2 {}_H < \varphi_2 t_2 | \varphi't' >_H \\ &= \text{常数}\int_{\varphi'}^{\varphi''} d(\varphi) e^{\int_{t'}^{t''} dt \int d^3x [\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_{eff}(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}) + iJ(x,t)\varphi(x,t)]} \end{aligned} \tag{1.82}$$

这里由于 J 只在 (t_1, t_2) 区间 $\neq 0$，所以积分中只有 $_H<\varphi_1 t_1|\varphi_2 t_2>_H^J$ 这一个转换矩阵元有 J 的标志。另外，$_H<\varphi''t|\varphi_1 t_1>_H$ 和 $_H<\varphi_2 t_2|\varphi't'>_H$ 是没有 $J\varphi$ 项参与作用的矩阵元，所以可以用(1.15)，并得到

$$_H < \varphi''t'' | \varphi_1 t_1 >_H = < \varphi'' | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t''-t_1)} | \varphi_1 >$$

$$ {}_{H}\langle \varphi_2 t_2 | \varphi' t' \rangle_{H} = \langle\varphi_2 | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t_2 - t')} | \varphi_1 \rangle \tag{1.83$_1$} $$

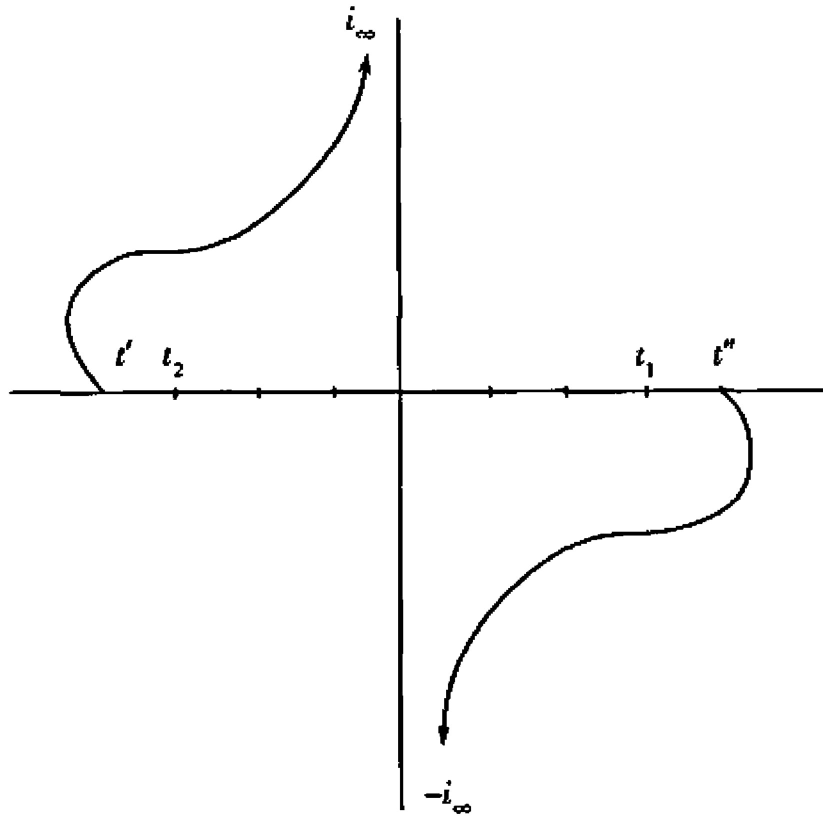


图 1.3

可以再插入一组 H 本征态(即能量本征态)的完备集合 $\sum_n |n\rangle\langle n|$：

$$ {}_{H}\langle \varphi'' t'' | \varphi_1 t_1 \rangle_{H} = \sum_n \langle \varphi'' | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t''-t_1)} | n \rangle \langle n | \varphi_1 \rangle $$
$$ = \sum_n \langle \varphi'' | n \rangle \langle n | \varphi_1 \rangle e^{-i\frac{E_n}{\hbar}(t''-t_1)} $$
$$ {}_{H}\langle \varphi_2 t_2 | \varphi' t' \rangle_{H} = \sum_n \langle \varphi_2 | n \rangle \langle n | e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}(t_2-t')} | \varphi' \rangle $$
$$ = \sum_n \langle \varphi_2 | n \rangle \langle n | \varphi' \rangle e^{-i\frac{E_n}{\hbar}(t_2-t')} \tag{1.83$_2$} $$

注意这每一个 n 都是一个物理的态,所以在海森伯表象中,$|n\rangle$ 不随时间而变。

现在把负的 t' 延拓到正虚轴,正的 t'' 延拓到负虚轴,即

$$ t'' \to -i\infty $$
$$ t' \to i\infty $$

延拓后,(1.83)$_1$ 变成:

$$ \lim_{t''\to -i\infty} {}_{H}\langle \varphi'' t'' | \varphi_1 t_1 \rangle_{H} = \lim_{t''\to -i\infty} \sum_n \langle \varphi'' | n \rangle \langle n | \varphi_1 \rangle e^{-i\frac{E_n}{\hbar}(t''-t_1)} $$
$$ = \lim_{t''\to -i\infty} \langle \varphi'' | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_1 \rangle e^{-i\frac{E_0}{\hbar}(t''-t_1)} \text{①} $$
$$ = \lim_{t''\to -i\infty} \langle \varphi'' | 0 \rangle \langle 0 | e^{iHt_1} | \varphi_1 \rangle e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t''} $$
$$ = \lim_{t''\to -i\infty} \langle \varphi'' | 0 \rangle \langle 0 | \varphi_1 t_1 \rangle_{H} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t''} \tag{1.84$_1$} $$

① $|0\rangle$, $\langle 0|$ 表示真空态,即最低能级态,不是说 $\varphi = 0$。

$$\lim_{t'\to i\infty} {}_H\langle\varphi_2 t_2|\varphi' t'\rangle_H = \lim_{t'\to i\infty}\sum_n \langle\varphi_2|n\rangle\langle n|\varphi'\rangle e^{-i\frac{E_0}{\hbar}(t_2-t')}$$

$$= \lim_{t'\to i\infty} \langle\varphi_2|0\rangle\langle 0|\varphi'\rangle e^{-\frac{E_0}{\hbar}(t_2-t')}$$

$$= \lim_{t'\to i\infty} \langle\varphi_2|e^{-iHt_2}|0\rangle\langle 0|\varphi'\rangle e^{i\frac{E_0}{\hbar}t'}$$

$$= \lim_{t'\to i\infty} {}_H\langle\varphi_2 t_2|0\rangle\langle 0|\varphi'\rangle e^{i\frac{E_0}{\hbar}t'} \tag{1.84$_2$}$$

这里利用了(1.7)和(1.11),并考虑到所有的 $E_n(n>0)$都大于 E_0,所以 t'',t'取极限后,只剩下 E_0 项。

把(1.84),(1.84)$_1$ 代入(1.82),得到:

$$\lim_{\substack{t''\to -i\infty\\ t'\to i\infty}} {}_H\langle\varphi'' t''|\varphi' t'\rangle_H^J$$

$$= \lim_{\substack{t''\to -i\infty\\ t'\to i\infty}} e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t''}\langle\varphi''|0\rangle\left(\int\langle 0|\varphi_1 t_1\rangle_H d\varphi_1 {}_H\langle\varphi_1 t_1|\varphi_2 t_2\rangle_H^J d\varphi_2 {}_H\langle\varphi_2 t_2|0\rangle\right)$$

$$\langle 0|\varphi'\rangle e^{i\frac{E_0}{\hbar}t'} \tag{1.85}$$

我们取的是这样一组边界条件(要和(1.82)的 $\int_{\varphi'}^{\varphi''}$ 一致),即 t'',t'→极限时,φ'',φ'是给定的,$\langle\varphi''|0\rangle\langle 0|\varphi'\rangle$是不依赖于 t 的常数。于是自(1.85)有:

$$\lim_{\substack{t''\to -i\infty\\ t'\to i\infty}} \frac{{}_H\langle\varphi'' t''|\varphi' t'\rangle_H^J}{e^{\frac{i(t'-t'')}{\hbar}E_0}\langle\varphi''|0\rangle\langle 0|\varphi'\rangle}$$

$$= \int\langle 0|\varphi_1 t_1\rangle_H d\varphi_1 {}_H\langle\varphi_1 t_1|\varphi_2 t_2\rangle_H^J d\varphi_2 {}_H\langle\varphi_2 t_2|0\rangle \tag{1.86}$$

其中 $e^{i\frac{(t'-t'')}{\hbar}E_0}$是一个不依赖于 φ 和 J 的因子。

(1.86)右方的物理意义是什么?

首先,在 t_2 时,真空可用 t_2 时的海森伯表象写成(因真空是 H 的本征态,所以在没有外源作用时,海森伯表象的$|0\rangle_H=|0\rangle$不随时间而变。见(1.12))如下形式:

$$|t_2\text{时真空}\rangle = \int|\varphi_2 t_2\rangle_H d\varphi_2 {}_H\langle\varphi_2 t_2|0\rangle \tag{1.87}$$

由于有 $J(x,t)\varphi(x,t)$项起作用,t_2 以后真空会发生变化,这种变化可通过基矢的变化表达出来。具体说,时间由 t_2 进行到 t_1 时,海森伯表象的基矢也应由$|\varphi t_2\rangle_H$ 换成$|\varphi t_1\rangle_H$。在外源项的作用下,基矢的转换通过转换矩阵 ${}_H\langle\varphi_1 t_1|\varphi_2 t_2\rangle_H^J$来实现:

$$|\varphi_2 t_2\rangle_H = \int|\varphi_1 t_1\rangle_H d\varphi_1 {}_H\langle\varphi_1 t_1|\varphi_2 t_2\rangle_H^J$$

所以 t_2 时的真空用 t_1 时的海森伯表象写出来就应该是:

$$|t_2\text{时真空}\rangle = \int|\varphi_1 t_1\rangle_H d\varphi_1 {}_H\langle\varphi_1 t_1|\varphi_2 t_2\rangle_H^J d\varphi_2 {}_H\langle\varphi_2 t_2|0\rangle \tag{1.88}$$

再把 t_1 时的真空也用 t_1 时的海森伯表象写出来(类似于(1.87)):

$$|t_1\text{时真空}\rangle = \int|\varphi_1 t_1\rangle_H d\varphi_1 {}_H\langle\varphi_1 t_1|0\rangle \tag{1.89}$$

则 t_2 时的真空在时间由 t_2 进行到 t_1 时仍为真空(t_1 时的真空)的几率幅度就是如下的标积:

$$< t_1 \text{ 时真空} | t_2 \text{ 时真空 } >$$
$$= \int < 0 | \varphi_1 t_1 >_H d\varphi_{1H} < \varphi_1 t_1 | \varphi_2 t_2 >^J_H d\varphi_{2H} < \varphi_2 t_2 | 0 > \tag{1.90}$$

与(1.86)一致。所以这就是(1.86)右方的物理意义。

那么,怎样去计算(1.90)中的在外源作用下的 $<t_1$ 时真空$|t_2$ 时真空$>$呢?我们不能直接用路径积分来表达(1.90)的右方,所以,办法必须是借助于 $_H<\varphi''t''|\varphi't'>^J_H$。从(1.86)看到,在取 $\lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}}$ 极限时,$_H<\varphi''t''|\varphi't'>^J_H$ 和(1.90)只相差一个与 φ, J 无关的因子。这种因子以后将表明是不起作用的。所以我们可以直接用 $\lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} {}_H<\varphi''t''|\varphi't'>^J_H$ 来代替(1.90)的 $<t_1$ 时真空$|t_2$ 时真空$>$。

于是,可以定义如下的一个生成泛函:

$$W[J] = \lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} {}_H < \varphi''t'' | \varphi't' >^J_H$$
$$= \lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d(\varphi) e^{\int_{t'}^{t''} dt \int d^3x \left[\frac{i}{\hbar} \mathscr{L}_{eff}\left(\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) + iJ(\mathbf{x},t)\varphi(\mathbf{x},t) \right]} \tag{1.91}$$

用 $W[J]$ 来代替(1.90)右端的积分,就使这个积分得以用路径积分((1.91)右方)表达出来。

接着要问,把(1.90)右端表达为路径积分有什么用呢?极限 $\lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}}$ 又是如何去处理和计算呢?这就要通过下面的第二步来回答。

2. 第二步:我们仿照§1-3中用路径积分写出编时乘积的办法,考察如下的编时乘积真空期待值:

$$< 0 | T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n) | 0 >$$
$$\sim \lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} \int {}_H < \varphi''t'' | \varphi_1 t_1 >_H \varphi_{1H} < \varphi_1 t_1 | \varphi_2 t_2 >^\delta_H \varphi_2 \cdots \varphi_{nH} < \varphi_n t_n | \varphi't' >_H \cdot d\varphi_1 \cdots d\varphi_n$$

[这里我们略去了 $\frac{1}{e^{\frac{-i(t''-t')}{\hbar}E_0} < \varphi''|0> <0|\varphi'>}$ 因子。已经说过,这种因子是不起作用的。另外,这里取了 $t'' > t_1 > t_2 > \cdots > t_n > t'$。由于编时乘积,取别的时间顺序也照样得到下面的结果。]

$$= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)} \cdot \lim_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} \int d(\varphi) e^{\int_{t'}^{t''} d^4x \left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_{eff}(x) + J(x)\varphi(x) \right]} \Big|_{J=0}$$
$$= \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta_J(x_n)} \Big|_{J=0} \text{①} \tag{1.92}$$

边界条件是 t'', t' 趋于极限时,φ'', φ' 趋于常数。

然后,延拓 $t_1 \to -i\tau^1, t_2 \to -i\tau_2, \cdots, t_n \to -i\tau_n$。$\tau$ 都是实数,即如果 $t = l$,则延拓后就换成 $\tau = l$,矩阵元中算符顺序不变。于是有:

$$<0|T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)|0>|_{\substack{t_1\to -i\tau_1 \\ \cdots \\ t_n\to -i\tau_n}}$$

---

① 在费米场的情况,要考虑到 $\delta J(x_i)$ 的不同微分次序而出现的±号。

$$= \lim_{\substack{t''\to\infty \\ t'\to-\infty}} \int {}_H < \varphi'', -i\tau'' \mid \varphi_1, -i\tau_1 >_H \varphi_1 {}_H < \varphi_1, -i\tau_1 \mid \varphi_2, -i\tau_2 >_H^J \varphi_2 \cdots$$

$$\cdots \varphi_n {}_H < \varphi_n, -i\tau_n \mid \varphi', -i\tau' >_H \mathrm{d}\varphi_1 \mathrm{d}\varphi_2 \cdots \mathrm{d}\varphi_n \tag{1.93}$$

由此看到,我们可以定义 $W_E[J]$,即对 $W[J]$ 作延拓,$t_1 \to -i\tau_1, t_2 \to -i\tau_2, \cdots, t_n \to -i\tau_n$,等等;但 t'', t' 的极限依旧。得到

$$W_E[J] \backsimeq \lim_{\substack{t''\to\infty \\ t'\to-\infty}} \int \mathrm{d}(\varphi) e^{\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}^4 x_E \left[\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_{eff}(x_E) + J(x_E)\varphi(x_E)\right]} \tag{1.94}$$

这里 x_E 就是把 x 中的时间 t 换成 $-i\tau$;把 $id^4x = idx_1dx_2dx_3dt$ 换成 $d^4x_E = dx_1dx_2dx_3d\tau$。

比较(1.93),(1.94),又得到(τ 是实数,t 是虚数):

$$< 0 \mid T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n) \mid 0 > \Big|_{\substack{t_1 \to -i\tau_1 \\ \cdots \\ t_n \to -i\tau_n}}$$

$$\backsimeq \frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(x_{1E})\delta J(x_{2E})\cdots\delta_J(x_{nE})}\Bigg|_{J=0} \tag{1.95}$$

再把 t 转回实轴,就又得到(t 是实数,τ 是虚数):

$$< 0 \mid T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n) \mid 0 > \sim \frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(x_{1E})\delta J(x_{2E})\cdots\delta_J(x_{nE})}\Bigg|_{\substack{J=0 \\ \tau_1 \to it_1 \\ \cdots \\ \tau_n \to it_n}} \tag{1.96}$$

这样,算符编时乘积就得以用 $W_E[J]$ 的路径积分和相应的时间延拓(由欧氏空间回到闵氏空间)表达出来。

在(1.96)和(1.92)中都有 ~,因为因子 $e^{i(t'-t'')E_0} \cdot <\varphi''|0><0|\varphi'>$ 没有消去。但我们可以通过如下途径直接找出 $W_E[J]$ 与 $W[J]$ 之间的关系,不是用 ~,而是用 =:

$$\frac{1}{i^n}\frac{1}{W[J]}\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\Bigg|_{J=0}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)} \cdot \int_{\varphi'}^{\varphi''} \mathrm{d}(\varphi) e^{\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_{eff}(x) + iJ(x)\varphi(x)\right]}}{\lim\limits_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d(\varphi) e^{i\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}^4x(\mathscr{L}_{eff}(x) + J(x)\varphi(x))}}\Bigg|_{J=0}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\substack{t''\to \infty \\ t'\to -\infty}} \frac{\delta^n}{\delta J(x_{1E})\cdots\delta J(x_{nE})} \cdot \int_{\varphi'}^{\varphi''} \mathrm{d}_{(}\varphi) e^{\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}^4x_E\left[\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_{eff}(x_E)\varphi(x_E)\right]}}{\lim\limits_{\substack{t''\to \infty \\ t'\to -\infty}} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d(\varphi) e^{\int_{t'}^{t''} \mathrm{d}^4x_E(\mathscr{L}_{eff}(x_E) + J(x_E)\varphi(x_E))}}\Bigg|_{\substack{J=0 \\ \mathrm{d}^4x_E \to i\mathrm{d}^4x \\ x_{iE} \to x_i}}$$

$$= \frac{1}{W_E[J]}\frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(x_{1E})\delta J(x_{2E})\cdots\delta J(x_{nE})}\Bigg|_{\substack{J=0 \\ \mathrm{d}^4x_E \to i\mathrm{d}^4x \\ x_{iE} \to x_i}} \tag{1.97}$$

这里用的是 = 号,$e^{i\frac{(t'-t'')}{\hbar}E_0} \cdot <\varphi''|0><0|\varphi'>$ 因子消去了(分子分母上都有这因子)。注意在这里从欧氏空间向闵氏空间的时间变换和延拓限于两端除外的路径积分。两端 $\lim\limits_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}}$ 和 $\lim\limits_{\substack{t''\to \infty \\ t'\to -\infty}}$ 是等价的($t = -i\tau$),所以两端并没有延拓。

从下一节要讨论的微扰论来看,(1.97)事实上是去掉真空起伏的多条腿的图。

(1.97)还告诉我们,处理 $W[J]$ 中的 $\lim\limits_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}}$ 的办法就是先用欧氏空间的 $W_E[J]$ 算出所要的图,再作 $\tau\to it$ 延拓。其结果等于(1.97)左端用 $W[J]$ 所表达的编时乘积矩阵元。而且,用 $W_E[J]$ 作计算是好算的,不会遇到 $W[J]$ 计算所遇到的 $\lim\limits_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}}$ 的困难。

还可以发现,从(1.97)右端作 $\tau = it$ 变换,即把欧氏空间换回到闵氏空间,所得的结果和用如下的有所改变的 $W[J]$ 得到的结果一致。这个 $W[J]$ 是:

$$W[J] = \lim_{\substack{t''\to \infty \\ t'\to -\infty}} \int_{\varphi'}^{\varphi''} d(\varphi) e^{\int_{t'}^{t''} d^4x \left[\frac{i}{\hbar}\left(\mathscr{L}_{eff}(x) + \frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)\right) + iJ(x)\varphi(x)\right]} \tag{1.98}$$

与原先的 $W[J]$ 相比较(见(1.91)),有两处改动:一是用 $\lim\limits_{\substack{t''\to \infty \\ t'\to -\infty}}$ 代替 $\lim\limits_{\substack{t''\to -i\infty \\ t'\to i\infty}}$;二是在 $\mathscr{L}_{eff}$ 的旁边加上一个小项 $\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)$。

由于这一点,以后计算矩阵元时,就不再用(1.91)的 $W[J]$,而改用(1.98)的 $W[J]$。用(1.98)的 $W[J]$ 作计算是好算的,因为取了 $\lim\limits_{\substack{t''\to \infty \\ t'\to -\infty}}$。

关于 $\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)$ 的引出,将在第二章 §2-1 节中讨论。

§1-5 微 扰 论

用路径积分作微扰展开,也可得到各种的 Feynman 图,与通常的 Feynman 图有相同的性质。路径积分作微扰的步骤可分成三步:

1. 第一步:把 $\mathscr{L}_{eff}(x)$ 分成两个部分,

$$\mathscr{L}_{eff}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}_I(x) \tag{1.99}$$

$\mathscr{L}_0(x)$ 中包括全部的场量二次项$\left(\text{其中也有}\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)\text{项}\right)$,而 $\mathscr{L}_I(x)$ 则是相互作用拉氏量。

由于在泛函积分中,$\mathscr{L}_0(x)$ 和 $\mathscr{L}_I(x)$ 都是由 c-数(包括反对易 c 数,但它们成对出现)组成,所以总可以作如下展开(也和通常的 S 矩阵展开一样):

$$W[J] = \sum_n \frac{(i)^n}{n!}\frac{1}{\hbar^n}\int d^4x_1\cdots d^4x_n \cdot \int d\varphi \mathscr{L}_I(x_1)\cdots\mathscr{L}_I(x_n) e^{\int d^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x) + iJ_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\right]} \tag{1.100}$$

考虑到 $\mathscr{L}_0(x)$ 包括全部的场量二次项,所以有:

$$\int d(\varphi) e^{\int d^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x) + iJ_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\right]} = \int d(\varphi) e^{\frac{1}{\hbar}\int d^4x d^4y \frac{-i}{2}\varphi_\alpha(x) K\alpha\beta(x,y)\varphi\beta(y) + i\int d^4x J_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)} \tag{1.101}$$

这是关于 φ 的高斯型(或赝高斯型)的积分,可以先积出来,得到

$$\int d\varphi_e{}^{\int d^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x) + iJ(x)\varphi(x)\right]} = \text{不含场量的因子}\cdot e^{\hbar\int d^4x d^4y \frac{i}{2} J_\alpha(x) K^{-1}_{\alpha\beta}(x,y) J\beta(y)} \tag{1.102}$$

$\left(\text{如上节所说},\mathscr{L}_0\text{ 中包括了}\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)\text{ 项},dt\text{ 积分取}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\right)$。

定义传播子 $\Delta_{\alpha\beta}(x,y)$:

$$\Delta_{\alpha\beta}(x,y) = -iK_{\alpha\beta}^{-1}(x,y) \tag{1.103}$$

则有

$$\int K_{\alpha\beta}(x,y)\cdot i\Delta_{\beta\gamma}(y,z)\mathrm{d}^4y = \delta_{\alpha\gamma}\delta_4(x-z) \tag{1.104}$$

$$\therefore \int \mathrm{d}(\varphi)e^{\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x)+iJ(x)\varphi(x)\right]}$$

$$= \text{不含场量的因子}\cdot e^{-\frac{\hbar}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ_\alpha(x)\Delta_{\alpha\beta}(x,y)J_\beta(y)} \tag{1.105}$$

关于 $d(\varphi)$ 积分如何进行,我们留到第二章去说明,而且将看到(1.102)积分的结果对于 Bose 场和 Fermi 场都是适用的。

2. 第二步:$W[J]$ 并不简单地只是(1.102)的积分。因为 $\mathscr{L}_1(x)$ 中也是含有场量 $\varphi(x)$ 的。所以,把 $\mathscr{L}_1(x)$ 加入到(1.102)的积分函数中之后,就不再是高斯型(或赝高斯型)的积分了。可是我们却只会作高斯型(或赝高斯型)的积分。克服这个困难的办法就是像前一节所说的那样,用对 $J_\alpha(x)$ 的泛函微分来表达 $\varphi_\alpha(x)$。因此(1.100)可写成

$$\begin{aligned} W[J] &= \sum_n \frac{(i)^n}{n!}\frac{1}{\hbar^n}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\mathscr{L}_1\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right]\cdots\mathscr{L}_1\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right] \\ &\quad\cdot\int \mathrm{d}(\varphi)e^{\int \mathrm{d}^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x)+iJ_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)\right]} \\ &= \sum_n \frac{(i)^n}{n!}\frac{1}{\hbar^n}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\mathscr{L}_1\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right]\cdots\mathscr{L}_1\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right] \\ &\quad\cdot e^{-\frac{\hbar}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ_\alpha(x)\Delta\alpha\beta(x,y)J_\beta(y)} \end{aligned} \tag{1.106}$$

$\left(\text{这里也是 }\mathscr{L}_0(x)\text{ 中包含}\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)\text{ 项},t\text{ 积分限为}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t,\text{和正常的时间积分一样}\right)$。

3. 第三步:求 $W[J]$ 积分的目的在于算编时乘积的矩阵元。为此,可以再一次利用 $J(x)$ 的泛函微分。见下例:

$$\begin{aligned} &\langle 0|T\hat{\varphi}_a(x_k)\hat{\varphi}_b(x_l)\hat{\varphi}_c(x_m)\hat{\varphi}_d(x_p)|0\rangle \\ &\sim \frac{1}{i^4}\frac{\delta^4W[J]}{\delta J_a(x_k)\delta J_b(x_l)\delta J_c(x_m)\delta J_d(x_p)}\bigg|_{J=0} \\ &= \sum_n \frac{i^n}{n!}\frac{1}{\hbar^n}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots d^4x_n\cdot\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_a(x_k)}\cdot\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_b(x_l)}\cdot\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_c(x_m)} \\ &\quad\cdot\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_d(x_p)}\cdot\mathscr{L}_1\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_{(}x_1)}\right]\cdots\mathscr{L}_1\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right] \\ &\quad\cdot e^{-\frac{1}{2\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yJ_\alpha(x)\Delta\alpha\beta(x,y)J\beta(y)}\Big|_{J=0} \end{aligned} \tag{1.107}$$

讨论

1. 在上述微扰展开中,每一个 $\varphi_\alpha(x)$ 都对应一个$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\alpha(x)}$,后者可以消去一个指数上下来的 $J_\alpha(x)$,从而让 $\varphi_\alpha(x)$ 所在的顶点与 $\Delta_{\alpha\beta}(x-y)J_\beta(y)$ 连接起来。如果再有一个与 $\varphi_\beta(y)$ 相对应的$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\beta(y)}$作用上去,就会出现不带 J 的 $\Delta_{\alpha\beta}(x-y)$,相当于普通微扰论

中 $\varphi_\alpha(x)$ 与 $\varphi_\beta(y)$ 的收缩。在(1.107)的展开中,有很多项是含有 J 的,但在取 $J=0$ 后,只有全部把 J 消去的项才不为零。

2. 根据上述讨论,可以看到,(1.107)包括着如下的 Feynman 图:

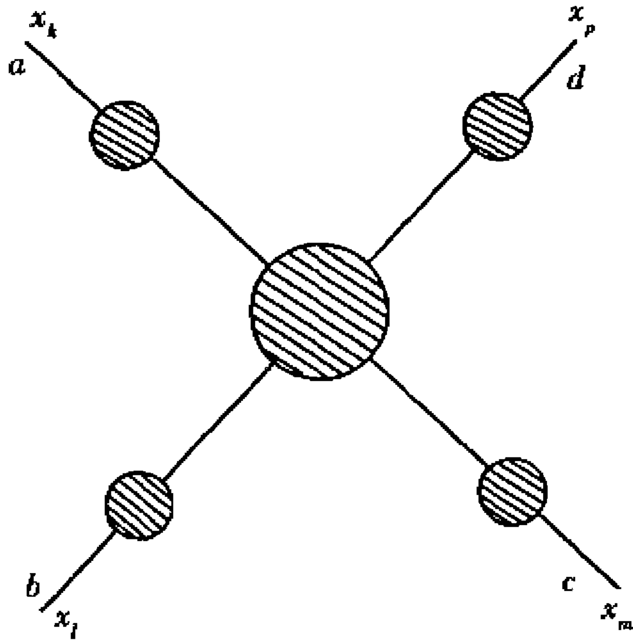


图 1.4

这是一个有四条腿的 Feynman 图,图中每一条单线对应于一个传播子((1.103)的 $\Delta_{\alpha\beta}(x$,是传播子的一个例子),每一个画了阴影的圈代表一个复杂的有很多内部连线的图形。

还可以看到,$W[0]=W[J]|_{J=0}$ 包括各种没有腿的图。这种图就是普通 S 矩阵理论中的真空起伏图。所以,(1.97)(见前一节)是普通 S 矩阵理论中除去真空起伏的矩阵元。

3. 如果要算 $<ab|S|cd>$(散射矩阵元,a,b,c,d 是外线),则只需把(1.107)换成 k 表象,再乘上四条腿相对应的四个 $(k_i^2+m_i^2)$(m_i 是外线粒子的重正化质量,$i=a,b,c,d$)以及其他有关的因子(例如标量粒子的情况就是对应于每条腿乘上一个 $\frac{k_i^2+m_i^2}{-i}(2\pi)^4\frac{1}{\sqrt{2E_i}}$。旋量粒子的有关因子要复杂一些,但也都是在通常的量子场论中已知的。读者可以参看第四章§4-1的一些具体例子,这里就不多说了),然后令每条腿的 k_i^2 都趋于 $-m_i^2$,则这条腿的内线都正好换成外线$\left((k_i^2+m_i^2)\text{正好与原先内线传播子中的}\frac{1}{k_i^2+m_i^2}\text{抵消}\right)$,从而得到 $<ab|S|cd>$。值得注意的是,因为乘了 $k_i^2+m_i^2$,又令 $k_i^2=-m_i^2$,所以凡是没有相应传播子的项,也就是没有 $\frac{1}{k_i^2+m_i^2}$ 因子的项都→0。①

以下我们再讨论一个与上述微扰论展开等价的做法。

另一个等价的做法

再来看 $W[J]$ 的积分

$$W[J]=\int_{\varphi'}^{\varphi''}\mathrm{d}(\varphi)e^{i\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_{eff}(x)+iJ(x)\varphi(x)\right)}$$

① 由约化公式可知,如果有了带腿的格林函数,就可以用约化公式得到有关的 S 矩阵元。

$$= \int_{\varphi'}^{\varphi''} \mathrm{d}(\varphi) e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi] + i\int \mathrm{d}^4 x J(x)\varphi(x)} \tag{1.108}$$

$\left(\mathscr{L}_{eff}(x)\text{ 中有}\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)\text{ 项},dt\text{ 积分取}\int_{-\infty}^{\infty}dt\right)$

为了便于说明问题,我们取一个最简单的标量场模型为例:

$$\mathscr{L}_{eff}(x) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x) - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4(x) + \frac{i}{2}\varepsilon\varphi^3(x) \tag{1.109}$$

暂时不考虑圈图,不考虑重正化,从而也不必加抵消项(关于抵消项,见第五章),μ^2,λ 都是物理的。于是,围绕 $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ 展开:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\hbar}S[\varphi] + \int \mathrm{d}^4 x J(x)\varphi(x) = \frac{1}{\hbar}S[\varphi_0] + \int \mathrm{d}^4 x J(x)\varphi_0(x) \\
&+ \int \mathrm{d}^4 x\left[\frac{1}{\hbar}\frac{\delta S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)} + J(x)\right](\varphi(x) - \varphi_0(x)) \\
&+ \frac{1}{2!}\int \mathrm{d}^4 x \mathrm{d}^4 y(\varphi(x) - \varphi_0(x))(\varphi(y) - \varphi_0(y))\frac{1}{\hbar}\frac{\delta^2 S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y)} \\
&+ \cdots
\end{aligned} \tag{1.110}$$

现在要让$(\varphi(x) - \varphi_0(x))$一次项消去,因而要求

$$\frac{1}{\hbar}\frac{\delta S[\varphi_0]}{\delta\varphi_0(x)} = -J(x) \tag{1.111}$$

(1.111)给出经典的 Euler – Lagrange 方程:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}(\varphi_0)}{\partial(\partial_\mu\varphi_0(x))} - \frac{\partial\mathscr{L}(\varphi_0)}{\partial\varphi_0(x)} = J(x)\hbar \tag{1.112$_1$}$$

φ_0 是这个方程的经典解。

在(1.109)的情况,$(1.112)_1$ 就具体化为:

$$(-\Box + \mu^2 - i\varepsilon)\varphi_0(x) + \lambda\varphi_0^3(x) = J(x)\hbar \tag{1.112$_2$}$$

λ 是一个小数,可以用微扰方法去解$(1.112)_1$:

λ^0 级近似:

$$(-\Box + \mu^2 - i\varepsilon)\varphi_0(x) \doteq J(x)\hbar$$

$$\begin{aligned}
\therefore \qquad \varphi_0(x) &\doteq \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}\frac{\mathrm{d}^4 k}{k^2 + \mu^2 - i\varepsilon}\mathrm{d}^4 y J(y)\hbar \\
&= i\int\Delta(x - y)\mathrm{d}^4 y J(y)\hbar
\end{aligned} \tag{1.113}$$

这里定义

$$\Delta(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}\frac{-i}{k^2 + \mu^2 - i\varepsilon}\mathrm{d}^4 k$$

λ^1 级近似:

$$\varphi_0(x) \doteq i\int\Delta(x - y)\mathrm{d}^4 y\cdot\left[J(y)\hbar - \lambda\left(i\int\Delta(y - z)\mathrm{d}^4 z J(z)\hbar\right)^3\right] \tag{1.114}$$

(1.114)是把(1.113)代入 $\lambda\varphi_0^3(x)$ 得来。

再把(1.114)的 λ^1 级的 $\varphi_0(x)$ 代入

$$\varphi_0(x) = i\int\Delta(x-y)\mathrm{d}^4y\cdot[J(y)\hbar - \lambda\varphi_0^3(y)]$$

的右方，就又得到 λ^2 级近似。

经过这样反复叠代，可以得到准确到 λ^n 级的 $\varphi_0(x)$。这种叠代给出的是树图，没有圈图。$\varphi_0(x)$之所以叫做经典解，除了它是经典运动方程(1.112)的解之外，还有一层意思就是它没有圈图贡献。圈图贡献是量子效应，不是经典效应。

利用(1.110)的展开，又可把 $W[J]$写成：

$$W[J] = e^{\frac{i}{\hbar}S[\varphi_0]+i\int d^4xJ(x)\varphi_0(x)}$$
$$\cdot\int\mathrm{d}(\varphi)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y(\varphi(x)-\varphi_0(x))\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(\varphi(y)-\varphi_0(y))\frac{\delta^2S[\varphi_0]}{(\delta\varphi_0(x)\delta\varphi_0(y))}\right]+\cdots\right\} \tag{1.115}$$

在(1.115)中可以继续对 $d(\varphi)$作泛函积分。这样，就会出现圈图，就会需要抵消项，需要重正化。第八章§8-3有更具体的计算，说明如果(1.115)中的 φ_0 是用微扰方法从 Euler-Lagrange 方法解出的，那么，(1.115)再积分做下去，所得结果就和通常的场论微扰论的结果没有两样。

前面说过，微扰展开出现圈图是"量子化"效应，它们至少是 λ^2 级的，所以都是较高级微扰的图。重正化后，由于 λ 很小(这是可以微扰的前提)，这种较高级的图会使定义为

$$<0|\varphi(x)|0>^J = \frac{1}{i}\frac{1}{W[J]}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\bigg|_{J\neq 0} \tag{1.116}$$

的 $\varphi(x)$平均值偏离 $\varphi_0(x)$($\varphi_0(x)$不含有圈图贡献)。但如果 λ 小，则圈图对 $\varphi(x)$平均值的修正不大，$\varphi(x)$平均值仍接近经典解 $\varphi_0(x)$。我们还注意到，微扰经典解 $\varphi_0(x)$在 $J=0$时也为0。

从(1.115)还能看到，对积分有贡献的 $\varphi(x)$组态必定都非常靠近 $\varphi_0(x)$。离 $\varphi_0(x)$稍远的各种组态，由于它们的贡献基本上互相抵消(因为相因子变化大)，所以是没有什么贡献的。在进行重正化，有抵消项的情况，仍是按($\varphi-\varphi_0$)展开，§8-3的讨论并不受有没有抵消项的限制。因此，在有抵消项的情况(例如用维数正常化求得抵消项的情况，见第六、七章，$\mathrm{d}(\varphi(x))$积分的主要贡献仍是来自非常靠近 $\varphi_0(x)$的组态。还要补充说一说，抵消项只是起抵消发散积分的作用，它们并不进入经典 Euler-Lagrange 方程。所以只要 u 和 λ 是重正化好了的，Euler-Lagrange 经典运动方程不随有没有抵消项而改变，经典解 $\varphi_0(x)$也不随有没有抵消项而改变。

于是结论是：

1. 用微扰方法从经典运动方程解出 φ_0，再代入(1.115)，继续作积分，这样所得的结果和通常微扰论方法的结果是一致的(证明在§8-3节)。

2. 这两个等价的微扰方法相当于只对在经典解 $\varphi_0(x)$邻近的场组态进行积分。第二点结论可用来说明 Gribov 不确定性(见第三章)对微扰论不会有影响。

参考文献

1 R. P. Feynman, Rev. Mod. phys. 20(1948)367.

2 R. P. Feynman, A. R. Hibbs, Qnantum Mechanics and Path Integrals, McGraw - Hill, New York, 1965.

3 N. H. Christ, T. D. Lee, Phys. Rev. **D22**(1980)939.

4 T. D. Lee, Partide Physics and Introduction to Field Theory, Harwood Academic Publishers, 1981.

5 S. Abers, B. W. Lee, Phys. Reports, **C9**(1973)1.

第二章　传播子和一些生成泛函

这一章将在前面一章的基础上继续说明如何求出玻色场和费米场的传播子，举出一些具体的例子，然后讨论连接图的生成泛函 Z 和 $1PI$ 顶角的生成泛函 Γ。

§2－1　玻色场的传播子

前面一章留了两个问题有待这一章来回答：一个问题是怎样在欧氏空间算出传播子；另一个问题是怎样把传播子从欧氏空间转回到闵氏空间。

我们先看欧氏空间玻色场的情况。在作微扰时，首先遇到的是（1.102）的赝高斯型泛函积分：

$$\int d(\varphi)\exp\left[\int d^4x\left(\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x)+iJ(x)\varphi(x)\right)\right] \tag{2.1}$$

把（2.1）换到欧氏空间，取：

$$id^4x\rightarrow d^4x_E;\mathscr{L}_0(x)\rightarrow\mathscr{L}_0(x_E)$$
$$J(x)\rightarrow J(x_E);\varphi(x)\rightarrow\varphi(x_E)$$

就得到

$$\int d(\varphi)\exp\left[\int d^4x_E\left(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_0(x_E)+J(x_E)\varphi(x_E)\right)\right] \tag{2.2}$$

这里应注意到

$$\delta^4(x_E-y_E)d^4y_E=\delta^3(\bar{x}-\bar{y})\delta(\tau_x-\tau_y)d_3yd\tau=\delta^3(\bar{x}-\bar{y})\delta(it_x-it_y)d^3yidt_y$$
$$=\delta^3(\bar{x}-\bar{y})\delta(t_x-t_y)d_3ydt_y=\delta^4(x-y)d^4y$$

所以

$$\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathscr{L}_0(x)=\frac{i}{\hbar}\int d^4xd^4y(-\varphi(x)K(\partial_x)\delta^4(x-y)\varphi(y))$$
$$\xrightarrow{\text{延拓}}\frac{1}{\hbar}\int d^4x_Ed^4y_E(-\varphi(x_E)K(\partial_{xE})\delta^4(x_E-y_E)\varphi(y_E))$$
$$=\frac{1}{\hbar}\int d^4x_E\mathscr{L}_0(x_E)$$

$$i\int d^4xJ(x)\varphi(x)=i\int d^4xd^4yJ(x)\delta^4(x-y)\varphi(y)$$
$$\xrightarrow{\text{延拓}}\int d^4x_Ed^4y_EJ(x_E)\delta^4(x_E-y_E)\varphi(y_E)$$
$$=\int d^4x_EJ(x_E)\varphi(x_E)$$

就是说，如果把 $id^4x\cdots$ 写成 $id^4x\cdots\delta^4(x-y)d^4y\cdots$，则在向欧氏空间延拓时，得到是 $d^4x_E\cdots\delta^4(x_E-y_E)d^4y_E\cdots$，不再出 i。

接着要问，（2.2）是不是一个高斯型积分？即 $\mathscr{L}_0(x_E)$ 是不是负定的？当 $\varphi\rightarrow\pm\infty$ 时，$\mathscr{L}_0(x_E)$ 是不是 $\rightarrow-\infty$？

在一般的标量场、矢量场的情况，回答都是肯定的，因为，

实标量场：

$$\mathscr{L}_0(x_E) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_E}{\partial x_{\mu E}}\frac{\partial\varphi_E}{\partial x_{\mu E}} - \frac{1}{2}m^2\varphi_E^2$$

复标量场：

$$\mathscr{L}_0(x_E) = -\frac{\partial\varphi_E^*}{\partial x_{\mu E}}\frac{\partial\varphi_E}{\partial x_{\mu E}} - m^2\varphi_E^*\varphi_E$$

实矢量场：

$$\mathscr{L}_0(x_E) = -\frac{1}{4}(\partial_{\mu E}A^i_{\nu E} - \partial_{\nu E}A^i_{\mu E})(\partial_{\mu E}A^i_{\nu E} - \partial_{\nu E}A^i_{\mu E}) - \frac{1}{2}\mu^2 A^i_{\mu E}A^i_{\mu E}$$

复矢量场：

$$\mathscr{L}_0(x_E) = -\frac{1}{2}(\partial_{\mu E}A^i_{\nu E} - \partial_{\nu E}A^i_{\mu E})(\partial_{\mu E}A^i_{\nu E} - \partial_{\nu E}A^i_{\mu E}) - \mu^2 A^i_{\mu E}A^i_{\mu E}$$

都显然是负定的（实际量场 φ_E 是实的；复标量场 $\varphi_E^*\varphi_E$ 是正的；实矢量场 $A^i_{\mu E}$是实的；复矢量场 $A^{i*}_{\mu E}A^i_{\mu E}$是正的，而且 x_E 是实的），当 $\varphi\to\pm\infty$，$A\to\pm\infty$ 时都有 $\mathscr{L}_0(x_E)\to-\infty$。

但规范场的情况复杂一些，将在后面讨论。目前先假定(2.2) 是高斯型的，于是就可以对(2.2) 作$\int d(\varphi)$ 积分。也和以前一样，把欧氏四维空间离散化，分成许多小块，每一个小块有一个标号 α，小块的体积是 $\delta V_\alpha = \varepsilon_E^4$，并定义

$$K_{\alpha\beta E} = \frac{1}{\delta V_\alpha}\int_{\delta V_\alpha}\mathrm{d}^4x_{\alpha E}\frac{1}{\delta V_\beta}\int_{\delta V_\beta}\mathrm{d}^4x_{\beta E}K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E} - x_{\beta E})$$

等等，则泛函积分可写成：

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}(\varphi)\exp\Big[\frac{1}{\hbar}\sum_{\alpha\beta}\int\mathrm{d}^4x_{\alpha E}\mathrm{d}^4x_{\beta E}\Big(-\frac{1}{2}\varphi(x_{\alpha E})K(x_{\alpha E} - x_{\beta E})\varphi(x_{\beta E})\Big)\\&\quad+\sum_\alpha\int\mathrm{d}^4x_{\alpha E}J(x_{\alpha E})\varphi(x_{\alpha E})\Big]\\&=\lim_{\varepsilon_E\to0}\int\prod_\alpha\mathrm{d}\varphi_{\alpha E}\exp\Big[-\frac{1}{\hbar}\sum_\alpha\varepsilon_E^4\sum_\beta\varepsilon_E^4\frac{1}{2}\varphi_{\alpha E}K_{\alpha\beta E}\varphi_{\beta E} + \sum_\alpha\varepsilon_E^4J_{\alpha E}\varphi_{\alpha E}\Big]\end{aligned}\tag{2.3}$$

以上是实场的情况。

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}(\varphi^*)\mathrm{d}(\varphi)\exp\Big[\frac{1}{\hbar}\sum_{\alpha\beta}\int\mathrm{d}^4x_{\alpha E}\mathrm{d}^4x_{\beta E}(-\varphi^*(x_{\alpha E})K(x_{\alpha E} - x_{\beta E})\varphi(x_{\beta E}))\\&\quad+\sum_\alpha\int\mathrm{d}^4x_{\alpha E}(J^*(x_{\alpha E})\varphi(x_{\alpha E}) + \varphi^*(x_{\alpha E})J(x_{\alpha E}))\Big]\\&=\lim_{\varepsilon_E\to0}\int\prod_\alpha\mathrm{d}\varphi^*_{\alpha E}\mathrm{d}\varphi_{\alpha E}\exp\Big[-\frac{1}{\hbar}\sum\varepsilon_E^4\sum_\beta\varepsilon_E^4\varphi^*_{\alpha E}K_{\alpha\beta E}\varphi_{\beta E}\\&\quad+\sum_\alpha\varepsilon_E^4J^*_{\alpha E}\varphi_{\alpha E} + \sum\varepsilon_E^4\varphi_E^*J_{\alpha E}\Big]\end{aligned}\tag{2.4}$$

以上是复场的情况。

1. 实场的情况：φ_E（包括标量场 φ 和矢量场 A）是实的，$L[\varphi_E] = \int\mathscr{L}(x_E)\mathrm{d}^4x_E = L^*[\varphi_E] = \int\mathscr{L}^*(x_E)\mathrm{d}^4x_E$ 也是实的。所以把 $L[\varphi_E]$ 写成

$$L[\varphi_E] = -\sum_{\alpha\beta}\int d^4x_{\alpha E}d^4x_{\beta E}\varphi_\alpha(x_{\alpha E})\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})\varphi_\beta(x_{\beta E})$$
$$= -\sum_{\alpha\beta}\int d^4x_{\alpha E}d^4x_{\beta E}\varphi_\alpha(x_{\alpha E})\frac{1}{2}K^*_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})\varphi_\beta(x_{\beta E})$$
$$= -\sum_{\alpha\beta}\int d^4x_{\beta E}d^4x_{\alpha E}\varphi_\beta(x_{\beta E})\frac{1}{2}K_{\beta\alpha}(x_{\beta E}-x_{\alpha E})\varphi_\alpha(x_{\alpha E})$$

就得到

$$\frac{\delta^2 L[\varphi_E]}{\delta\varphi_\alpha(x_{\alpha E})\delta\varphi_\beta(x_{\beta E})} = -K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E}) = -K^*_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E}) = -K_{\beta\alpha}(x_{\beta E}-x_{\alpha E})$$

可见 $K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})$是实的、对称的。再回到离散的写法,则看到 $K_{\alpha\beta E}$是一个实对称矩阵(见(2.3))。对于实对称矩阵 $K_{\alpha\beta E}$恒有正交矩阵 $T(T^{-1}=\tilde{T})$,使得 $K_{\alpha\beta E}$对角化:

$$T_{\sigma\alpha}K_{\alpha\beta E}\tilde{T}_{\beta\tau} = \lambda_{\sigma E}\delta_{\sigma\tau} \tag{2.5}$$

(见附录一§A1-2 的证明)。这里 $K_{\alpha\beta E}$的厄米的,所以其本征值 $\lambda_{\sigma E}$都是实数。而且 $T_{\sigma\alpha}$也都是实数。于是(2.3)式中的[…]可作如下处理(式中 φ,K 相乘代表矩阵相乘):

$$-\frac{1}{\hbar}\sum_\alpha\varepsilon_E^4\sum_\beta\varepsilon_E^4\frac{1}{2}\varphi_{\alpha E}K_{\alpha\beta E}\varphi_{\beta E} + \sum_\alpha\varepsilon_E^4 J_{\alpha E}\varphi_{\beta E}$$
$$= -\sum_{\sigma\tau}\frac{1}{2}(\varepsilon_E^4\varphi_E T^{-1})_\sigma\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}\delta_{\sigma\tau}(T\varepsilon_E^4\varphi_E)_\tau + \sum_\alpha J_{\alpha E}(\varepsilon_E^4\varphi_E)_\alpha$$
$$= -\sum_\sigma\frac{1}{2}\left[(\varepsilon_E^4\varphi_E T^{-1})_\sigma\sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (J_E T^{-1})_\sigma\sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}}\right]\cdot\left[\sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}}(T\varepsilon_E^4\varphi_E)_\sigma - \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}}(TJ_E)_\sigma\right]$$
$$+\frac{\hbar}{2}\sum_{\sigma\tau}(J_E T^{-1})_\sigma\frac{1}{\lambda_{\sigma E}}\delta_{\sigma\tau}(TJ_E)_\tau \tag{2.6}$$

由于(2.5)的定义,可写出

$$K^{-1}_{\alpha\beta E} = T^{-1}_{\alpha\sigma}\frac{1}{\lambda_{\sigma E}}\delta_{\sigma\tau}\acute{T}_{\tau\beta}$$
$$K_{\alpha\beta E} = T^{-1}_{\alpha\sigma}\lambda_{\sigma E}\delta_{\sigma\tau}T_{\tau\beta} \tag{2.7}$$

(显然满足 $K^{-1}_{\alpha\beta E}K_{\beta\gamma E}=\delta_{\alpha\gamma}$)。于是(2.3)写成:

$$(2.3) = \lim_{\varepsilon_E\to 0}\int\prod_\alpha d\varphi_{\alpha E}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_\sigma\left[(\varepsilon_E^4\varphi_E T^{-1})_\sigma\sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (J_E T^{-1})_s\sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}}\right]\right.$$
$$\left.\cdot\left[\sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}}(T\varepsilon_E^4\varphi_E)_\sigma - \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}}(TJ_E)_\sigma\right] + \frac{\hbar}{2}\sum_{\alpha\beta}J_{\alpha E}K^{-1}_{\alpha\beta E}J_{\beta E}\right\}$$

因为 $\tilde{T}=T^{-1}$,

$$(\varepsilon_E^4\varphi_E T^{-1})_\sigma\sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (J_E T^{-1})_\sigma\sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}} = (T\varepsilon_E^4\varphi_E)_\sigma\sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (TJ_E)_\sigma\sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}}$$

所以(2.3)又写成:

$$(2.3) = \lim_{\varepsilon_E\to 0}\int\prod_\alpha d\varphi_{\alpha E}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_\alpha\left[(T\varepsilon_E^4\varphi_E)_\sigma\sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (TJ_E)_\sigma\sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}}\right]^2\right.$$

$$+\frac{\hbar}{2}\sum_{\alpha\beta}J_{\alpha E}K^{-1}_{\alpha\beta E}J_{\beta E}\Big\}$$

前已假定这积分是满足高斯型的要求的，立刻可以积出来：

$$(2.3)=\lim_{\varepsilon_E\to 0}\frac{1}{\text{Det}\,|T|}\Big(\prod_{\alpha}\frac{\sqrt{\hbar}}{\varepsilon_E^4\sqrt{\lambda_{\sigma E}}}\Big)\exp\Big(\frac{\hbar}{2}\sum_{\alpha\beta}J_{\alpha E}K^{-1}_{\alpha\beta E}J_{\beta E}\Big)$$

$$=\lim_{\varepsilon_E\to 0}\frac{1}{(\text{Det}\,|K_{\alpha\beta E}|)^{1/2}}\Big(\prod_{\alpha}\frac{\sqrt{\hbar}}{\varepsilon_E^4}\Big)\exp\Big(\frac{\hbar}{2}\sum_{\alpha}\varepsilon_E^4\sum_{\beta}\varepsilon_E^x J_{\alpha E}\frac{K^{-1}_{\alpha\beta E}}{\varepsilon_E^8}J_{\beta E}\Big)$$

$$(\text{Det}\,|K_{\alpha\beta E}|=\text{Det}\,|T|\prod_{\alpha}\lambda_{\sigma E}\text{Det}\,|T|\text{，见(2.7)式})\tag{2.8}$$

回到连续的情况，取

$$\sum_{\alpha}\varepsilon_E^4\to\sum_{\alpha}\int_{\delta V_\alpha}\mathrm{d}^4x_{\alpha E},\qquad \sum_{\beta}\varepsilon_E^4\to\sum_{\beta}\int_{\delta V_\beta}\mathrm{d}^4x_{\beta E}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_E^8}K^{-1}_{\alpha\beta E}\to K^{-1}_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})\qquad K_{\alpha\beta E}\to K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})$$

满足

$$\varepsilon_E^4\frac{1}{\varepsilon_E^8}K^{-1}_{\alpha\beta E}\cdot K_{\beta\gamma E}=\frac{1}{\varepsilon_E^4}\delta_{\alpha\gamma}\to\delta^4(x_{\alpha E}-x_{\gamma E})\delta_{\alpha\gamma}$$

$$=\sum_{\beta}\int\mathrm{d}^4x_{\beta E}K^{-1}_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})\cdot K_{\beta\gamma}(x_{\beta E}-x_{\gamma E})$$

自(2.2)，(2.3)，(2.8)（这里 $\text{Det}|K_{\alpha\beta E}|$ 是常数）：

$$\int\mathrm{d}(\varphi)\exp\Big[\int\mathrm{d}^4x_E\Big(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_0(x_E)+J(x_E)\varphi(x_E)\Big)\Big]$$

$$=\text{常数}\cdot\exp\Big[\frac{\hbar}{2}\int\mathrm{d}^4x_{\alpha E}\mathrm{d}^4x_{\beta E}J_\alpha(x_{\alpha E})K^{-1}_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})J_\beta(x_{\beta E})\Big]^{①}\tag{2.9}$$

现在就来讨论一下规范场的情况，取 $\mathscr{L}_0$（A 二次项）如下：

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}(\partial_{\mu E}A^i_{\nu E}-\partial_{\nu E}A^i_{\mu E})(\partial_{\mu E}A^i_{\nu E}-\partial_{\nu E}A^i_{\mu E})$$

看来 $\mathscr{L}_0$ 是负定的，因为 $A^i_{\nu E}$ 是实的，$x_{\mu E}$ 也是实的。但在 $\mathrm{d}(A^i_{\mu E})$ 积分时，由于 $\text{Det}|K_{\alpha\beta E}|=0$（见后面§2－3一节），所以 $K_{\alpha\beta}$ 必定有等于零的本征值，例如 $\lambda_{\sigma_0 E}=0$。于是作变数变换

$$\Big(\prod_{\alpha}dA_\alpha\Big)\to\Big(\prod_{\alpha}d(\varepsilon_E^4TA)_\alpha\Big)=\prod_{\alpha}dA'_\alpha$$

之后，$\mathrm{d}(\varepsilon_E^4TA)_{\sigma_0}=\mathrm{d}A'_{\sigma_0}$ 的积分都是没有阻尼因子的。结果就在这最初始的运算中受阻了，因为 $\mathrm{d}A'_{\sigma_0}$ 的积分是发散的，(2.2)和(2.3)是无意义的了。

要解决这个困难，可以加上规范确定项：

$$-\frac{1}{2}(C^\alpha(A,\varphi))^2\tag{2.10}$$

（A 是规范场，φ 是 Higgs 场，等等）。取 $C^\alpha(A,\varphi)$ 为实的，则

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}(\partial_{\mu E}A^i_{\nu E}-\partial_{\nu E}A^i_{\mu E})(\partial_{\mu E}A^i_{\nu E}-\partial_{\nu E}A^i_{\mu E})-\frac{1}{2}(C^\alpha(A,\varphi))^2\tag{2.11}$$

---

① 这里对 α、β 重复出现理解为对 α、β 求和，略去了求和记号 $\sum_{\alpha\beta}$，下同。

仍是负定的。而且，加了规范确定项之后，不会再出现$K_{\alpha\beta}$的本征值为零的困难。当$A,\varphi\to\pm\infty$时，$\mathscr{L}_0\to-\infty$的条件也得到满足。于是，积分就可成为一个正常的高斯型积分了。积分后就得到(2.9)。

2. 复场的情况：φ_E,φ_E^*（包括复标量场φ和复矢量场A_μ^i）是复的，而$L[\varphi_E]$是厄米的。自(2.4)，$L[\varphi_E^*,\varphi_E]$写成：

$$L[\varphi_E^*,\varphi_E]=\int-\mathrm{d}^4x_{\alpha E}\mathrm{d}^4x_{\beta E}\varphi_\alpha^*(x_{\alpha E})K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})\varphi_\beta(x_{\beta E})$$

$$=-\int\mathrm{d}^4x_{\alpha E}\mathrm{d}^4x_{\beta E}\varphi_\beta^*(x_{\beta E})K_{\alpha\beta}^*(x_{\alpha E}-x_{\beta E})\varphi_\alpha(x_{\beta E})$$

$$=-\int\mathrm{d}^4x_{\alpha E}\mathrm{d}^4x_{\beta E}\varphi_\alpha^*(x_{\alpha E})K_{\beta\alpha}^*(x_{\beta E}-x_{\alpha E})\varphi_\alpha(x_{\beta E})$$

$$\therefore\qquad\frac{\delta^2L[\varphi_E^*,\varphi_E]}{\delta\varphi_\alpha^*(x_{\alpha E})\delta\varphi_\beta(x_{\beta E})}=-K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})=-K_{\beta\alpha}^*(x_{\beta E}-x_{\alpha E})$$

可见(2.4)中的$K_{\alpha\beta E}$是厄米的，

$$K_{\alpha\beta E}=K_{\alpha\beta E}^+\tag{2.12}$$

存在$T(T^{-1}=T^+)$，使得$K_{\alpha\beta E}$对角化

$$T_{\sigma\alpha}K_{\alpha\beta E}T_{\beta\tau}^+=\lambda_{\sigma E}\delta_{\sigma\tau}\tag{2.13}$$

可仿照附录一§A1－2的办法，来证明这点：

由$T_{\sigma\alpha}K_{\alpha\beta}T_{\beta\tau}^{-1}=\lambda_\sigma\delta_{\sigma\tau}$入手，

$$T_{\sigma\alpha}K_{\alpha\beta}=\lambda_\sigma T_{\sigma\beta}\tag{a}$$

$$T_{\tau\alpha}K_{\alpha\beta}=\lambda_\tau T_{\tau\beta}\tag{b}$$

$K_{\alpha\beta}$厄米，本征值$\lambda_\sigma,\lambda_\tau$都是实的。

把(a)中的T转置，利用(2.12)：

$$K_{\beta\alpha}^*\widetilde{T}_{\alpha\sigma}=\widetilde{T}_{\beta\sigma}\lambda_\sigma$$

取复共轭

$$K_{\beta\alpha}T_{\alpha\sigma}^+=T_{\beta\sigma}^+\lambda_\sigma$$

$$\therefore T_{\tau\beta}K_{\beta\alpha}T_{\alpha\sigma}^+=T_{\tau\beta}T_{\beta\sigma}^+\lambda_\sigma\tag{a$'$}$$

又自(b)得

$$T_{\tau\alpha}K_{\alpha\beta}T_{\beta\alpha}^+=T_{\tau\beta}T_{\beta\sigma}^+\lambda_\tau\tag{b$'$}$$

(a)′与(b)′左方相等：

$$(\lambda_\tau-\lambda_\sigma)T_{\tau\beta}T_{\beta\sigma}^+=0$$

$$\therefore T_{\tau\beta}T_{\beta\sigma}^+=0\qquad(当\ \tau\neq\sigma)$$

可取 $$T_{i\beta}T_{\beta i}^+=T_{i\beta}T_{i\beta}^*=1\qquad(i\ 不求和)$$

则立刻得到

$$T_{\alpha\beta}T_{\beta i}^+=\delta_{\alpha\gamma}$$

$$T_{\beta i}^+=T_{\beta i}^{-1}$$

于是(2.4)中的[…]可如下处理：

$$
\begin{aligned}
[\cdots] &= \sum_\sigma (\varepsilon_E^4 \varphi_E^* T^{-1})_\sigma \frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar} (T\varepsilon_E^4 \varphi_E)_\sigma \\
&+ \sum_\sigma (\varepsilon_E^4 \varphi_E^* T^{-1})_\sigma (TJ_E)_\sigma + \sum_\sigma (J_E^* T^{-1})_\sigma (T\varepsilon_E^4 \varphi_E)_\sigma \\
&= -\sum_\sigma \left[(\varepsilon_E^4 \varphi_E^* T^+)_\sigma \sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (J_E^* T^+)_\sigma \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}} \right] \\
&\cdot \left[\sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} (T\varepsilon_E^4 \varphi_E)_\sigma - \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}} (TJ_E)_\sigma \right] + \hbar \sum_\sigma (J_E^* T^+)_\sigma \frac{1}{\lambda_{\sigma E}} (TJ_E)_\sigma
\end{aligned}
$$

这里 $\left[(\varepsilon_E^4 \varphi_E^* T^+)_\sigma \sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (J_E^* T^*)_\sigma \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}} \right] = \left[(T\varepsilon_E^4 \varphi_E^*)_\sigma \sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (TJ_E) \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}} \right]^*$

所以

$$
\begin{aligned}
(2.4) = \lim_{\varepsilon_E \to 0} \int \prod_\alpha d\varphi_{\alpha E}^* d\varphi_{\alpha E} \exp \Bigg\{ &- \sum_\sigma \left[(T\varepsilon_E^4 \varphi_E)_\sigma \sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (TJ_E)_\sigma \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}} \right]^* \\
&\cdot \left[(T\varepsilon_E^4 \varphi_E)_\sigma \sqrt{\frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar}} - (TJ_E)_\sigma \sqrt{\frac{\hbar}{\lambda_{\sigma E}}} \right] + \hbar \sum_\sigma J_{\sigma E}^* K_{\sigma\tau E}^{-1} J_{\tau E} \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

这里利用了(2.13)：

$$
K_{\alpha\beta E} = T_{\alpha\sigma}^+ \lambda_{\sigma E} \delta_{\sigma\tau} T_{\tau\beta}
$$

$$
K_{\alpha\beta E}^{-1} = T_{\alpha\sigma}^+ \frac{1}{\lambda_{\sigma E}} \delta_{\sigma\tau} T_{\tau\beta}
$$

显然满足 $K_{\alpha\beta E}^{-1} K_{\beta\gamma E} = \delta_{\alpha\gamma}$。

前已假定(2.4)积分是满足高斯型积分要求的，所以现在就可以对(2.14)进行积分。先分析实数部和虚数部如下：

$$
\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+ib) \qquad \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-ib) \qquad \frac{\partial(\varphi,\varphi^*)}{\partial(a,b)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -i
$$

$$
|d\varphi d\varphi^*| = |da db|
$$

$$
\rho = (T\varphi) \qquad \rho^* = (\varphi^* T^+) \qquad |d\rho d\rho^*| = \mathrm{Det}|T| \, \mathrm{Det}|T^+| \, d\varphi d\varphi^*
$$

$$
\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(A+iB) \qquad \rho^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(A-iB) \qquad \frac{\partial(\rho,\rho^*)}{\partial(A,B)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -i
$$

$$
|d\rho d\rho^*| = |dA dB|
$$

$$
\therefore |da db| = |d\varphi d\varphi^*| = \frac{1}{\mathrm{Det}|T| \, \mathrm{Det}|T^+|} |d\rho d\rho^*| = \frac{1}{\mathrm{Det}|T| \, \mathrm{Det}|T^+|} |dA dB|
\tag{2.15}
$$

∴ 在(2.14)中出现的是(平移部分不必写出来)：

$$
e^{-\sum_\sigma \varepsilon_E^4 \rho_{\sigma E}^* \frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar} \varepsilon_E^4 \rho_{\sigma E}} = e^{-\sum_\sigma \frac{1}{2} \varepsilon_E^4 A_{\sigma E} \frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar} \varepsilon_E^4 A_{\sigma E} - \sum_\sigma \frac{1}{2} \varepsilon_E^4 B_{\sigma E} \frac{\lambda_{\sigma E}}{\hbar} \varepsilon_E^4 B_{\sigma E}}
$$

而且$|d\varphi d\varphi^*|$与$|dAdB|$有(2.15)的关系,所以:

$$(2.4) = \lim_{\varepsilon_E\to 0}\frac{1}{\mathrm{Det}|T|\,\mathrm{Det}|T^+|}\prod_\sigma \frac{\sqrt{2\pi\hbar}}{\varepsilon_E^4\sqrt{\lambda_{\sigma E}}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi\hbar}}{\varepsilon_E^4\sqrt{\lambda_{\sigma E}}}$$

$$\cdot\exp\left(\hbar\sum_\sigma\varepsilon_E^4\sum_\tau\varepsilon_E^4 J_{\sigma E}^*\frac{K_{\sigma\tau E}^{-1}}{\varepsilon_E^8}J_{\tau E}\right)$$

再从离散回到连续,取

$$\sum_\sigma\varepsilon_E^4\to\sum_\sigma\int_{\delta V_\sigma}d^4x_{\sigma E},\qquad \sum_\tau\varepsilon_E^4\to\sum_\tau\int_{\delta V_\tau}d^4x_{\tau E}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_E^8}K_{\sigma\tau E}^{-1}\to\kappa_{\sigma\tau}^{-1}(x_{\sigma E}-x_{\tau E}),\qquad K_{\sigma\tau E}^{-1}\to K_{\sigma\tau}(x_{\sigma E}-x_{\tau E})$$

得到(这里$\mathrm{Det}|\kappa_{\alpha\beta E}|$是常数):

$$(2.4) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\mathrm{Det}|K_{\alpha\beta E}|}\prod_\sigma\frac{\hbar}{\varepsilon_E^8}\exp\left(\hbar\sum_\sigma\varepsilon_E^4\sum_\sigma\varepsilon_E^4 J_{\sigma E}^*\frac{K_{\sigma\tau E}^{-1}}{\varepsilon_E^8}J_{\tau E}\right)$$

$$\left(\text{用 }\mathrm{Det}|K_{\alpha\beta E}| = \mathrm{De}|T^+|\,\mathrm{Det}|T|\prod_\alpha\lambda_{\sigma E}\qquad(\text{自 }2.13)\right)$$

$$= \text{常数}\exp\left(\hbar\int d^4x_{\sigma E}d^4x_{\tau E}J_\sigma^*(x_{\sigma E})K_{\sigma\tau}^{-1}(x_{\sigma E}-x_{\tau E})J_\tau(x_{\tau E})\right)\qquad(2.16)$$

把(2.9),(2.16)对比一下:

$$(2.3) = \text{常数}\exp\left(\frac{\hbar}{2}\int d^4x_{\alpha E}d^4x_{\beta E}J_\alpha(x_{\alpha E})K_{\alpha E}^{-1}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})J_\beta(x_{\beta E})\right)$$

$$(2.4) = \text{常数}\exp\left(\hbar\int d^4x_{\alpha E}d^4x_{\beta E}J_\alpha^*(x_{\alpha E})K_{\alpha E}^{-1}(x_{\alpha E}-x_{\beta E})J_\beta(x_{\beta E})\right)\qquad(2.17)$$

两者是很相像的。

现在要问,$K_{\alpha E}^{-1}(x_E-y_E)$是什么?取最简单的标量场为例:

$$\mathscr{L}_0(x_E) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x_E)}{\partial x_{\mu E}}\frac{\partial\varphi(x_E)}{\partial x_{\mu E}}-\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x_E)\,(\text{实})$$

$$\mathscr{L}_0(x_E) = -\frac{\partial\varphi^*(x_E)}{\partial x_{\mu E}}\frac{\partial\varphi(x_E)}{\partial x_{\mu E}}-\mu^2\varphi^*(x_E)\varphi(x_E)\,(\text{复})\qquad(2.18)$$

先看实的情况:

$$\frac{1}{\hbar}\int d^4x_E\mathscr{L}_0(x_E) = \frac{1}{\hbar}\int d^4x_E d^4y_E\varphi(x_E)\frac{1}{2}(\Box_E-\mu^2)\delta^4(x_E-y_E)\varphi(y_E)$$

与(2.3)比较:

$$K(x_E-y_E) = -(\Box_E-\mu^2)\delta^4(x_E-y_E) = \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik(x_E-y_E)}(k_E^2+\mu^2)$$

$$(k_E = (k_1,k_2,k_3,v))\qquad(2.19)_1$$

相应地有:

$$K^{-1}(x_E-y_E) = \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_E(x_E-y_E)}\frac{1}{k_E^2+\mu^2}\qquad(2.19)_2$$

满足$\int K(x_E-y_E)K^{-1}(y_E-z_E)d^4y_E = \delta^4(x_E-z_E)$

再看复的情况:

$$\frac{1}{\hbar}\int d^4x_E\mathscr{L}_0(x_E) = \frac{1}{\hbar}\int d^4x_E d^4y_E\varphi^*(x_E)(\Box_E - \mu^2)\delta^4(x_E - y_E)\varphi(y_E)$$

与(2.4)比较,也得到

$$K(x_E - y_{E}) = -(\Box_E - \mu^2)\delta^4(x_E - y_E)$$

所以 K 和 K^{-1} 同实的情况一样。

关于矢量场,特别是规范场的情况,将在§2-3中计论和给出例子。

现在,既然已经有了一个 $K^{-1}(x_E - y_F)$,就要来回答本节一开头所提出的第二个题,即怎样把传播子转回到闵氏空间去。

我们把 $K^{-1}(x_E)$ 写成:

$$K^{-1}(\mathbf{x},\tau) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\upsilon}{2\pi}\frac{e^{i\upsilon\tau}}{\upsilon^2+\mathbf{k}^2+\mu^2}$$

定义:

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2+\mu^2}$$

由于 $\frac{\partial}{\partial\tau}K^{-1}(\mathbf{x},\tau)|_{\tau=0} = 0$ $\quad$ $\frac{\partial^2}{\partial\tau_2}K^{-1}(\mathbf{x},\tau)|_{\tau=0} =$ 发散

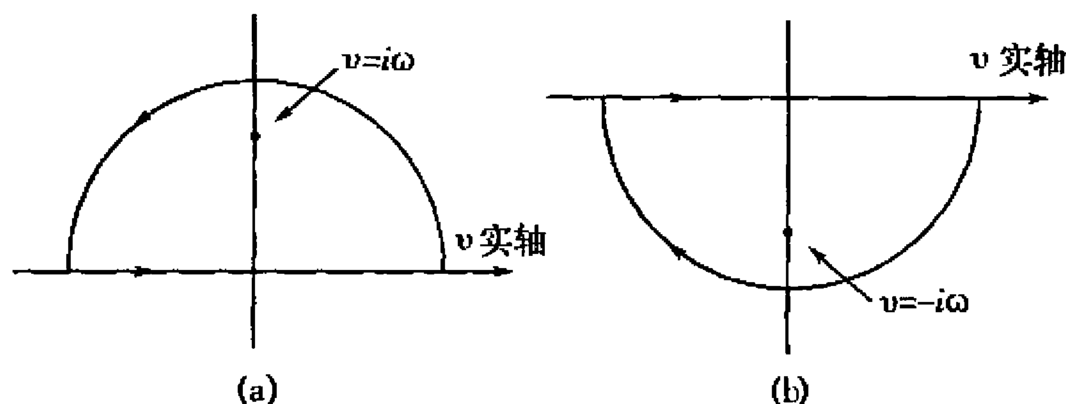


图 2.1

所以在 $\tau=0$ 有奇点,不能从 $\tau=0$ 出发延拓到虚轴上去,而必须如前一章所说,在 $\tau\neq0$ 通过转动来延拓:

$\tau>0$ 时 $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\upsilon}{2\pi}\frac{e^{i\upsilon\tau}}{\upsilon^2+\omega^2} = \frac{e^{-\omega\tau}}{2\omega}$ $\quad$ 图2.

$\tau<0$ 时 $\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\upsilon}{2\pi}\frac{e^{i\upsilon\tau}}{\upsilon^2+\omega^2} = \frac{e^{\omega\tau}}{2\omega}$ $\quad$ 图2.1

现在作反时针转动,$\tau\to it$ 如图

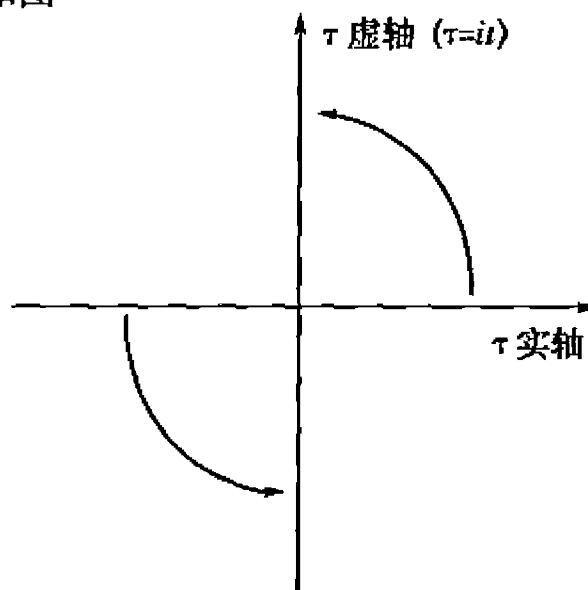


图 2.2

τ 的正实轴上的点$\to it(t>0)$

τ 的负实轴上的点$\to it(t<0)$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{2\pi}\frac{e^{i\upsilon E}}{\upsilon^2+\omega^2}=\begin{cases}\frac{e^{-\omega\tau}}{2\omega}\theta(\tau)\overset{\text{转}90^\circ}{\to}\frac{e^{-i\omega t}}{2\omega}\theta(t)\\ \frac{e^{\omega\tau}}{2\omega}\theta(-\tau)\overset{\text{转}90^\circ}{\to}\frac{e^{i\omega\tau}}{2\omega}\theta(-t)\end{cases}$$

$$\overset{\text{合并}}{=\!=\!=}\frac{1}{2\omega}(e^{-i\omega t}\theta(t)+e^{i\omega t}\theta(-t))$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\frac{e^{-i\omega t}}{2\omega}\frac{e^{i\lambda t}}{\lambda-i\varepsilon}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\frac{e^{i\omega t}}{2\omega}\frac{e^{-i\lambda t}}{\lambda-i\varepsilon}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\omega}\left(\frac{e^{-ik_0t}}{\omega-k_0-i\varepsilon}+\frac{e^{-ik_0t}}{\omega+k_0-i\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0\frac{e^{-ik_0t}}{\omega^2-k_0^2-i\varepsilon}=\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_0\frac{e^{-ik_0t}}{\boldsymbol{k}^2-k_0^2+\mu^2-i\varepsilon}\tag{2.20}$$

从而

$$K^{-1}(x_E)=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{2\pi}\frac{e^{i\tau}}{\upsilon^2+k_0^2+\mu^2}$$

$$\xrightarrow{\text{转到闵氏空间}}=\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}k_0}{(2\pi)^4}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ik_0t}\frac{-i}{\boldsymbol{k}^2-k_0^2+\mu^2-i\varepsilon}\tag{2.21}$$

于是,按照第一章的规则(1.97)把(2.17)第一式代入(我们注意到(2.1)~(2.4)都是没有相互作用项 $\mathscr{L}_1$ 时的 $W(J)$),对 $J(x_E)$,$J(y_E)$微分,立刻得到,

$$\langle 0|T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)|0\rangle_{\text{无相互作用时}}$$

$$=\hbar K^{-1}(x_E-y_E)\Big|_{\substack{x_E\to x\\ y_E\to y}}=\hbar\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}k_0}{(2\pi)^3}(-i)\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-ik_0(t_x-t_y)}}{\boldsymbol{k}^2-k_0^2+\mu^2-i\varepsilon}\tag{2.22$_1$}$$

这就是 φ 场的自由传播子。

再把(2.17)第二式代入(1.97),对 $J^*(x_E)$,$J(y_E)$求微商则也立刻得到:

$$\langle 0|T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^*(y)|0\rangle_{\text{无相互作用时}}$$

$$=\hbar K^{-1}(x_E-y_E)\Big|_{\substack{x_E\to x\\ y_E\to y}}=\overline{\hbar}\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}k_0}{(2\pi)^4}(-i)\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-ik_0(t_x-t_y)}}{\boldsymbol{k}^2-k_0^2+\mu^2-i\varepsilon}\tag{2.22$_2$}$$

按照通常的习惯,把闵氏空间的传播子定义为:

$$\Delta(x_E)=\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}k_0}{(2\pi)^4}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-ik_0t}\frac{-i}{\boldsymbol{k}^2-k_0^2+\mu^2-i\varepsilon}\tag{2.23}$$

则欧氏空间的这个传播子应是:

$$\Delta(x_E)=K^{-1}(x_E)=\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}k_0}{(2\pi)^4}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\upsilon\tau}\frac{1}{\boldsymbol{k}^2+\upsilon^2+\mu^2}\tag{2.24}$$

然后,我们再试取闵氏空间的 $\mathscr{L}_0$ 为:

$$\mathscr{L}_0(x)=-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}-\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2(x)+\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2(x)$$

$$\mathscr{L}_0(x)=-\frac{\partial\varphi^*(x)}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\mu}-\mu^2\varphi^*(x)\varphi(x)+i\varepsilon\varphi^*(x)\varphi(x)\tag{2.25}$$

在闵氏空间作泛函积分，用(2.25)上面一式：

$$\int d(\varphi)\exp\left\{\int d^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x)+iJ(x)\varphi(x)\right]\right\}$$

$$=\int d(\varphi)\exp\left\{\int d^4xd^4y\left[\frac{i}{\hbar}\varphi(x)^{1/2}(\Box-\mu^2+i\varepsilon)\delta^4(x-y)\varphi(y)\right]\right.$$

$$\left.+\int d^4xiJ(x)\varphi(x)\right\}$$

$$=\int d(\varphi)\exp\left\{\int d^4xd^4y\left[\frac{i}{\hbar}\varphi(x)\left(-\frac{1}{2}\underline{K}(x-y)\right)\varphi(y)\right]\right.$$

$$\left.+\int d^4xiJ(x)\varphi(x)\right\} \tag{2.26}$$

$$\underline{K}(x)=-(\Box-\mu^2+i\varepsilon)\delta^4(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x-ik_0t}(k^2-k_0^2+\mu^2-i\varepsilon) \tag{2.27}$$

$$\underline{K}^{-1}(x)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x-ik_0t}\frac{1}{k^2-k_0^2+\mu^2-i\varepsilon}$$

这个积分是一个赝高斯积分，全部运算过程都和前面的高斯型积分相仿，积分后得到：

$$(2.26)=\text{常数}\cdot\exp\left(i\hbar\int d^4xd^4yJ(x)\frac{\underline{K}^{-1}(x-y)}{2}J(y)\right) \tag{2.28}$$

再利用(1.97)的左方，只是此时没有相互作用的 $W[J]$ 中的 $\mathscr{L}_0$ 加了一个小项 $\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2$，得到

$$\langle 0|T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)|0\rangle_{\text{无相互作用时}}=\frac{1}{i^2}i\hbar\underline{K}^{-1}(x-y)$$

$$=\hbar\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)-ik_0(t_x-t_y)}\frac{-i}{k^2-k_0^2+\mu^2-i\varepsilon} \tag{2.29$_1$}$$

与 $(2.22)_1$ 一致。

又用(2.25)下面一式作闵式空间的泛函积分，其过程也和以前一样，得到

$$\int d(\varphi^*)d(\varphi)\exp\left\{\int d^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x)+iJ^*(x)\varphi(x)+i\varphi^*(x)J(x)\right]\right\}$$

$$=\int d(\varphi^*)d(\varphi)\exp\left\{\int d^4xd^4y\left[\frac{i}{\hbar}(-\varphi^*(x)\underline{K}(x-y)\varphi(y))\right]\right.$$

$$\left.+i\int d^4x(J^*(x)\varphi(x)+\varphi^*(x)J(x))\right\}$$

$$=\text{常数}\exp(i\hbar\int d^4xd^4yJ(x)\underline{K}^{-1}(x-y)J(y) \tag{2.30$_1$}$$

这里的 $\underline{K}$, $\underline{K}^{-1}$ 就是(2.27)所定义的。

再利用(1.97)的左方，此式也是没有相互作用的 $W[J^*,J]$ 中的 $\mathscr{L}_0$ 加了一个小项 $i\varepsilon\varphi^*\varphi$，得到

$$\langle 0|T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^*(y)|0\rangle_{\text{无相互作用时}}=\frac{1}{i^2}i\hbar\underline{K}^{-1}(x-y)$$

$$=\hbar\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)-ik_0(t_x-t_y)}\frac{-i}{k^2-k_0+\mu^2-i\varepsilon} \tag{2.29$_2$}$$

和$(2.22)_2$一致。

这样，我们就用实际的例子说明了先在欧氏空间求泛函微分，然后再转回到闵氏空间的做法，等价于直接在闵氏空间求泛函微分，时间 t 的积分从 $-\infty$ 到 $+\infty$，同时在 $\mathscr{L}_0$ 上加一个小项 $\frac{i}{2}\varepsilon\varphi^2$ 或 $i\varepsilon\varphi^*\varphi$。所讨论的两个例子是具有代表性的，下一节将看到，费米场的传播子也是如些。

§2－2 费米场的传播子

如果 $\varphi,\bar{\varphi}$ 是反对易的场（费米场），路径积分怎么办？

Grassmann 代数

设 $\rho,\bar{\rho}$ 是反对易的 c－数变数（ρ 和 $\bar{\rho}$ 互相独立）：

$$\rho\bar{\rho}+\bar{\rho}\rho=0 \quad \rho^2=0, \quad \bar{\rho}^2=0 \tag{2.30_2}$$

它们构成 Crassmann 代数。

还可以引入微小的 $d\rho\cdot d\bar{\rho}$，则也有如下关系：

$$\{d\rho,d\bar{\rho}\}_+=0,\{d\rho,\rho\}_+=0,\{d\bar{\rho},\bar{\rho}\}=0 \tag{2.31_1}$$

自第一式有

$$\int d\rho\int d\bar{\rho}+\int d\bar{\rho}\int d\rho=0 \tag{2.31_2}$$

与此不矛盾的 $\int d\rho$ 积分与 $\int d\bar{\rho}$ 积分应规定如下：

$$\int d\rho=\int d\bar{\rho}=0 \tag{2.32}$$

又自(2.31)的第二式有

$$\int d\rho\cdot\rho+\int\rho d\rho=-\int\rho d\rho+\int\rho d\rho=0 \tag{2.31_3}$$

这不要求 $\int\rho d\rho=0$，但要求 $\int\rho d\rho$ 是一个常数（因为积分后不再是变数）。又因为在路径积分量子化中，积分出来的常数因子是不起作用无关紧要的，所以可以规定常数为 1，于是

$$\int\rho d\rho=\int\bar{\rho}d\bar{\rho}=1 \tag{2.33}$$

在(2.32)，(2.33)的基础上，就可以来讨论费米场的路径积分。

费米场的路径积分

先证明几个性质：

1.
$$\int e^{-\bar{\rho}\rho}d\bar{\rho}d\rho=1 \tag{2.34}$$

证明：

$$\int e^{-\bar{\rho}\rho}d\bar{\rho}d\rho=\int\left(1-\bar{\rho}\rho+\frac{1}{2!}\bar{\rho}\rho\bar{\rho}\rho-\frac{1}{3!}\bar{\rho}\rho\bar{\rho}\rho\bar{\rho}\rho+\cdots\right)d\bar{\rho}d\rho$$

$$= \int -\bar{\rho}\rho d\bar{\rho}d\rho = \int\bar{\rho}d\bar{\rho}\int\rho d\rho = 1$$

2. $$\int\rho e^{-\bar{\rho}\rho}d\bar{\rho}d\rho = \int\bar{\rho}e^{-\bar{\rho}\rho}d\bar{\rho}d\rho = 0 \tag{2.35}$$

证明:

$$\int\rho e^{-\bar{\rho}\rho}d\bar{\rho}d\rho = \int\rho d\bar{\rho}d\rho = -\int d\bar{\rho}\int\rho d\rho = 0$$

$$\int\bar{\rho}e^{-\bar{\rho}\rho}d\bar{\rho}d\rho = \int\bar{\rho}d\rho\int d\rho = 0$$

3. $$\int e^{-\bar{\rho}\rho+\bar{\chi}\rho+\bar{\rho}\chi}d\bar{\rho}d\rho = e^{\bar{\chi}\chi} \tag{2.36}$$

($\chi,\bar{\chi}$ 也是反对易 c-数)

证明:

$$\int e^{-\bar{\rho}\rho+\bar{\chi}\rho+\bar{\rho}\chi}d\bar{\rho}d\rho = \int e^{-(\bar{\rho}-\bar{\chi})(\rho-\chi)}\cdot e^{\bar{\chi}\chi}d\bar{\rho}d\rho$$

$$= \int e^{-(\bar{\rho}-\bar{\chi})(\rho-\chi)}d(\bar{\rho}-\bar{\chi})d(\rho-\chi)e^{\bar{\chi}\chi} = e^{\bar{\chi}\chi}$$

4. $$\int e^{-\bar{\rho}_iK_{ij}\rho_j}\prod_i d\bar{\rho}_i\prod_j d\bar{\rho}_j = \mathrm{Det}\mid K_{ij}\mid \tag{2.37}$$

证明:由于 $\bar{\rho}_i,\rho_j$ 的反对易性质(2.30),有

$$\int e^{-\bar{\rho}_iK_{ij}\rho_j}\prod_i d\bar{\rho}_i\prod_j d\bar{\rho}_j = \int\prod_{ij}(1-\bar{\rho}_i\kappa_{ij}\rho_j)\prod_i d\bar{\rho}_i\prod_j d\rho_j$$

(有 $\bar{\rho}_i^2,\rho_j^2$ 的项都等于零)

$$= \int(1-\bar{\rho}_1K_{11}\rho_1)(1-\bar{\rho}_1K_{12}\rho_2)\cdots(1-\bar{\rho}_nK_{n1}\rho_1)(1-\bar{\rho}_nK_{n2}\rho_2)\cdots$$

$$\cdots(1-\bar{\rho}_nK_{nn}\rho_n)d\bar{\rho}_1d\rho_1\cdot d\bar{\rho}_2d\rho_2\cdots d\bar{\rho}_nd\rho_n$$

$$= \int(1+K_{11}\rho_1\bar{\rho}_1)(1+K_{12}\rho_2\bar{\rho}_1)\cdots(1+K_{n1}\rho_1\bar{\rho}_n)(1+_{Kn2}\rho_2\bar{\rho}_n)\cdots$$

$$\cdots(1+K_{nn}\rho_n\bar{\rho}_n)\cdot d\bar{\rho}_1d\rho_1\cdot d\bar{\rho}_2d\rho_2\cdots d\bar{\rho}_nd\rho_n = \mathrm{Det}\mid K_{ij}\mid$$

因为积分式中的乘积展开后,积分不等于零的项只能是 n 个 i 指标不相同的 $\bar{\rho}_1$ 与 n 个 j 指标不相同的 ρ_j 全都乘在一起的那些项。这种项共有 $n!$ 个。具体来说,$\bar{\rho}_1$ 可以和 n 个 $\bar{\rho}_j$ 分别搭配(n 种方式),$\bar{\rho}_2$ 可以和余下来的$(n-1)$个 ρ_j 分别搭配($n-1$ 种方式),$\bar{\rho}_3$ 又可以和余下来的$(n-2)$个 $\bar{\rho}_j$ 分别搭配($n-2$ 种方式),……于是,n 个 $\bar{\rho}_i$ 都搭配完后,就会出现 $n!$ 项,每一项里每一个 $\bar{\rho}_i$ 都不多不少出现一次,每一个 ρ_j 也都不多不少出现一次。每个项根据(2.33)积分后,又正好是 n 个 K_{ij}连乘,即

$$\xi_P K_{1j_1}K_{2j_2}\cdots K_{nj_n}$$

$j_1,j_2,\cdots,j_n$ 各不相等。当$j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的偶排列时,$\xi_P=+1$;当$j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的奇排列时,$\xi_P=-1$。所以这 $n!$ 个项正好就是 $\mathrm{Det}|K_{ij}|$中的 $n!$ 个项。

5. $$\int e^{-\bar{\rho}_iK_{ij}\rho_j+\bar{\chi}_i\rho_i+\bar{\rho}_j\chi_j}\prod_{ij}d\bar{\rho}_id\rho_j = \mathrm{Det}\mid K_{ij}\mid e^{\bar{\chi}_iK_{ij}^{-1}\chi_j} \tag{2.38}$$

证明:
$$\int e^{-\bar{\rho}_iK_{ij}\rho_j+\bar{\chi}_i\rho_i+\bar{\rho}_j\chi_j}\prod_{ij}d\bar{\rho}_id\rho_j$$

$$= \int e^{-(\bar{\rho}-\bar{\chi}K^{-1})_i K_{ij}(\rho-K^{-1}\chi)_j} \cdot e^{(\bar{\chi}K^{-1})_i K_{ij}(K^{-1}\chi)_j}$$

$$\cdot \prod_i \mathrm{d}(\bar{\rho}-\bar{\chi}K^{-1})_i \prod_j \mathrm{d}(\rho - K^{-1}\chi)_j$$

利用(2.37)：

$$= \mathrm{Det} \mid K_{ij} \mid e^{\bar{\chi}_i K_{ij}^{-1} \chi_j}$$

以下我们就用与上一节平行的办法，算出费米场的传播子。

与(2.1)对应有①

$$\int \mathrm{d}(\bar{\psi})\mathrm{d}(\psi)\exp\left\{\int \mathrm{d}^4 x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x) + i\bar{\psi}_\alpha(x)\eta_\alpha(x) + i\eta_\alpha(x)\psi_\alpha(x)\right]\right\} \tag{2.39}$$

换到欧氏空间(与(2.2)相对应)：

$$\int \mathrm{d}(\bar{\psi})\mathrm{d}(\psi)\exp\left\{\int \mathrm{d}^4 x_E\left[\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_0(x_E) + \bar{\psi}_\alpha(x_E)\eta_\alpha(x_E) + \bar{\eta}_\alpha(x_E)\psi_\alpha(x_E)\right]\right\}$$

$$= \int \mathrm{d}(\bar{\psi})\mathrm{d}(\psi)\exp\left\{-\int \mathrm{d}^4 x_{\alpha E}\mathrm{d}^4 x_{\beta E}\frac{1}{\hbar}\bar{\psi}_\alpha(x_{\alpha E})K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E} - x_{\beta E})\psi_\beta(x_{\beta E})\right.$$

$$\left. + \int \mathrm{d}^4 x_{\alpha E}(\bar{\psi}_\alpha(x_{\alpha E})\eta_\alpha(x_{\alpha E}) + \bar{\eta}_\alpha(x_{\alpha E})\psi_\alpha(x_{\alpha E}))\right\} \tag{2.40}$$

然后也把欧氏空间离散化，对应于(2.3)，(2.4)：

$$(2.40) = \lim_{\varepsilon_E\to 0}\int\prod_\alpha \mathrm{d}\bar{\psi}_{\alpha E}\mathrm{d}\psi_{\alpha E}\exp\left[-\frac{1}{\hbar}\sum_\alpha \varepsilon_E^4 \sum_\beta \varepsilon_E^4 \bar{\psi}_{\alpha E}K_{\alpha\beta E}\psi_{\beta E}\right.$$

$$\left. + \sum_\alpha \varepsilon_E^4 \bar{\psi}_{\alpha E}\eta_{\alpha E} + \sum_\alpha \varepsilon_E^4 \bar{\eta}_{\alpha E}\psi_{\alpha E}\right]$$

再用(2.38)的积分公式，立刻得到

$$(2.40) = \lim_{\varepsilon_E\to 0}\int\prod_\alpha \mathrm{d}\bar{\psi}_{\alpha E}\mathrm{d}\psi_{\alpha E}\exp\left[-\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\varepsilon_E^4}{\sqrt{\hbar}}\bar{\psi}_E - \sqrt{\hbar}\bar{\eta}_E K_E^{-1}\right)_\alpha K_{\alpha\beta E}\right.$$

$$\left. \cdot\left(\frac{\varepsilon_E^4}{\sqrt{\hbar}}\psi_E - \sqrt{\hbar}K_E^{-1}\eta_E\right)_\beta + \hbar\sum_{\alpha\beta}\bar{\eta}_{\alpha E}K_{\alpha\beta E}^{-1}\eta_{\beta E}\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon_E\to 0}\mathrm{Det}\mid K_{\alpha\beta E}\mid\left(\prod_\alpha\frac{\sqrt{\hbar}}{\varepsilon_E^4}\right)\left(\prod_\alpha\frac{\sqrt{\hbar}}{\varepsilon_E^4}\right)$$

$$\cdot\exp\left(\hbar\sum_\alpha \varepsilon_E^4\sum_\beta \varepsilon_E^4\cdot\bar{\eta}_{\alpha E}\frac{K_{\alpha\beta E}^{-1}}{\varepsilon_E^8}\eta_{\beta E}\right) \tag{2.41}$$

拿(2.41)与(2.16)对比是很有趣的。我们看到主要差别在于(2.16)中的 $\mathrm{Det}\mid K_{\alpha\beta E}\mid$ 是在分母上，而在费米场的情况，(2.41)的 $\mathrm{Det}\mid K_{\alpha\beta E}\mid$ 则是在分子上。第三章将利用这一特点导出 F－P 场。另外，还有 h 和 $\hbar$ 的差别，这只要改一改(2.33)的常数，例如改取 $\int\bar{\psi}d\bar{\psi} =$

---

① 在费米子的情况，

$\pi_\sigma(x) = i\psi_\alpha^+(x)$

$\pi\psi - \mathscr{H} = -\bar{\psi}(\gamma\partial + m)\psi$

$\mathrm{d}(\pi)\mathrm{d}(\psi)$ 写成 $\mathrm{d}(\bar{\psi})\mathrm{d}(\psi)$，不是先把 π 积分积掉。

$\int \psi \mathrm{d}\psi = \sqrt{2\pi}$,就可将(2.41)中的$\hbar$换成$h$,而且已经说过,这个常数的改变不影响物理的结果,是无足轻重的。

回到连续的情况,仍是取

$$\sum_{\alpha} \varepsilon_E^4 \longrightarrow \sum_{\alpha} \int_{\delta V_\alpha} \mathrm{d}^4 x_{\alpha E}, \quad \sum_{\beta} \varepsilon_E^4 \longrightarrow \sum_{\beta} \int_{\delta V_\beta} \mathrm{d}^4 x_{\beta E}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_E^8} K_{\alpha\beta E}^{-1} \longrightarrow K_{\alpha\beta}^{-1}(x_{\alpha E} - x_{\beta E}), K_{\alpha\beta E} \longrightarrow K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E} - x_{\beta E})$$

满足: $$\varepsilon_E^4 \frac{1}{\varepsilon_E^8} \cdot K_{\alpha\beta E} \cdot K_{\beta\gamma E}^{-1} = \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{\varepsilon_E^4}$$

$$\longrightarrow \sum_{\beta} \int \mathrm{d}^4 x_{\beta E} K_{\alpha\beta}(x_{\alpha E} - x_{\beta E}) K_{\beta\gamma}^{-1}(x_{\beta E} - x_{\gamma E}) = \delta^4(x_{\alpha E} - x_{\gamma E}) \delta_{\alpha\gamma}$$

并考虑到 Det | $K_{\alpha\beta E}$ | 不含有场量,而是一个涉及所有空间点的常数; $\prod_{\alpha} \frac{\sqrt{\hbar}}{\varepsilon_E^4}$ 也是常数。于是,与(2.16)对应的是:

$$(2.40) = 常数 \exp\left[\hbar \int \mathrm{d}^4 x_{\alpha E} \mathrm{d}^4 x_{\beta E} \bar{\eta}_\alpha(x_{\alpha E}) K_{\alpha\beta}^{-1}(x_{\alpha E} - x_{\beta E}) \eta_\beta(x_{\beta E})\right] \tag{2.42}$$

举一个具体例子,在 Dirac 场的情况:

$$\mathscr{L}_0(x_E) = -\bar{\psi}(x_E)\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{\mu E}} + m\right)\psi(x_E)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\hbar}\int \mathrm{d}^4 x_E \mathscr{L}_0(x_E) = \frac{1}{\hbar}\int \mathrm{d}^4 x_E\left[-\bar{\psi}(x_E)\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{\mu E}} + m\right)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x_E)\right]$$

$$= \frac{1}{\hbar}\int \mathrm{d}^4 x_E d^4 y_E\left[-\bar{\psi}_a(x_E)\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{\mu E}} + m\right)_{\alpha\beta} \delta^4(x_E - y_E)\psi_\beta(y_E)\right] \tag{2.43}$$

与(2.40)比较,得到

$$K_{\alpha\beta}(x_E - y_E) = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{\mu E}} + m\right)_{\alpha\beta} \delta^4(x_E - y_E)$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{ik_E(x_E - y_E)} (i\gamma_\mu k_{\mu E} + m)_{\alpha\beta} \tag{2.44}$$

$$K_{\alpha\beta}^{-1}(x_E - y_E) = \int \frac{\mathrm{d}^3 k d\upsilon}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y) + i\upsilon(\tau_x - \tau_y)} \left(\frac{1}{i\gamma_\mu k_{\mu E} + m}\right)_{\alpha\beta}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot(x-y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\upsilon}{2\pi} e^{i\upsilon(\tau_x - \tau_y)} \frac{(-i\gamma_\mu k_{\mu E} + m)_{\alpha\beta}}{k^2 + \upsilon_0^2 + m^2}$$
$$\xrightarrow[\text{(方法如前)}]{\text{转到闵氏空间}} = \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot(x-y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} e^{-ik_0(t_x - t_y)} (-i) \frac{(-i\gamma_\mu k_{\mu E} + m)_{\alpha\beta}}{k^2 - k_0^2 + m^2 - i\varepsilon}$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}^3 k dk_0}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y) - ik_0(t_x - t_y)} \frac{(-\gamma_\mu k_\mu - im)_{\alpha\beta}}{k^2 + k_0^2 + m^2 - i\varepsilon} \tag{2.45}$$

$$[k_{\mu E} = (k_1, k_2, k_3, \upsilon), x_E = (x_1, x_2, x_3, \tau_x), \cdots]$$

事实上 $K_{\beta\alpha}^{-1}(x_E - y_E)$ 是：

$$K_{\alpha\beta}^{-1}(x_E - y_E) = \left(-\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_{\mu E}} + m\right)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot(x-y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\upsilon}{2\pi} \frac{i\, e^{\upsilon(t_x - t_y)}}{k^2 + \upsilon^2 + m^2}$$

其中积分部分和(2.21)完全一样，所以利用(2.21)，立刻得到

$$K_{\alpha\beta}^{-1}(x_E - y_E) \xrightarrow{\text{转到闵氏空间}}$$

$$= \left(-\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_{\alpha\beta} \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y) - ik_0(t_x - t_y)} \frac{-i}{k^2 - k_0^2 + m^2 - i\varepsilon}$$
$$= (2.45)$$

显而易见，任何的 $K_{\alpha\beta}^{-1}(x_E - y_E)$，只要它含有 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\upsilon}{2\pi} \frac{e^{i\upsilon(\tau_x - \tau_y)}}{k^2 + \upsilon^2 + m^2}$ 因子(包括 $m^2 = 0$ 的情况)，在转到闵氏空间时总是在分母上出现一个 $-i\varepsilon$。

把(2.45)的 $K_{\alpha\beta}^{-1}(x_E - y_E)$ 代入(2.42)，作为没有相互作用时的 $W_E[\eta, \bar{\eta}]$。然后，按照第一章的规则(1.97)，并考虑到反对易性质，可得到

$$\langle 0 | T\hat{\psi}_\alpha(x_E)\hat{\bar{\psi}}_\beta(y_E) | 0 \rangle_{\text{无相互作用}}$$
$$= \frac{1}{W_E[\eta, \bar{\eta}]_{\text{无相互作用}}} \cdot \left. \frac{\delta^2 W_E[\eta, \bar{\eta}]_{\text{无相互作用}}}{\delta\eta_\beta(y_E)\delta\bar{\eta}_\alpha(x_E)} \right|_{\eta = \bar{\eta} = 0}$$
$$= \hbar K_{\alpha\beta}^{-1}(x_E - y_E) = \hbar \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik\cdot(x-y)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{2\pi} e^{i\nu(\tau_x - \tau_y)} \times \frac{(-i\gamma_\mu k_{\mu E} + m)_{\alpha\beta}}{k^2 + \nu^2 + m^2}$$

再转到闵氏空间，利用(2.45)：

$$\langle 0 | T\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\bar{\psi}}_\beta(y_E) | 0 \rangle_{\text{无相互作用}} = \hbar K_{\alpha\beta}^{-1}(x_E - y_E \Big|_{\substack{x_E \to x \\ y_E \to y}}$$
$$= \hbar \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y) - ik_0(t_x - t_y)}$$
$$\times \frac{(-\gamma_\mu k_\mu - im)_{\alpha\beta}}{k^2 - k_0^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (2.46)$$

K^{-1} 恰好就是 Dirac 场的自由传播子。按照通常的习惯，可定义 $S_F(x)$，$S_F(x_E)$ 如下：

$$S_F(x) = \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x - ik_0 t} \frac{-\gamma_\mu k_\mu - im}{k^2 - k_0^2 + m^2 - i\varepsilon} \quad (2.47)$$

$$S_F(x_E) = \int \frac{d^3k d\upsilon}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x + i\upsilon\tau} \frac{-i\gamma_\mu k_{\mu E} + m}{k^2 + \upsilon^2 + m^2} \quad (2.48)$$

这里 $K_{\alpha\beta}^{-1}(x_E) = S_F(x_E)$。

和前面一样，现在也试取闵氏空间的 $\mathscr{L}_0$ 为：

$$\mathscr{L}_0(x) = -\bar{\psi}_\alpha(x)\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) + i\varepsilon\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\alpha(x) \quad (2.49)$$

在闵氏空间作泛函积分，t 的积分限取作 $-\infty$ 到 $+\infty$：

$$\int d(\bar{\psi})d(\psi)\exp\left\{\int d^4x\left[\frac{i}{\hbar}\mathscr{L}_0(x) + i\bar{\eta}_\alpha(x) + \psi_\alpha(x) + i\bar{\psi}_\alpha(x)\eta_\alpha(x)\right]\right\}$$

$$= \int d(\bar{\psi}) d(\psi) \exp\left\{\int d^4x d^4y \left[\frac{-i}{\hbar} \bar{\psi}(x)\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - i\varepsilon\right)_{\alpha\beta} \delta^4(x-y)\psi_\beta(y)\right]\right.$$

$$\left. + \int d^4x [i\bar{\eta}_\alpha(x)\psi_\alpha(x) + i\bar{\psi}_\alpha(x)\eta_\alpha(x)]\right\}$$

$$= \int d(\bar{\psi}) d(\psi) \exp\left\{\int d^4x d^4y \left[\frac{-i}{\hbar} \bar{\psi}_\alpha(x)\, \underline{K}_{\alpha\beta}(x-y)\psi_\beta(y)\right]\right.$$

$$\left. + \int d^4_x [i\bar{\eta}_\alpha(x)\psi_\alpha(x) + i\bar{\varphi}_\alpha(x)\eta_\alpha(x)]\right\} \tag{2.50}$$

$$\underline{K}_{\alpha\beta}(x-y) = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m - i\varepsilon\right)_{\alpha\beta} \delta^4(x-y)$$

$$= \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y) - ik_0(t_x - t_y)} \cdot (\gamma_\mu k_\mu + m - i\varepsilon)_{\alpha\beta}$$

$$\underline{K}^{-1}_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^3k dk_0}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y) - ik_0(t_x - t_y)} \cdot \frac{(-i\gamma_\mu k_\mu + m - i\varepsilon)_{\alpha\beta}}{k^2 - k_0^2 + m^2 - i\varepsilon}$$

换成离散的(连续的$\underline{K}_{\alpha\beta}(x_\alpha - x_\beta)$换成离散的$\underline{K}_{\alpha\beta}$)：

$$(2.50) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \prod_\alpha d\bar{\psi}_\alpha d\psi_\alpha \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\sum_\alpha \varepsilon^4 \sum_\beta \varepsilon^4 \bar{\psi}_\alpha \underline{K}_{\alpha\beta}\psi_\beta\right.$$

$$\left. + i\sum_\alpha \varepsilon^4 \bar{\psi}_\alpha \eta_\alpha + i\sum_\alpha \varepsilon^4 \bar{\eta}_\alpha \psi_\alpha\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int \sum_\alpha d\bar{\psi}_\alpha d\psi_\alpha \exp\left[-i\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\varepsilon^4}{\sqrt{\hbar}}\bar{\psi} - \sqrt{\hbar}\,\bar{\eta}\,\underline{K}^{-1}\right)_\alpha\right.$$

$$\left. \times \underline{K}_{\alpha\beta}\left(\frac{\varepsilon^4}{\sqrt{\hbar}}\psi - \sqrt{\hbar}\,\underline{K}^{-1}\eta\right)_\beta + i\sum_{\alpha\beta}\hbar\bar{\eta}_\alpha \underline{K}^{-1}_{\alpha\beta}\eta_\beta\right] \tag{2.51}$$

仍可用(2.38)，只须把$i\underline{K}_{\alpha\beta}$看作是$K_{ij}$，则

$$(2.50) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{Det} \mid i\underline{K}_{\alpha\beta}\left(\prod_\alpha \frac{\sqrt{\hbar}}{\varepsilon^4}\right)\left(\prod_\alpha \frac{\sqrt{\hbar}}{\varepsilon^4}\right)$$

$$\cdot \exp\left(\hbar\sum_\alpha \varepsilon^4 \sum_\beta \varepsilon^4 \cdot \bar{\eta}_\alpha \frac{i\underline{K}^{-1}_{\alpha\beta}}{\varepsilon^8}\eta_\beta\right)$$

(与(2.41)对照)

$$= 常数 \cdot \exp\left(\hbar\sum_\alpha \varepsilon^4 \sum_\beta \varepsilon^4 \cdot \bar{\eta}_\alpha \frac{i\underline{K}^{-1}_{\alpha\beta})}{\varepsilon^8}\eta_\beta\right) \tag{2.52}$$

再和以前一样，回到连续的情况，取[①]

$$\sum_\alpha \varepsilon^4 \longrightarrow \int d^4x, \qquad \sum_\beta \varepsilon^4 \longrightarrow \int d^4y$$

$$\frac{1}{\varepsilon^8}\underline{K}^{-1}_{\alpha\beta} \longrightarrow K^{-1}_{\alpha\beta}(x-y),\ K_{\alpha\beta} \longrightarrow K_{\alpha\beta}(x-y)$$

得到

$$(2.50) = 常数 \cdot \exp\left(i\hbar\int d^4x d^4y \bar{\eta}_\alpha(x)\, \underline{K}^{-1}_{\alpha\beta}(x-y)\eta_\beta(y)\right) \tag{2.53}$$

---

① 这里是在闵氏空间积分，ε^4 是闵氏空间 4 维小体积。

再利用(1.97)左方,(2.52)作为无相互作用时的 $W[\eta,\bar{\eta}]$(不要忘记 $W[\eta,\bar{\eta}]$ 中的 $\mathscr{L}_0$。已加了一个小项 $i\varepsilon\bar{\psi}\psi$),得到

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|T\hat{\psi}_\alpha(x)\hat{\bar{\psi}}_\beta(y)|0\rangle_{\text{无相互作用}}\\
&=\frac{1}{W[\eta,\bar{\eta}]_{\text{无相互作用}}}\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 W[\eta,\bar{\eta}]_{\text{无相互作用}}}{\delta\eta_\beta(y)\delta\bar{\eta}_\alpha(x)}\Bigg|_{\eta=\bar{\eta}=0}\\
&=\frac{1}{i^2}i\hbar\underline{K}^{-1}_{\alpha\beta}(x-y)=\hbar\int\frac{\mathrm{d}^3k\mathrm{d}^4k_0}{(2\pi)^4}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-ik_0(t_x-t_y)}\cdot\frac{(-\gamma_\mu k_\mu-im)_{\alpha\beta}}{\mathbf{k}^2-k_0^2+m^2-i\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

和(2.46)的结果完全一样。所以对于费米场来说,上一节的结论也是对的。即先在欧氏空间求泛函微商,再回到闵氏空间,等价于直接在闵氏空间求泛函微商,t 积分由 $-\infty$ 到 $+\infty$,只是在 $\mathscr{L}_0$ 上要加一小项 $i\varepsilon\bar{\psi}\psi$。

§2-3 各种规范的传播子举例

前面说过,规范场的 K_{ij} 有点特别(有奇异性),即 $\mathrm{Det}|K_{ij}|=0$,现在具体说明如下:

规范场的 K_{ij} 的奇导性

取出规范场拉氏量 $\mathscr{L}[A]$ 中 A 的二次项,转到欧氏空间,但省写了所有的 E 指标,并把 υ 写成 k_4:

$$
\begin{aligned}
&\int\mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^i_\upsilon-\partial_\upsilon A^i_\mu)(\partial_\mu A^i_\upsilon-\partial_\upsilon A^i_\mu)\right]\\
&=\int\mathrm{d}^4x\left[\frac{1}{4}A^i_\upsilon(\Box A^i_\upsilon-\partial_\mu\partial_\upsilon A^i_\mu)-\frac{1}{4}A^i_\mu(\partial_\upsilon\partial_\mu A^i_\upsilon-\Box A^i_\mu)\right]\\
&=\int\mathrm{d}^4x\,\frac{1}{2}[A^i_\mu\Box A^i_\mu-A^i_\mu\partial_\mu\partial_\upsilon A^i_\upsilon]\\
&=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yA^i_\mu(x)(\Box\delta_{\mu\upsilon}-\partial_\mu\partial_\upsilon)\partial^4(x-y)A^i_\upsilon(y)
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

于是有

$$
K_{\mu\upsilon}(x-y)=-(\Box\delta_\mu x-\delta_\mu\partial_\upsilon)\delta^4(x-y)\tag{2.56}
$$

而且,对于每一组给定的 x,y,由于 $\mu,\upsilon=1,2,3,4$,所以又构成一个 4×4 的小矩阵:

$$
\int\begin{bmatrix}k_2^2+k_3^2+k_4^2 & -k_1k_2 & -k_1k_3 & -k_1k_4\\ -k_2k_1 & k_3^2+k_4^2+k_1^2 & -k_2k_3 & -k_2k_4\\ -k_3k_1 & -k_3k_2 & k_4^2+k_1^2+k_2^2 & -k_3k_4\\ -k_4k_1 & -k_4k_2 & -k_4k_3 & +k_1^2+k_2^2+k_3^2\end{bmatrix}e^{ik\cdot(x-y)}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\tag{2.57}
$$

立刻还可以找到一个矩阵:

$$
J_{\mu\upsilon}(y-z)=\int\begin{pmatrix}k_1' & 0 & 0 & 0\\ 0 & k_2' & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_3' & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_4'\end{pmatrix}e^{ik'(y-z)}\frac{\mathrm{d}^4k'}{(2\pi)^4}\tag{2 58}
$$

它的逆矩阵是：

$$J_{\mu\nu}^{-1}(z-w)=\int\begin{pmatrix}\frac{1}{k_1''} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{k_2''} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3''} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{k_4''}\end{pmatrix}e^{ik''(z-w)}\frac{d^4k''}{(2\pi)^4} \tag{2.59}$$

显然 $\int J_{\mu\nu}(y-z)\,d^4z J_{\nu\lambda}^{-1}(z-w)=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}\delta^4(y-w)$ 是一个么矩阵。显然

$J_{\mu\nu}(y-z)$ 有逆矩阵，就说明行列式

$$\mathrm{Det}\,|\,J_{\mu\nu}(y-z)\,|\neq 0 \tag{2.60}$$

再求 $K_{\mu\nu}(x-y)$ 矩阵与 $J_{\mu\nu}(y-E)$ 矩阵的乘积，并把前四列具体写出来：

$$\begin{bmatrix}\int\begin{pmatrix}k_1(k_2^2+k_3^2+k_4^2) & -k_1k_2^2 & -k_1k_3^2 & -k_1k_4^2\\ -k_2k_1^2 & k_2(k_3^2+k_4^2+k_1^2) & -k_2k_3^2 & -k_2k_4^2\\ -k_3k_1^2 & -k_3k_2^2 & k_3(k_4^2+k_1^2+k_2^2) & -k_3k_4^2\\ -k_4k_1^2 & -k_4k_2^2 & -k_4k_3^2 & k_4(k_1^2+k_2^2+k_3^2)\end{pmatrix}e^{ik(x_1-x_1)}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdots\\ \int\begin{pmatrix}k_1(k_2^2+k_3^2+k_4^2) & -k_1k_2^2 & -k_1k_3^2 & -k_1k_4^2\\ -k_2k_1^2 & k_2(k_3^2+k_4^2+k_1^2) & -k_2k_3^2 & -k_2k_4^2\\ -k_3k_1^2 & -k_3k_2^2 & k_3(k_4^2+k_1^2+k_2^2) & -k_3k_4^2\\ -k_4k_1^2 & -k_4k_2^2 & -k_4k_3^2 & k_4(k_1^2+k_2^2+k_3^2)\end{pmatrix}e^{ik(x_2-x_1)}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\cdots\\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \cdots\end{bmatrix} \tag{2.61}$$

前四列加起来为零（对任何的 (x_i-x_1)），所以

$$\int d_\alpha y\,\mathrm{Det}\,|\,K_{\mu\nu}(x-y)\,|\,\mathrm{Det}\,|\,J_{\nu\lambda}(y-z)\,|=0$$

然而 $\mathrm{Det}\,|\,J_{\mu\nu}(y-z)\,|\neq 0$（见(2.60)），所以

$$\mathrm{Det}\,|\,K_{\mu\nu}(x-y)\,|=0 \tag{2.62}$$

对于这个 $K_{\mu\nu}(x-y)$ 不存在 $K_{\mu\nu}^{-1}(x-y)$。这就是所谓的 $K_{\mu\nu}(x-y)$ 的奇异性。而且这也正是 §2-1 中讨论规范场的路径积分时所遇到的困难。解决这个困难的办法是加上规范确定项（见(2.10)和接着的讨论）。现在我们就举四个例子来看看加上规范确定项后，规范场传播子是什么样子（规范确定项和规范条件之间的联系见第三章）；

例 1，费曼规范：

$$C^i(x)=\partial_\mu A_\mu^i(x) \tag{2.63}$$

在(2.55)中加入 $-\frac{1}{2}(C^i(x))^2$,部分积分后得到：

$$\frac{1}{2}\int d^4x_E d^4y_E A^i_\mu(x_E)(\Box_E\delta_{\mu\upsilon}\partial_\mu\partial_\upsilon + \partial_\mu\partial_\upsilon)\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij}A^i_\upsilon(y_E)$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x_E d^4y_E A^i_\mu(x_E)(\Box_E\delta_{\mu\upsilon})\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij}A^i_\upsilon(y_E)$$

于是有(注意这里已转到欧氏空间)：

$$K^{ij}_{\mu\upsilon}(x_E - y_E) = -(\Box_E\delta_{\mu\upsilon})\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij}$$

$$= \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+i\upsilon(\tau_x-\tau_y)}(\boldsymbol{k}^2 + \upsilon^2)\delta_{\mu\upsilon}\delta_{ij} \tag{2.64$_1$}$$

$$K^{ij-1}_{\mu\upsilon}(x_E - y_E) = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+i\upsilon(\tau_x-\tau_y)}\frac{\delta_{\mu\upsilon}\delta_{ij}}{\boldsymbol{k}^2 + \upsilon^2} \tag{2.64$_2$}$$

转回闵氏空间($d^4k_E = d^3kd\upsilon, d^4k = d^3dk_0$)：

$$\langle 0 \mid T\hat{A}^i_\mu(x)\hat{A}^j_\upsilon(y) \mid 0\rangle_{\text{无相互作用}} = \hbar K^{ij-1}_{\mu\upsilon}(x_E - y_E)\big|_{\substack{x_E\to x\\ y_E\to y}}$$

$$= \hbar\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-ik_0(t_x-t_y)}\frac{-i}{\boldsymbol{k}^2 - k_0^2 - i\varepsilon}\delta_{\mu\upsilon}\delta_{ij}$$

$$= \hbar\Delta^{ij}_{\mu\upsilon}(x - y) \tag{2.65}$$

这里转回闵氏空间的做法和(2.21),(2.22)一样。$\Delta^{ij}_{\mu\upsilon}(x-y)$就是这个规范下的传播子(自由传播子)

例2 ξ规范:($\xi=1$ 时就是费曼规范,$\xi=\infty$ 时就是朗道规范)

$$C^i(x) = \xi^{1/2}\partial_\mu A^i_\mu(x) \tag{2.66}$$

在(2.55)中加入 $-\frac{1}{2}(C^i(x))^2$, 部分积分后得到(转到欧氏空间)：

$$\frac{1}{2}\int d^4x_E d^4y_E A^i_\mu(x_\mu)(\Box_E\delta_{\mu\upsilon}(\xi - 1)\partial_\mu\partial_\upsilon)\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij}A^i_\upsilon(y_E) \tag{2.67}$$

于是有

$$K^{ij}_{\mu\upsilon}(x_E - y_E) = -(\Box_E\delta_{\mu\upsilon} + (\xi - 1)\partial_\mu\partial_\upsilon)\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij}$$

$$= \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+i\upsilon(\tau_x-\tau_y)}[(\mathrm{k}^2 + \upsilon^2)\delta_{\mu\upsilon} + (\xi - 1)k_{\mu E}k_{\upsilon E}]\delta_{ij} \tag{2.68$_1$}$$

$$K^{ij-1}_{\mu\upsilon}(x_E - y_E) = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})+i\upsilon(\tau_x-\tau_y)}\frac{1}{k_E^2}\left(\delta_{\mu\upsilon} - \frac{(\xi - 1)}{\xi}\frac{k_{\mu E}k_{\upsilon E}}{k_E^2}\right)\delta_{ij} \tag{2.68$_2$}$$

请读者自己检验。

$$\int K^{ij}_{\mu\upsilon}(x_E - y_E)d^4y_E K^{jk-1}_{\upsilon\lambda}(y_E - z_E) = \delta^4(x_E - z_E)\delta_{\mu\upsilon}\delta_{ik}$$

这里 $k_E^2 = \boldsymbol{k}^2 + \upsilon^2, k^2 = \boldsymbol{k}^2 - k_0^2$。

转回闵氏空间：

$$\langle 0 \mid T\hat{A}^i_\mu(x)\hat{A}^j_\upsilon(y) \mid 0\rangle_{\text{无相互作用}} = \hbar K^{ij-1}_{\mu\upsilon}(x_E - y_E)\big|_{\substack{x_E\to x\\ y_E\to y}}$$

$$= \hbar\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})-ik_0(t_x-t_y)}\frac{-i}{k^2 - i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\upsilon} - \frac{\xi - 1}{\xi}\frac{k_\mu k_\upsilon}{k^2 - i\varepsilon}\right)\delta_{ij}$$

$$= \hbar\Delta^{ij}_{\mu\upsilon}(x - y) \tag{2.69}$$

在(2.69)中，第一项是 $\frac{1}{k_E^2}\to\frac{i}{k^2-i\varepsilon}$，这在前面已经证明过。现在对于 $\frac{k_{\mu E}k_{\nu E}}{k_E^2k_E^2}\to(-i)$ $\frac{k_\mu k_\nu}{(k^2-i\varepsilon)(k^2-i\varepsilon)}$ 再补充证明一下。考察如下积分：

$$\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}e^{ik\cdot x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{2\pi}e^{i\upsilon\tau}\frac{1}{(\upsilon^2+\omega^2)(\upsilon^2+\omega^2)}(\omega^2=k^2) \tag{2.70}$$

其中 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\upsilon}{2\pi}\frac{e^{i\gamma\tau}}{(\upsilon^2+\omega^2)(\upsilon^2+\omega^2)}=\begin{cases}\frac{e^{-\omega\tau}}{4\omega^3}+\frac{\tau e^{-\omega\tau}}{4\omega^2}(\tau>0)\\ \frac{e^{\omega\tau}}{4\omega^3}-\frac{\tau e^{\omega\tau}}{4\omega^2}(\tau<0)\end{cases}$

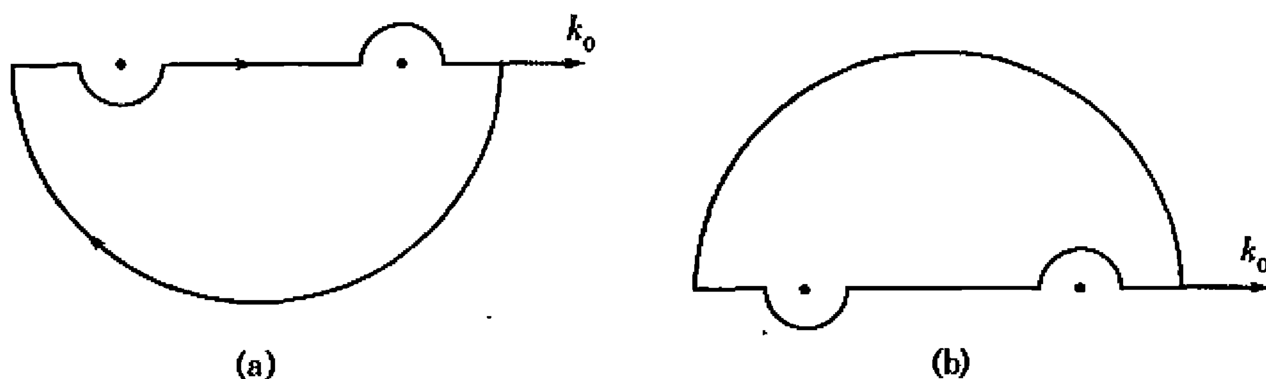
$$\xrightarrow{\text{转到闵氏空间}}\begin{cases}\frac{e^{-i\omega t}}{4\omega^3}+\frac{ite^{-i\omega t}}{4\omega^2}(t>0)\\ \frac{e^{i\omega t}}{4\omega^3}-\frac{ite^{i\omega t}}{4\omega^2}(t<0)\end{cases} \tag{2.71}$$

求(2.71)时，$\tau>0$ 用图2.3(a)的回路，$\tau<0$ 用图2.1(b)的回路。以下为了计算方便，不再使用 $\theta(t)$ 和 $\theta(-t)$，而是直接计算如下积分：

$$\int\frac{\mathrm{d}^3\bar{k}}{(2\pi)^3}e^{ik\cdot x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}e^{ik_0t}\frac{1}{(-k_0^2+\omega^2-i\varepsilon)(-k_0^2+\omega^2-i\varepsilon)} \tag{2.72}$$

其中

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}e^{ik_0t}\frac{1}{(-k_0^2+\omega^2-i\varepsilon)(-k_0^2+\varepsilon^2-i\omega)}=\begin{cases}\frac{ie^{-i\omega t}}{4\omega^3}+\frac{te^{-i\omega t}}{4\omega^2}(t>0)\\ \frac{ie^{i\omega t}}{4\omega^3}-\frac{te^{i\omega t}}{4\omega^2}(t<0)\end{cases} \tag{2.73}$$



(a) (b)

图 2.3

$t>0$ 时用图2.3(a)的回路，$t<0$ 时用图2.3(b)的回路，

以 $t<0$ 的情况为例：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k_0}{(2\pi)}\frac{e^{-ik_0t}}{(k_0+\omega)^2}\left(\frac{1}{-2\omega+(k_0+\omega)}\right)^2$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k_0}{(2\pi)}\frac{e^{-ik_0t}}{(k_0+\omega)^2}\left(\frac{1}{(-2\omega)^2}-\frac{2}{(-2\omega)^3}(k_0+\omega)+\cdots\right.$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}k_0}{(k_0+\omega)^2}e^{i\omega t}(1-i(k_0+\omega)t+\cdots)\left(\frac{1}{(-2\omega)^2}-\frac{2}{(-2\omega)^3}(k_0+\omega)+\cdots\right)$$

$$=\frac{ie^{i\omega t}}{4\omega^3}+\frac{te^{i\omega t}}{4\omega^2}$$

所以,把(2.73)代入(2.71),就得到

$$\int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x+iv\tau} \frac{1}{(v^2+k^2)^2} \xrightarrow{\text{转回闵氏空间}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x-ik_0 t} \frac{-i}{(k^2-k_0^2-i\varepsilon)^2} \tag{2.74}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu E}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu E}} \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x+iv\tau} \frac{1}{(v^2+k^2)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{转回闵氏空间}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x-ik_0 t} \frac{-i}{(k^2-k_0^2-i\varepsilon)^2} \tag{2.75}$$

这样就给出了(2.69)的结果。

例3 R_ξ 规范:在有自发破缺时,会出现 A,φ(φ 是 Higgs 场)混合的二次项,这时就要用 R_ξ 规范来去掉这种混合的二次项。举例如下:

$SU(2)$ 规范群。A^i 为 A^1,A^2,A^3。有自发破缺的 φ 为:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2+i\varphi_1\\ \bar{\chi}-i\varphi_3\end{pmatrix} \tag{2.76}$$

$$\varphi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \quad v) + \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2+i\varphi_1, \chi-i\varphi_3)$$

T^i 为 T^1,T^2,T^3,是 Pauli 矩阵。

$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\bar{\chi}$ 的真空期待值为 0。

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x) = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k)^2 \\ &-\left(\partial_\mu\varphi^+ + \frac{ig}{2}A_\mu^i\varphi^+ T^i\right)\left(\partial_\mu\varphi - \frac{ig}{2}A_\mu^j T^j\varphi\right) \\ &-\mu_2\varphi^+\varphi - \lambda(\varphi^+\varphi)^2\end{aligned} \tag{2.77}$$

把(2.76)代入,取出二次项,经部分积分后得到(省写欧氏空间的标志 E):

$$\begin{aligned}\int d^4x\mathscr{L}_0(x) = \int d^4x\Big[&\frac{1}{2}A_\mu^i(\Box\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)\delta_{ij}A_\nu^j + \frac{1}{2}\varphi_a\Box\varphi_a + \frac{1}{2}\bar{\chi}\Box\bar{\chi} \\ &-\frac{g^2}{4}\cdot\frac{1}{2}(0\ v)\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}A_\mu^i A_\mu^i \\ &-\frac{ig}{2}\left(\frac{v}{2}(\partial_\mu\varphi_2 + i\partial_\mu\varphi_1) - \frac{v}{2}(\partial_\mu\varphi_2 - i\partial_\mu\varphi_1)\right)A_\mu^1 \\ &-\frac{ig}{2}\left(\frac{-iv}{2}(\partial_\mu\varphi_2 + i\partial_\mu\varphi_1) - \frac{-iv}{2}(\partial_\mu\varphi_2 - i\partial_\mu\varphi_1)\right)A_\mu^2 \\ &-\frac{ig}{2}\left(\frac{-v}{2}(\partial_\mu\bar{\chi} - i\partial_\mu\varphi_3) - \frac{-v}{2}(\partial_\mu\bar{\chi} + i\partial_\mu\varphi_3)\right)A_\mu^3 \\ &-\frac{\lambda}{4}4v^2\bar{\chi}^2\Big]\end{aligned}$$

(这里取了 $\mu^2 = -\lambda v^2$,所以消去了 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 的质量项)

$$\begin{aligned}= \int d^4x\Big[&\frac{1}{2}A_\mu^i\left(\Box\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu - \frac{g^2v^2}{4}\delta_{\mu\nu}\right)\delta_{ij}A_\nu^j \\ &+\frac{1}{2}\varphi_a\Box\varphi_a + \frac{1}{2}\chi(\Box - 2\lambda v^2)\chi + \frac{gv}{2}(\partial_\mu\varphi_1 A_\mu^1 + \partial_\mu\varphi_2 A_\mu^2 + \partial_\mu\varphi_3 A_\mu^3)\Big]\end{aligned} \tag{2.78}$$

以下我们写 $M_W = \dfrac{gv}{2}$ $M_\chi = \sqrt{2\lambda v^2}$ (2.79)

为了去掉(2.78)中的 $A-\varphi$ 混合项,取 R_ξ 规范:

$$C^i = \xi^{1/2}\partial_\mu A_\mu^i - \xi^{-1/2}M_W\varphi_i \tag{2.80}$$

$$\int d^4x\left(-\frac{1}{2}(C^i)^2\right) = \int d^4x\Big[\frac{\xi}{2}A_\mu^i\partial_\mu\partial_\nu A_\nu^i - \frac{1}{2}\frac{M_W^2}{\xi}(\varphi_1\varphi_1 + \varphi_2\varphi_2 + \varphi_3\varphi_3)$$
$$-\frac{gv}{2}(\partial_\mu\varphi_1 A_\mu^1 + \partial_\mu\varphi_2 A_\mu^2 + \partial_\mu\varphi_3 A_\mu^3)\Big] \tag{2.81}$$

把(2.81)加到(2.78)中去,则混合项消去,并得到(恢复欧氏空间的标志 E):

$$\int d^4x_E d^4y_E\Big[\frac{1}{2}A_\mu^i(x_E)((\Box_E - M_W^2)\delta_{\mu\nu} + (\xi-1)\delta_{\mu E}\partial_{\nu E})\delta_{ij}\delta^4(x_E-y_E)A_\nu^i(y_E)$$
$$+\frac{1}{2}\varphi_a(x_E)\left(\Box_E - \frac{M_W^2}{\xi}\right)\delta^4(x_E-y_E)\varphi_a(y_E)$$
$$+\frac{1}{2}\bar{\chi}(x_E)(\Box_E - M_\chi^2)\delta^4(x_E-y_E)\bar{\chi}(y_E)\Big] \tag{2.82}$$

与(2.64)对比,有

$$K_{\mu\nu}^{ij}(x_E) = -[(\Box_E - M_W^2)\delta_{\mu\nu} + (\xi-1)\partial_{\mu E}\partial_{\nu E}]\delta_{ij}\delta^4(x_E)$$
$$= \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x + i\nu\tau}[(k_E^2 + M_W^2)\delta_{\mu\nu} + (\xi-1)k_{\mu E}k_{\nu E}]\delta_{ij} \tag{2.83$_1$}$$

$$K_{\mu\nu}^{ij-1}(x_E)\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x+i\nu\tau}\left[\frac{1}{k_E + M_W^2}\delta_{\mu\nu} + \frac{(1-\xi)k_{\mu E}k_{\nu E}}{(k_E^2+M_W^2)(\xi k_E^2 + M_W^2)}\right]\delta_{ij} \tag{2.83$_2$}$$

它们满足(请读者自己检验一下):

$$\int K_{\mu\nu}^{ij}(x_E - y_E)d^4y_E K_{\nu\lambda}^{ik}(y_E - z_E) = \delta^4(x_E - z_E)\delta_{\mu\nu}\delta_{ik}$$

转回到闵氏空间

$$\langle 0|T\hat{A}_\mu^i(x)\hat{A}_\nu^j(y)|0\rangle_{\text{无相互作用}} = \hbar K_{\mu\nu}^{ij-1}(x_E - y_E)\big|_{\substack{x_E\to x\\ y_E\to y}}$$
$$= \hbar\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)-ik_0(t_x-t_y)}\delta_{ij}\Big[\frac{-i}{(k^2+M_W^2-i\varepsilon)}\delta_{\mu\nu}$$
$$+\frac{-i(1-\xi)k_\mu k_\nu}{(k^2+M_W^2-i\varepsilon)(\xi k^2+M_W^2-i\varepsilon)}\Big] = \hbar\Delta_{\mu\nu}^{ij}(x-y) \tag{2.84}$$

(请读者自己验证一下从欧氏空间转到闵氏空间所得到的(2.84)。)

从(2.84)还得到

$$K_\varphi^{ij}(x_E) = -\left(\Box - \frac{M_W^2}{\xi}\right)\delta^4(x_E)\delta_{ij} = \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x+i\nu\tau}\left(k_E^2 + \frac{M_W^2}{\xi}\right)\delta_{ij} \tag{2.85$_1$}$$

$$K_\varphi^{ij-1}(x_E) = \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x+i\nu\tau}\frac{1}{k_E^2 + \dfrac{M_W^2}{\xi}}\delta_{ij} \tag{2.85$_2$}$$

转回闵氏空间:

$$\langle 0|T\hat{\varphi}^j(x)\hat{\varphi}^j(y)|0\rangle_{\text{无相互作用}} = \hbar K_\varphi^{ij-1}(x_E - y_E)\big|_{\substack{x_E\to x\\ y_E\to y}}$$

$$= \hbar\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)-ik_0(t_x-t_y)} \frac{-i}{k^2+\frac{M_\Psi^2}{\xi}-i\varepsilon}\delta_{ij} = \hbar\Delta_\varphi^{ij}(x-y) \tag{2.86}$$

$$K_\chi(x_E) = -(\Box - M_\chi^2)\delta^4(x^E)$$

通过相同的途径得到：

$$\Delta_\chi(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot\bar{x}-ik_0t} \frac{-i}{k^2+M_\chi^2-i\varepsilon} \tag{2.87}$$

例4　推广的 R_ξ 规范：取一个 G 群，再取一个群表示，生成元为 $L_i(i=1,2,\cdots,N)$，一组标量场 $\varphi_a(a=1,2,\cdots,K)$ 则是这个表示的基。

$$[L_i, L_j] = if_{ijk}L_k$$

选实表示（见附录一），则 φ_a 是实的；L_i 是纯虚而且反对称的（厄米的）；f_{ijk}是实的、全反对称的。利用 $L_i^T=-L_i$：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^iF_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi - igA_\mu^iL_i\varphi)^2 - V(\varphi)\\ &= \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^iF_{\mu\nu}^i - \frac{1}{2}[\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi + g^2(\varphi, L_iL_j\varphi)A_\mu^iA_\mu^j{}^{①}\\ &\quad + 2ig(\varphi, L_i\partial_\mu\varphi)A_\mu^i] - V(\varphi)\end{aligned} \tag{2.88}$$

设有自发破缺：

$$\varphi = \bar{\varphi} + v \tag{2.89}$$

则取出来的 $\mathscr{L}$ 中的二次项是：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 = \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i) \qquad \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\varphi}\partial_\mu\bar{\varphi} - \frac{1}{2}g^2(v, L_iL_jv)A_\mu^iA_\mu^j\\ -\frac{1}{2}(\mu^2)_{ab}\bar{\varphi}_a\bar{\varphi}_b - ig(v, L_i\partial_\mu\bar{\varphi})A_\mu^i\end{aligned} \tag{2.90}$$

定义

$$(M^2)_{ij} = g^2(v, L_iL_jv) \tag{2.91}$$

$$(\mu^2)_{ab} = \left.\frac{\partial^2V}{\partial\varphi_a\partial\varphi_b}\right|_{\varphi=v} \tag{2.92}$$

则又有

$$\begin{aligned}\int d^4x\mathscr{L}_0(x) &= \int d^4xd^4yA_\mu^i\frac{1}{2}[(\Box\delta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu)\delta_{ij} - (M^2)_{ij}\delta_{\mu\nu}]\delta_4(x-y)A_\nu^i\\ &\quad + \int d^4xd^4y\bar{\varphi}_a\frac{1}{2}[\Box\delta_{ab} - (\mu^2)_{ab}]\delta^4(x-y)\bar{\varphi}_b\\ &\quad + \int d^4x(-ig)(v, L_i\partial_\mu\bar{\varphi})A_\mu^i\end{aligned} \tag{2.93}$$

仿照(2.80)，为了去掉(2.93)的第三项（A，φ 混合项），取推广的 R_ξ 规范：

$$C^i = \xi^{1/2}\partial_\mu A_\mu^i + i\xi^{-1/2}g(v, L_i\bar{\varphi}) \tag{2.94}$$

$$\int d^4x\left[-\frac{1}{2}(C^i)^2\right] = \int d^4x\left[\frac{\xi}{2}A_\mu^i\partial_\mu\partial_\nu A_\nu^i + \frac{g^2}{2\xi}(L_iv)_a(L_iv)_b\bar{\varphi}_a\bar{\varphi}_b\right.$$

---

① $(a,b)=\sum_i a_i^*b_i$，见附录一。

$$+ig(v,L^i\partial_\mu\bar{\varphi})A_\mu^i] \tag{2.95}$$

把(2.95)加到(2.93)上去，则消去混合项，得到：

$$\int d^4x d^4y A_\mu^i(x)\frac{1}{2}\{[(\Box\delta_{\mu\nu}+(\xi-1)\partial_\mu\partial_\nu]\delta_{ij}-(M^2)_{ij}\delta_{\mu\nu}\}\delta^4(x-y)A_\nu^j(y)$$

$$+\int d^4x d^4y\bar{\varphi}_a(x)\frac{1}{2}\left[\Box\delta_{ab}-(\mu^2)_{ab}+\frac{g^2}{2\xi}(L_iv)_a(L_iV)_b\right]\delta^4(x-y)\bar{\varphi}_b(y) \tag{2.96}$$

由此得到(转到欧氏空间)：

$$\begin{aligned}K_{\mu\nu}^{ij}(x_E) &= -\{[\Box_E\delta_{\mu\nu}+(\xi-1)\partial_{\mu E}\partial_{\nu E}]\delta_{ij}-(M^2)_{ij}\delta_{\mu\nu}\}\delta_4(x_E)\\ &= \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x+i\nu\tau}\{[k_E^2\delta_{\mu\nu}+(\xi-1)k_{\mu E}k_{\nu E}]\delta_{ij}+(M^2)_{ij}\delta_{\mu\nu}\}\end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}K_{ab}^{\varphi}(x_E) &= -\left\{\Box_E\delta_{ab}-(\mu^2)_{ab}+\frac{g^2}{\xi}(L_iV)_a(L_iV)_b\right\}\delta_4(x_E)\\ &= \int\frac{d^4k_F}{(2\pi)^4}e^{ik\cdot x+i\nu\tau}\left\{k_E^2\delta_{ab}+(\mu^2)_{ab}-\frac{g^2}{\xi}(L_iV)_a(L_iV)_b\right\}\end{aligned} \tag{2.98}$$

以下就要来找 $K_{\mu\nu}^{ij-1}$ 和 $K_{ab}^{\xi-1}$。

定义$(M^2)_{ij}$矩阵的本征矢量 $\bar{E}^{(r)}$ 和 $E^{(s)}$ ($\bar{E}^{(r)}$ 和 $E^{(s)}$ 所张开的空间也就是 $A^i(i=1,2,\cdots,N)$所张开的空间)：

$$\begin{aligned}(M^2)_{ij}\bar{E}_j^{(r)} &= 0 \qquad (r=1,2,\cdots,\bar{N})\\ (M^2)_{ij}E_j^{(s)} &= M_s^2E_i^{(s)} \qquad (s=1,2,\cdots,N-\bar{N})\end{aligned} \tag{2.99}$$

并把它们取作单位矢量，所以满足：

$$\sum_r\bar{E}_i^{(r)}\bar{E}_j^{(r)}+\sum_s E_i^{(s)}E_j^{(s)}=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,N) \tag{2.100}$$

(因为$i,j,\cdots,N$个方向互相正交；$\bar{E}^{(r)}$，$E^{(s)}$所代表的N个方向也互相正交)。(2.99)意味着在 $\bar{E}^{(r)}$方向的 A_μ 不获得静止质量，而 $E^{(s)}$方向的 A_μ 获得静止质量。

又定义作用于 φ 空间的矩阵$(\mu^2)_{ab}$的本征矢量 $\bar{e}^{(p)}$ 和 $e^{(q)}$：

$$\begin{aligned}(\mu^2)_{ab}\bar{e}_b^{(p)} &= 0 \qquad (p=1,2,\cdots,\bar{K})\\ (\mu^2)_{ab}e_b^{(q)} &= \mu_q^2e_a^{(q)} \qquad (q=1,2,\cdots,K-\bar{K})\end{aligned} \tag{2.101}$$

也把它们取作单位矢量，所以也满足

$$\sum_p\bar{e}_a^{(p)}\bar{e}_b^{(p)}+\sum_q e_a^{(q)}e_b^{(q)}=\delta_{ab}\quad(a,b=1,2,\cdots,K) \tag{2.102}$$

(因为$a,b,\cdots,K$个方向互相正交，$\bar{e}^{(p)}$，$e^{(q)}$所代表的K个方向也互相正交)。(2.102)意味着在 $\bar{e}^{(p)}$方向的 φ 不获得静止质量，而在 $e^{(q)}$方向的 φ 获得静止质量。

由于没有静止质量的 Higgs 场的数目应等于获得静止质量的规范场的数目(见附录一)，所以

$$\bar{K}=N-\bar{N} \tag{2.103}$$

可见 $\bar{e}^{(p)}$的 p 指标与 $E^{(s)}$的 s 指标有一对一的对应关系。

把$(M^2)_{ij}$作用在(2.100)上，并利用(2.99)：

$$\sum_s E_i^{(s)}M_s^2E_j^{(s)}=(M^2)_{ij} \tag{2.104}$$

把$(\mu^2)_{ab}$作用在(2.102)上，并利用(2.101)：

$$\sum_q e_a^{(q)} \mu_q^2 e_b^{(q)} = (\mu^2)_{ab} \tag{2.105}$$

(2.104)，(2.105) 正是(2.97)，(2.98) 中所需要的。此外，(2.98) 中还有一个 $(L_jV)_a(L_iV)_b$ 要整下一下。

首先要证明 (L_iV) 与所有的 $e^{(q)}$ 正交：

证明：由于 V 规范不变，所以(θ^i 是小量)：

$$0 = \delta V = \frac{\partial V}{a\varphi_a}\delta\varphi_a = \frac{\partial V}{a\varphi_a}(-iL_i\theta^i\varphi)a。$$

θ^i 是任意的，所以

$$\frac{\partial V}{a\varphi_a}(L_i\varphi)_a = 0$$

再微分一次：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_b\partial\varphi_a}(L_i\varphi)_a \frac{\partial V}{\partial\varphi_a}(L_i)_{ab} = 0$$

然而$\left.\frac{\partial V}{\partial\varphi_a}\right|_{\varphi=v}=0$(真空条件)。利用(2.92)又得到：

$$(\mu^2)_{ba}(L_iv)_a = 0$$

这对所有的 $b=1,2,\cdots,K$ 都成立。又利用(2.105)：

$$\sum_q e_b^{(q)} \mu_g^2 e_a^{(q)}(L_iv)_a = 0$$

由于 $e^{(q)}(q=1,2,\cdots,K-\bar{K})$ 是互相线性无关的，μ_q^2 又是不等于零的，所以必定有：

$$\sum_a e_a^{(q)}(L_iv)_a = 0 \tag{2.106}$$

而且对所有的 $q(q=1,2,\cdots,K-\bar{K})$ 都成立。证毕。

其次要证明

$$(L_iv)_a = \sum_s \frac{i}{g}E_i^{(s)}M_s\bar{e}_a^{(s)} \tag{2.107}$$

证明：根据(2.106)，(L_iv) 既然与所有的 $e^{(q)}$ 正交，则在 $\bar{e}^{(p)}$，$e^{(q)}$ 所张开的空间中，(L_iv) 必定可写成 $\bar{e}^{(p)}$ 的线性叠加：

$$(L_iv)_a = \sum_p ia_{ip}\bar{e}_a^{(p)} \quad (p = 1,2,\cdots,\bar{K}) \tag{2.108}$$

自(2.91)的定义有(利用 $\bar{e}^{(p)}$ 正交归一)：

$$\begin{aligned}(M^2)_{ij} &= g^2(v,L_iL_jv) = g^2\sum_a (L_i^Tv)_a(L_jv)_a \\ &= -g^2\sum_a (L_iv)_a(L_jv)_a = g^2\sum_{pp'} a_{ip}a_{jp'}\sum_a \bar{e}_a^{(p)}\bar{e}_a^{(p')} \\ &= g^2\sum_{pp'} a_{ip}a_{jp'}\delta_{pp'} = g^2\sum_p a_{ip}a_{ip}\end{aligned}$$

由于附录一的讨论，p 的个数等于 s 的个数，而且(2.108)是 $\bar{e}^{(p)}$ 的线性叠加，也满足(2.101)第一式，所以总可以把 $E^{(s)}$ 的 s 指标代替 $\bar{e}^{(p)}$ 的 p 指标。再利用(2.104)和 $(M^2)_{ij} = g^2\sum_s a_{is}a_{is}$，得到

$$\sum_s E_i^{(s)}M_s^2E_j^{(s)} = (M^2)_i = g^2\sum_s a_{is}a_{is} \tag{2.109}$$

(已取 s 指标作为 p 指标)。a_{is} 有 $N\bar{K}$ 个,而(2.109)的方程有 N^2 个,解只能是

$$\pm E_i^{(s)} M_s = g a_{is} \tag{2.110}$$

取(+)号解代入(2.108),即得(2.107)。(-)号解无非是把本征矢量 $\bar{e}^{(B)}$ 倒向,不会有新的结果。证毕。

利用(2.107)和 $E^{(s)}$ 的正交归一性质:

$$\begin{aligned}(L_j v)_a (L_j v)_b &= -\sum_i \sum_s \frac{1}{g^2} E_i^{(s)} M_s \bar{e}_a^{(s)} \sum_{s'} E_i^{(s')} M_{s'} \bar{e}_b^{(s')} \\ &= -\frac{1}{g^2} \sum_s \bar{e}_a^{(s)} M_s^2 \bar{e}_b^{(s)}\end{aligned} \tag{2.111}$$

这就是我们要找的表式,显然在 $\bar{e}^{(s)}$ 倒向后不变。

把(2.104)代入(2.97):

$$\begin{aligned}K_{\mu\nu}^{ij}(x_E) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x + i\tau\nu} \{ &\sum_r \bar{E}_i^{(r)} (k_E^2 \delta_{\mu\nu} + (\xi - 1) k_{\mu E} k_{\nu E}) \bar{E}_j^{(r)} \\ &+ \sum_s \bar{E}_i^{(s)} ((k_E^2 + M_s^2) \delta_{\mu\nu} + (\xi - 1) k_{\mu E} k_{\nu E}) E_j^{(s)} \}\end{aligned} \tag{2.112}$$

利用正交归一关系(2.100),找到:

$$\begin{aligned}K_{\mu\nu}^{ij-1}(x_E) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x + i\nu\tau} \Bigg\{ &\sum_r \bar{E}_i^{(r)} \left(\frac{1}{k_E^2} \delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_{\mu E} k_{\nu E}}{k_E^2 k_E^2} \right) \bar{E}_j^{(r)} \\ &+ \sum_s E_i^{(s)} \left(\frac{1}{k_E^2 + M_s^2} \delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_{\mu E} k_{\nu E}}{(k_E^2 + M_s^2)\left(k_E^2 + \frac{M_s^2}{\xi}\right)} \right) E_j^{(s)} \Bigg\}\end{aligned} \tag{2.113}$$

和前一样转到闵氏空间:

$$\begin{aligned}&\langle 0 | T\hat{A}_\mu^i(x) \hat{A}_\nu^j(y) | 0 \rangle_{\text{无相互作用}} = \hbar K_{\mu\nu}^{ij-1}(x_E - y_E) \big|_{\substack{x_E \to x \\ y_E \to y}} \\ &= \hbar \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y) - ik_0(t_x - t_y)} \Bigg\{ \sum_r \bar{E}_i^{(r)} \frac{-i}{(k^2 - i\varepsilon)} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 - i\varepsilon)} \right) \bar{E}_j^{(r)} \\ &\quad + \sum_s E_i^{(s)} \frac{-i}{(k^2 + M_s^2 - i\varepsilon)} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{\left(k^2 + \frac{M_s^2}{\xi} - i\varepsilon\right)} \right) E_j^{(s)} \Bigg\} \\ &= \hbar \Delta_{\mu\nu}^{ij}(x - y)\end{aligned} \tag{2.114}$$

把(2.105),(2.111)代入(2.98):

$$K_{ab}^{\varphi}(x_E) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x + i\nu\tau} \left\{ \sum_s \bar{e}_a^{(s)} \left(k_E^2 + \frac{M_s^2}{\xi} \right) \bar{e}_b^{(s)} + \sum_q e_a^{(q)} (K_E^2 + \mu_q^2) \bar{e}_b^{(q)} \right\} \tag{2.115}$$

利用正交归一关系(2.102),找到

$$K_{ab}^{\varphi-1}(x_E) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x + i\nu\tau} \left\{ \sum_s \bar{e}_a^{(s)} \frac{1}{k_E^2 + \frac{M_s^2}{\xi}} \bar{e}_b^{(s)} + \sum_q e_a^{(q)} \frac{1}{k_E^2 + \mu_q^2} e_b^{(q)} \right\} \tag{2.116}$$

然后转到闵氏空间:

$$\langle 0 | T\hat{\varphi}_a(x) \hat{\varphi}_b(y) | 0 \rangle_{\text{无相互作用}} = \hbar K_{ab}^{\varphi-1}(x_E - y_E) \big|_{\substack{x_E \to x \\ y_E \to y}}$$

$$= \hbar\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot(x-y)-ik_0(t_x-t_y)}\left\{\sum_s \bar{e}_a^{(s)}\frac{-i}{k^2+\frac{M_s^2}{\xi}-i\varepsilon}\bar{e}_b^{(s)}\right.$$

$$\left.+\sum_q e_a^{(q)}\frac{-i}{k^2+\mu_q^2-i\varepsilon}e_b^{(q)}\right\} = \hbar\Delta_{ab}^{\varphi}(x-y) \tag{2.117}$$

请读者自己检验 K,K^{-1} 的正交归一关系和由欧氏空间向闵氏空间的旋转。

对比(2.114) 和(2.117) 可以看到，Δ_{ab}^{ij} 和 Δ_{ab}^{φ} 中都有 $\frac{1}{k^2+\frac{M_s^2}{\xi}-i\varepsilon}$ 极点项。这种极点项叫作非物理的极点项，因为它对应的质量平方 $\frac{M_s^2}{\xi}$ 是随 ξ 而变的，也就是随规范而变的。第九章要证明，在物理的 S 矩阵元中，非物理的极点项，包括 F－P 场传播子(见第三章)中的非物理极点项，将全部互相抵消。

§2－4 连接图的生成泛函 $Z[J]$

前一章曾给出

$$(-i)^n \frac{\delta W(J)}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} = \langle 0|\ T(\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n))\ |\ 0\rangle$$

和

$$(-i)^n \frac{1}{W[J]}\cdot\frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} = \langle 0|\ T(\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)\ |\ 0\rangle_{去真空起伏} \tag{2.118}$$

但这里的 $\langle 0|T(\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n))|0\rangle_{去真空起伏}$ 既包括连接图(例如图 2.4(a))，又包括不连接图(例如图2.4(b))。所以，如果用 $W[j]$ 作为格林函数的生成泛函，在实际应用上是不方便的。以下我们给出一个只提供连接图的生成泛函 $Z[J]$。

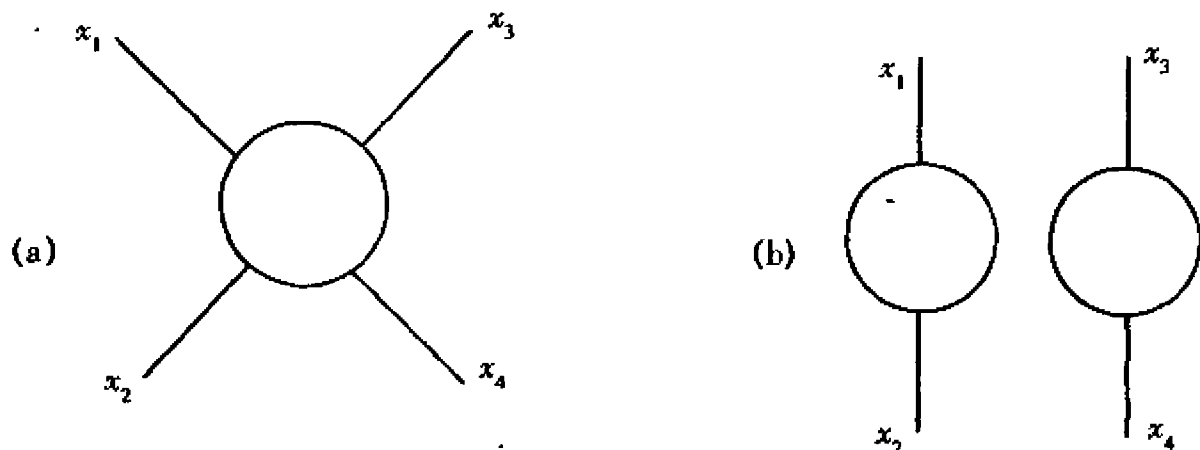


图 2.4

先考虑没有真空自发破缺的情况，并假定只有一种 φ 场。采用微扰展开，由于有(2.118)，所以 $W[J]/W[0]$ 应该可以写成：

$$\frac{W[J]}{W[0]} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)(iJ(x_1))\cdots(iJ(x_n)) \tag{2.119}$$

这里定义了

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \langle 0 \mid T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)) \mid 0\rangle_{\text{去真空起伏}} \tag{2.120}$$

这个 $G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$ 由是 n 个 x 点做成的去真空起伏的全部格林函数的总和，其中既有连接图，又有不连接图，对 $x_1,\cdots,x_n$ 连接图（去真空起伏）是

$$G_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n) = \langle 0 \mid T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n) \mid 0\rangle_c \tag{2.121}$$

指标 c 表示连接，去真空起伏不再注出，出图 2.5(a)。不连接图很多，我们举如下的一个例子，它由两个连接图做成，见图 2.5(b)：

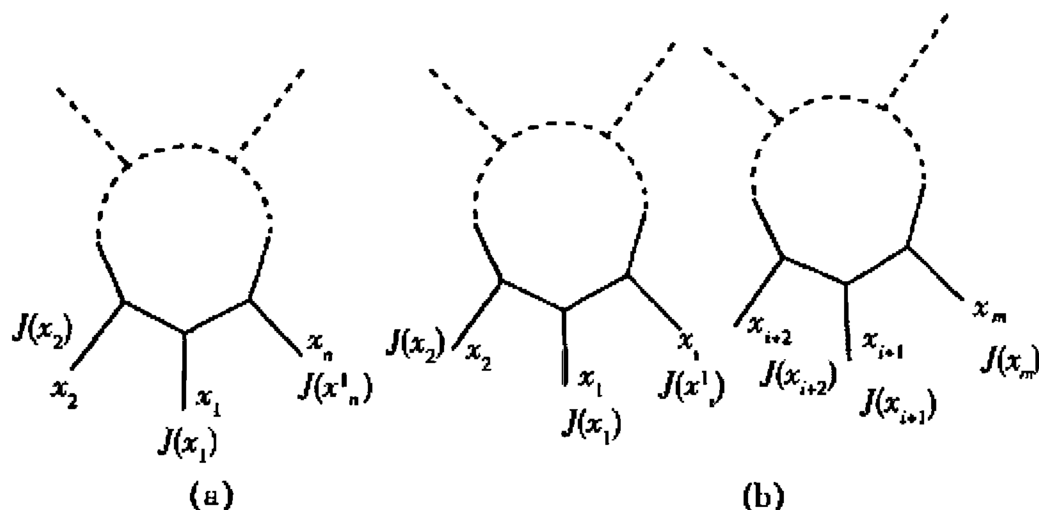


图 2.5

$$\begin{aligned}&G_c^{(i)}(x_1,\cdots,x_i)G_c^{(n-i)}(x_{i+1},\cdots,x_n)\\&=\langle 0|T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_i)|0\rangle_c\langle 0|T\hat{\varphi}(x_{i+1})\cdots\hat{\varphi}(x_n)|0\rangle_c\end{aligned} \tag{2.122$_1$}$$

其中 $G_c^{(i)}$ 和 $G_c^{(n-i)}$ 的定义和(2.121)一样，也都分别是去空真空起伏的连接图。

此外(2.120)中还含有三个、四个、……连接图相乘后所做成的不连接图的格林函数。所以，把 $G_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)$ 所包括的各项写出来，(2.119)就展开成为：

$$\begin{aligned}\frac{W[J]}{W[0]} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big\{&\int d^4x_1\cdots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)(iJ(x_1))\cdots(iJ(x_n))\\
&+\sum_{\substack{\text{各种组合}\\ \text{一组}i\text{个}x\\ \text{一组}n-i\text{个}x}}\int d^4x_1\cdots d^4x_i G_c^{(i)}(x_1\cdots x_i)(iJ(x_1))\cdots(iJ(x_i))\\
&\quad\cdot\int d^4x_{i+1}\cdots d^4x_n G_c^{(n-i)}(x_{i+1}\cdots x_n)(iJ(x_{i+1}))\cdots(iJ(x_n))\\
&+\sum \text{两个 } G_c \text{ 相乘的其他项(总共 } n \text{ 个 } x)\\
&+\sum_{\substack{\text{各种组合}\\ \text{一组}l\text{个}x\\ \text{一组}m-l\text{个}x\\ \text{一组}n-m\text{个}x}}\int d^4x_l\cdots d^4x_l G_c^{(i)}(x_1,\cdots,x_l)(iJ(x_1))\cdots(iJ(x_l))\\
&\quad\cdot\int d^4x_{l+1}\cdots d^4x_m G_c^{(m-l)}(x_{l+1},\cdots,x_m)(iJ(x_{l+1}))\cdots(iJ(x_m))\\
&\quad\cdot\int d^4x_{m+1}\cdots d^4x_n G_c^{(n-m)}(x_{m+1},\cdots,x_n)(iJ(x_{m+1}))\cdots(iJ(x_n))\\
&+\sum \text{三个 } G_c \text{ 相乘的其他项(总共 } n \text{ 个 } x) + \cdots\Big\}\end{aligned} \tag{2.122$_2$}$$

我们注意到每一项前面的系数都是 1，这是因为按 Wick 定理作微扰展开时，每一项前面

的系数不是 +1 就是 -1。-1 的出现是由于费米圈有 -1 因子，但这种 -1 因子目前包含在带有费米圈的各个连接图格林函数 $G_c^{(k)}(x_1,\cdots,x_k)$ 之中，所以即使 φ_i 都是费米场（一开头为了简化，我们只取一种场 φ_i。若 φ_i 是费米场，则 φ_1 应包括 $\bar{\psi}_a,\psi_a$），(2.122) 的各项系数也都是 1（请读者用微扰展开的办法来检查一下 (2.122) 式各项的系数）。

然后我们再定义

$$iZ[J] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)(iJ(x_1))\cdots(iJ(x_n)) \tag{2.123}$$

注意其中每一项都是连接图。现在要问，e^{iZ} 等于什么？我们把 e^{iZ} 展开，把含有 n 个 $J(x)$ 的项收集到一起。其中有一个项

$$\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n G_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)(iJ(x_1))\cdots(iJ(x_n)) \tag{2.124}$$

这正是(2.122)的第一项。

还有两个 G_c 相乘的项，这种项不止一个，譬如说，其中有这样一项：

$$\frac{1}{i!}\int d^4x_1\cdots d^4x_i G_c^{(i)}(x_1,\cdots,x_i)(iJ(x_i))\cdots(iJ(x_n))$$

$$\cdot\frac{1}{(n-i)!}\int d^4x_{i+1}\cdots d^4x_n G_c^{(n-i)}(x_{i-1},\cdots,x_n)(iJ(x_{i+1}))\cdots(iJ(x_n)) \tag{2.125}$$

在(2.122) 中也有这种项，前面的系数是 $\frac{1}{n!}$，但是有 $\sum\limits_{\text{各种组合}}$。$x_1,\cdots,x_n$ 一共 n 个，分成两组，一组 i 个，一组 $(n-i)$ 个，正好有 $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ 种分法，所以(2.122) 中这种项有 $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ 个。其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是要积分的，即使 x_i,x_n 作各种交换，积分结果一样，所以这 $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ 个项是相等的。相加再乘上 $\frac{1}{n!}$，就正好等于(2.125)。

同理，(2.122)中其他的两个 G_c 相乘的项也和 e^{iz} 展开中（共有 n 个 x 的）两个 G_c 相乘的项一一对应，并且相等。

再看三个 G_c 相乘的项。在 e^{iz} 的展开中，$G_c^{(\ )}G_c^{(m-c)}\ G_c^{(n-m)}$ 相乘的项前面有因子为

$$\frac{1}{l!}\ \frac{1}{(m-l)!}\ \frac{1}{(n-m)!}$$

而在(2.122) 中，前面的系数是 $\frac{1}{n!}$，但是有 $\sum\limits_{\text{各种组合}}$。$x_1,\cdots,x_n$ 分成三组，一组 l 个，一组 $(m-l)$ 个，一组 $(n-m)$ 个，正好有 $\frac{n!}{l!(m-l)!(n-m)!}$ 种分法，所以求和后（理由同上）(2.122) 中这个项的系数为 $\frac{1}{n!}\frac{n!}{l!(m-l)!(n-m)!}=\frac{1}{l!(m-l)!(n-m)!}$，正好也有 e^{iZ} 展开中的这个项前面的因子相等。其他的三个 G_c 相乘的项也有相同的情况，所以依此类推可以知道：

$$e^{iZ[J]}=\frac{W[J]}{W[0]}\to Z[J]=\frac{1}{i}\ln\frac{W[J]}{W[0]} \tag{2.126$_1$}$$

由于 $\ln W[0]$ 是一个与 j 无关的常数，实际不起作用，所以以后我们常把(2.126)简单地写成

$$Z[J]=\frac{1}{i}\ln W[J] \tag{2.126$_2$}$$

自(2.123)：

$$\frac{1}{i^{n-1}}\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\cdots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0} \doteq \langle 0 \mid T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n) \mid 0\rangle_c \tag{2.127}$$

由此可见，我们可以取 $Z[J]$ 作为连接图格林函数的生成泛函。

有多种场的情况

以上讨论显然也适用于有多种场的情况。不同的场有不同的 $J(x)$，只要对不同的 $J(x)$ 组合成各种连接图的各种组合方式具体分析一下，就可看到无非是把 $x_1,\cdots,x_n$ 按不同的 $J(x)$ 分类分得更细一些，组合方式的计算和前一样。所以在有多种场的情况下，仍可用原先的办法来证明(2.126)。

有真空自发破缺的情况

有真空自发破缺时，$\varphi=0$ 并不是最低能态，因此我们要用 $\bar{\varphi}(x)$ 来代替 $\varphi(x)$，即

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) + v \tag{2.128}$$

并要求 v 为常数。在最低能态(即真空态)中，$\bar{\varphi}(x)$ 的期待值为 0(见附录一)。下面将看到，v 如果是随 x 而变的变数 $v(x)$，就不可能使 $\bar{\varphi}(x)$ 的真空期待值为 0。

现在要问，在取 $\varphi=\bar{\varphi}+v$ 以后，路径积分形式的 $W[J]$ 和 $Z[J]$ 会有什么改变？为此，我们把 $\varphi=\bar{\varphi}+v$ 代入 $W[J]$(把 $\mathscr{L}_0$ 写成 $-\varphi_i K_{ij}\varphi_j$)，得到：

$$\begin{aligned} W[J] &= \int d(\varphi) e^{i\int d^4x[-\frac{1}{\hbar}\varphi_i K_{ij}\varphi_j + \frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_I(\varphi) + \varphi_i J_i]} \\ &= \int d(\bar{\varphi}) e^{i\int d^4x[-\frac{1}{\hbar}\bar{\varphi}_i(K_{ij}+K'_{ij})\bar{\varphi}_j + \frac{1}{\hbar}\mathscr{L}'_I(\bar{\varphi}) + (\bar{\varphi}_i + v_i)J_i]} \\ &= \int d(\bar{\varphi}) e^{i\int d^4x[-\frac{1}{\hbar}\bar{\varphi}(_iK_{ij}+K'_{ij})\varphi_j + \frac{1}{\hbar}\mathscr{L}'_I(\bar{\varphi}) + \bar{\varphi}_i J_i]} \\ &\quad \cdot e^{i\int d^4x v_i J_i} \end{aligned} \tag{2.129}$$

说明两点：

1. 对于每一个 x，$v_i(x)$ 是固定的，$\bar{\varphi}_i(x)$ 是变动的。所以积分符号 $d(\varphi)$ 可换成 $d(\bar{\varphi})$，即使 $v_i(x)$ 是 x 的一个任意函数。

2. $\varphi=\bar{\varphi}+v$ 代入后，各项要重新改组，还有新的项出现，所以 $\varphi_i K_{ij}\varphi_j + \mathscr{L}_I(\varphi)$ 换写成

$$\bar{\varphi}_i(K_{ij}+K'_{ij})\bar{\varphi}_j + \mathscr{L}'_I(\bar{\varphi})$$

费曼规则要作相应改变(可参看第九章的具体例子)。

再按照前面那样写出(见(2.126))：

$$\frac{W[J]}{W[0]} = e^{iZ(J)}$$

立刻看到可以重新定义：

$$iZ'[J] = iZ[J] - i\int d^4x v_i J_i \tag{2.130}$$

$$\begin{aligned} W'[J] &= W[J] e^{-i\int d^4x v_i J_i} \\ &= \int d(\bar{\varphi}) e^{-i\int d^4x[-\frac{1}{\hbar}\bar{\varphi}_i(K_{ij}+K'_{ij})\bar{\varphi}_j + \frac{1}{\hbar}\mathscr{L}'_I(\bar{\varphi}) + \bar{\varphi}_i J_i]} \end{aligned} \tag{2.131}$$

而且

$$\frac{W'[J]}{W'[0]}=e^{iZ'[J]}\qquad(W'[0]=W[0])\tag{2.132}$$

在(2.132)中,全部的情况和没有真空自发破缺的情况相仿,只是 φ 换成 $\bar{\varphi}$,K_{ij}换成$(K_{ij}+K'_{ij})$,$\mathscr{L}_I(\varphi)$换成 $\mathscr{L}'_I(\varphi)$,所以前面的证明在这里完全适用,即(见(2.123),(2.121)):

$$iZ'[J]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\bar{G}_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)(iJ(x_1))\cdots iJ(x_n))\tag{2.133}$$

$$\bar{G}_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)=\langle 0|\,T\hat{\bar{\varphi}}(x_1)\cdots\hat{\bar{\varphi}}(x_n)\,|0\rangle_c\tag{2.134}$$

$$\begin{aligned}iZ[J]=1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\bar{G}_c^{(n)}(x_1,\cdots,x_n)(iJ(x_1)\cdots iJ(x_n))\\+i\int d^4xv_iJ_i(x)\end{aligned}\tag{2.135}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J_i(x)}\right|_{J=0}&=\langle 0|\,\hat{\varphi}_i(x)\,|0\rangle_c\\&=v_i+\langle 0|\,\hat{\bar{\varphi}}_i(x)\,|0\rangle_c\end{aligned}\tag{2.136$_1$}$$

$$\frac{1}{i^{n-1}}\left.\frac{\delta^nZ[J]}{\delta J_{i_1}(x_1)\cdots\delta J_{i_1}(x_n)}\right|_{J=0}=\langle 0|\,T\hat{\bar{\varphi}}_{i_1}(x_1)\cdots\hat{\bar{\varphi}}_{0i}(x_n)\,|0\rangle_c\tag{2.136$_2$}$$

$n\geqslant 2$ 时

$\langle 0|T\hat{\bar{\varphi}}_i(x)|0\rangle_c=0$ 的问题

一般来说,如果 $\mathscr{L}'_I(\bar{\varphi})$中只有 $\bar{\varphi}_i$ 的偶次项出现,则一定

$$\left.\frac{\delta Z'[J]}{\delta J_i(x)}\right|_{J=0}=\langle 0|\,\hat{\bar{\varphi}}_i(x)\,|0\rangle_c=0$$

因为微扰展开中的各项里将只出现奇数次的$\frac{\delta}{\delta J_i}$,从而当 $J=0$ 时,积分 $=0$(请读者自己检验这一点)。

但事实上在取 $\varphi_i=\bar{\varphi}_i+v_i$ 后,$\mathscr{L}'_I(\bar{\varphi})$中是会有 $\bar{\varphi}_i$ 的奇次项出现的,譬如说,它们的形式是

$$\sim\bar{\varphi}_iv_i(A+B\bar{\varphi}_1^2+C\bar{\varphi}_a^2+\cdots)\tag{2.137}$$

(例如第九章中的 $\bar{\chi}$ 就是 $\bar{\varphi}_i$ 的一个代表)。还要注意,(2.137)中有 v_i 因子,这是因为 $\bar{\varphi}_i$ 的奇次项是由于 $v\neq0$ 而引出的,若 $u_i=0$,$\bar{\varphi}_i$ 的奇次项就应该消去。

现在把(2.137)代入微扰展开,得到:

$$\begin{aligned}\langle 0|\,\hat{\bar{\varphi}}_i(x)\,|0\rangle_c&=\frac{1}{i}\frac{1}{W'[J]}\\&\cdot\sum_n\frac{i^n\hbar^{-n}}{n!}\int d^4x_1\cdots d^4x_n\left(\mathscr{L}'_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X_1)}\right)\cdots\mathscr{L}'_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(X_n)}\right)\right)\\&\cdot\left.\frac{\delta}{\delta J_i(x)}\exp\left(-\frac{\hbar}{2}\int J_l(x)d^4x\Delta_{lm}(x-y)d^4yJ_m(y)\right)\right|_{J=0}\\&=i\int\Delta'_{ij}(x-y)d_y^4v_j(A+G(y-y))\end{aligned}\tag{2.138}$$

$$(\text{这里 } \Delta_{lm} \sim (K_{lm} + K'_{lm})^{-1})$$ ①

它的费曼图是图 2.6(a)的两个蝌蚪图：

$\Delta'_{ij}(x-y)$是完全传播子，它包括高级微扰在内，见图 2.6(b)。画线的圈表示高级微扰修正。图 2.6(c)是 $v_i G(0)$，圈中画线也是表示高级微扰修正。

因为

$$\int \Delta'_{ij}(x-y)\mathrm{d}^4 y = \int \frac{e^{ik(x-y)}}{(2\pi)^4}\Delta'_{ij}(k)\mathrm{d}^4 k\mathrm{d}^4 y = \int e^{ikx}\delta^4(k)\Delta'_{ij}(k)\mathrm{d}^4 k = \Delta'_{ij}(k=0) \tag{2.139}$$

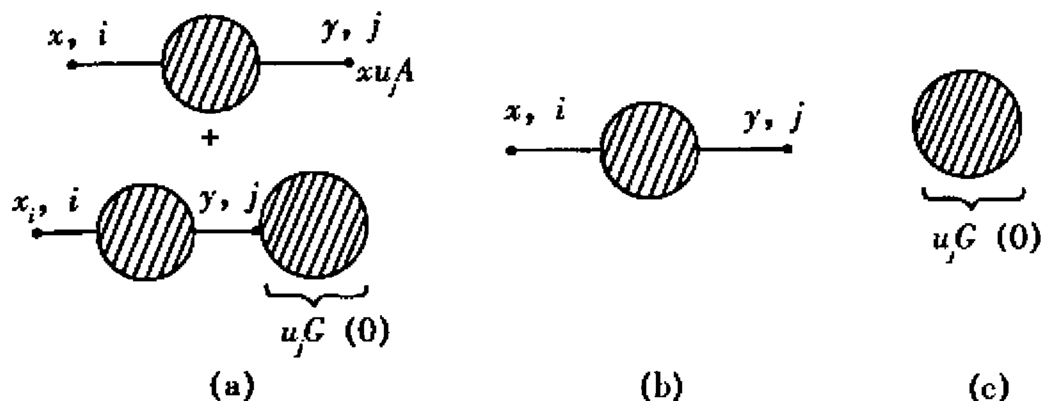


图 2.6

所以代入(2.138)后有

$$\langle 0 \mid \hat{\varphi}_i(x) \mid 0\rangle_c = \left.\frac{\delta Z'[J]}{\delta J_i(x)}\right|_{J=0} = i\Delta'_{ij}(k=0)v_j(A + G(0)) \tag{2.140}$$

这里 $v_j \neq 0$，否则 $\varphi_j = 0$ 就代表最低能态(真空态)，这是与本节的前提抵触的。于是，如果 $\bar{\varphi} = 0$ 代表最低能态(真空态)，则必要求

$$\langle 0 \mid \hat{\varphi}_i(x) \mid 0\rangle_c = 0 \tag{2.141}$$

$v_j \neq 0$，所以要求($G(0)$在重正化后有限)

$$(A + G(0)) = 0 \tag{2.142}$$

在第九章将看到，(2.142)导致 Goldstone 粒子的出现(而且是重正化之后质量为零)。这个结果是在意料之中的，因为一方面 φ_i 的真空期待值 $v_i \neq 0$，另一方面出现 Goldstone 粒子，这是与 Goldstone 定理一致的。

我们还可看到，如果 $v = v(y)$ 不是常数，则(2.138)积分后，$\bar{\varphi}(x)$ 的真空期待值 $\langle 0|\hat{\varphi}_i(x)|0\rangle_c \neq 0$，因为(2.140)右方此时不是常数。

§2-5　1*PI* 顶角函数的生成泛函 Γ[Φ]

上一节的 $Z[J]$给出的是连接图，但连接图又分为单粒子线可约图和单粒子线不可约图(即 1*PI*)。现在我们再来找一个产生 1*PI* 顶角函数的生成泛函 Γ[Φ]。

定义：

$$\Gamma[\Phi] = Z[J] - \int \mathrm{d}^4 x \Phi_i(x) J_i(x) \tag{2.143}$$

---

① 带撇的 Δ'_{ij}是完全传播子，不带撇的 Δ_{lm}是自由传播子。

但这个定义是不完全的，因为 Φ_i 还没有定义，所以要再加一个定义。

定义：

$$\Phi_i(x) = \frac{\delta Z[J]}{\delta J_i(x)} \tag{2.144}$$

按照这个定义就有（见(2.136)$_1$，并取(2.142)）：

$$\Phi_i(x)|_{J=0} = v_i \tag{2.145}$$

有了(2.144)的定义，$\Gamma[\Phi]$作为 Φ 的泛函的含义就清楚了，即在(2.143)的右方利用(2.144)把 J 消去，从而使右方成为 Φ 的泛函。

利用(2.143)还得到

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi_i(x)} = \int\frac{dZ[J]}{\delta J_k(y)}d^4y\frac{\delta J_k(y)}{\delta\Phi_i(x)} - \int\Phi_k(y)d^4y\frac{\delta J_k(y)}{\delta\Phi_i(x)} - J_i(x) = -J_i(x) \tag{2.146}$$

(2.143)叫做 Legendre 变换。$\Gamma[\Phi]$和 $Z[J]$之间有了这个变换关系，就可以从定义(2.144)得到(2.146)；反过来也可以从(2.146)得到(2.144)（请读者自己检验）。

自(2.144)，(2.146)还得到

$$\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J_i(y)}\right|_{J=0} = \Phi_i(x)\Big|_{J=0} = v_i \tag{2.147$_1$}$$

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi_i(x)}\right|_{\Phi_i=v_i} = -J_i(x)\Big|_{J=0} = 0 \tag{2.147$_2$}$$

(2.147)$_1$，的意义是清楚的。(2.147)$_2$ 的意义是：如果 $J=0$，则 $\Gamma[\Phi]$在 $\Phi_i=v_i$ 时取极值（$J=0$ 时，$\Phi_i=v_i$ 代表真空，从而排除了拐点）。下面我们对(2.147)讨论更具体一些。

根据(2.130)，可以把 $Z[J]$写成：

$$iZ[J] = iZ'[J] + i\int d^4xv_ij_i(x)$$

再定义：

$$\Phi_i(x) = \bar{\Phi}_i(x) + v_i \tag{2.148}$$

$$\Gamma'[\bar{\Phi}] = \Gamma[\bar{\Phi}+v] \tag{2.149}$$

则自(2.143)有

$$\Gamma'[\bar{\Phi}] = \Gamma[\bar{\Phi}+v] = Z[J] - \int d^4x(\bar{\Phi}_i(x)+v_i)J_i(x)$$

$$= Z'[J] - \int d^4x\bar{\Phi}_i(x)J_i(x) \tag{2.150}$$

这是新定义的 $\Gamma'[\bar{\Phi}]$和 $Z'[J]$之间的 Legendre 变换。由于（见(2.147)、(2. 148)）：

$$\left.\frac{\delta Z'[J]}{\delta J_i(x)}\right|_{J=0} = \bar{\Phi}_i(x)|_{J=0} = 0 \tag{2.151$_1$}$$

所以又有

$$\left.\frac{\delta\Gamma'[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_i(x)}\right|_{\bar{\Phi}=0} = -J_i(x)|_{J=0} = 0 \tag{2.151$_2$}$$

(2.151)是在有自发破缺时(2.147)的另一比较对称的形式。

现在证明(2.151)$_1$,(2.151)$_2$的右方都出现

$$v_i(A+G(0))$$

因子。为此,我们先利用一下下面将证明的公式:

$$\left.\frac{\delta^2\Gamma'[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_i(x)\delta\bar{\Phi}_k(y)}\right|_{\bar{\Phi}=0}=i\Delta'^{J-1}_{ik}(x-y)\,|_{J=0}=i\Delta'^{-1}_{ik}(x-y) \tag{2.152}$$

$\Delta'_{ik}(x-y)$是一个完全传播子,它不含 J,不含 $\bar{\Phi}$。所以有(对重复的指标求和,对重复的连续指标积分):

$$\Gamma'[\bar{\Phi}]=\frac{i}{2}\bar{\Phi}_i\Delta'^{-1}_{ik}\bar{\Phi}_k+\Gamma_I[\bar{\Phi}] \tag{2.153}$$

其中 $\Gamma_I[\bar{\Phi}]$满足

$$\left.\frac{\delta^2\Gamma_I[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_i(x)\delta\bar{\Phi}_j(y)}\right|_{\bar{\Phi}=0}=0$$

把(2.153)代入(2.151)$_2$,先不取 $J=0$,则 $\bar{\Phi}_i$ 将是含有 J 的,它满足如下经典运动方程:

$$\int i\Delta'^{-1}_{ik}(x-y)\bar{\Phi}_k(y)\mathrm{d}^4y+\frac{\delta\Gamma_I[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_i(x)}=-J_i(x) \tag{2.154}$$

$$\therefore\ \bar{\Phi}_i(x)=\int i\Delta'_{ij}(x-y)\mathrm{d}^4y\left(J_j(y)\ \frac{\delta\Gamma_I[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_j(y)}\right) \tag{2.155}$$

于是,$J=0$ 时有:

$$\langle 0\,|\,\hat{\varphi}_i(x)\,|\,0\rangle_c=\bar{\Phi}(x)\,|_{J=0}=\int i\Delta'_{ij}(x-y)\mathrm{d}^4y\left.\frac{\delta\Gamma_I[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_j(y)}\right|_{\bar{\Phi}=0} \tag{2.156}$$

把(2.156)和(2.138)对比(两者都是取 $J=0$ 的),得到:

$$\left.\frac{\delta\Gamma_I[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_j(y)}\right|_{\bar{\Phi}=0}=v_j(A+G(0)) \tag{2.157}$$

因此可见,$v_j(A+G(0))=0$ 可同时保证(2.151)$_1$ 和(2.151)$_2$ 成立,理论是自洽的。

现在就来证明上面的讨论中所用的公式(2.152):

在(2.151)$_1$ 中先不让 $J=0$,并对它再作泛函微分$\dfrac{\delta}{\delta\,\bar{\Phi}_j(y)}$,得到:

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\delta^4(x-y)&=\frac{\delta^2Z'[J]}{\delta J_i(x)\delta\bar{\Phi}_j(y)}=\int\frac{\delta^2Z'[J]}{\delta J_i(x)\delta J_l(z)}\mathrm{d}^4z\,\frac{\delta J_l(z)}{\delta\bar{\Phi}_j(y)}\\&=-\int\frac{\delta^2Z'[J]}{\delta J_i(x)\delta J_l(z)}\mathrm{d}^4z\,\frac{\delta^2\Gamma'[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_l(Z)\delta\bar{\Phi}_j(z)}\end{aligned} \tag{2.158}$$

根据上一节的计论有(注意微分次数 $n\geqslant2$ 时,$Z'[J]$上的“′”可以去掉,见(2.136)):

$$\left.\frac{1}{i}\frac{\delta^2Z[J]}{\delta J_i(x)\delta J_j(y)}\right|_{J=0}=\langle 0\,|\,T\hat{\varphi}_i(x)\hat{\varphi}_i(y)\,|\,0\rangle_c=\Delta'_{ij}(x-y)$$

于是 $J\neq0$ 时我们可以定义

$$\frac{1}{i}\frac{\delta^2Z[J]}{\delta J_i(x)\delta J_j(y)}\equiv\Delta'^J_{ij}(x-y)=\frac{\delta\bar{\Phi}_i(x)}{\delta J_j(y)} \tag{2.159}$$

代入(2.158),就看到

$$\frac{\delta^2\Gamma'[\Phi]}{\delta\bar{\Phi}_i(x)\delta\bar{\Phi}_j(y)}\left(=-\frac{\delta J_i(x)}{\delta\bar{\Phi}_j(y)}\right)=i\Delta'^{J-1}_{ij}(x-y) \tag{2.160}$$

当 $J=0$,(2.160)就化为(2.152)。我们可以把(2.152)叫作两点 $1PI$ 顶角函数(在第八章有较详细的讨论)。

再看三点 $1PI$ 顶角函数。对(2.158)再作用一个$\frac{\delta}{\delta J_m(u)}$上去(把"′"省掉):

$$\begin{aligned}
0 &= -\int\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J_i(x)\delta J_m(u)\delta J_l(z)}\mathrm{d}^4z\,\frac{\delta^2\Gamma'[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_c(x)\delta\bar{\Phi}_j(y)}\\
&\quad-\int\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_i(x)\delta J_l(z)}\mathrm{d}^4z\,\frac{\delta^3\Gamma'[\Phi]}{\delta\bar{\Phi}_l(z)\delta\bar{\Phi}_j(y)\delta\bar{\Phi}_n(v)}\mathrm{d}^4v\,\frac{\delta\bar{\Phi}_n(v)}{\delta J_m(u)}\\
&=-\int\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J_i(x)\delta J_m(u)\delta J_l(z)}\mathrm{d}^4z\,i(\Delta'^J)^{-1}_{jL}(y-z)\\
&\quad-\int i\Delta'^J_{il}(x-z)\mathrm{d}^4z\,\frac{\delta^3\Gamma'[\Phi]}{\delta\bar{\Phi}_l(z)\delta\bar{\Phi}_j(y)\delta\bar{\Phi}_n(v)}\mathrm{d}^4v\,i\Delta'^J_{mn}(n-v)
\end{aligned} \tag{2.161}$$

(这里的 $\Delta'^J_{mn}(n-v)$是对称的)。乘上 $-i\Delta'^J_{pj}(\omega-y)$积分,得到

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^3 Z[J]}{\delta J_i(x)\delta J_m(u)\delta J_p(\omega)} &= \int i\Delta'^J_{il}(x-z)\mathrm{d}^4z\cdot i\Delta'^J_{pi}(\omega-y)\mathrm{d}^4y\\
&\quad\cdot i\Delta'^J_{mn}(u-v)\mathrm{d}^4v\,\frac{\delta^3\Gamma'[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_l(z)\delta\bar{\Phi}_j(y)\delta\bar{\Phi}_n(v)}
\end{aligned} \tag{2.162}$$

当 $J=0$,左边是 $i^3\langle 0|T(\hat{\bar{\varphi}}_i(x)\hat{\bar{\varphi}}_m(n)\hat{\bar{\varphi}}_p(\omega)|0\rangle$,图形见图 2.7(a)。右边每一个 Δ'^J 是 $\bar{\varphi}$ 的一个完全传播子[见图 2.7(a)]的三条腿。在 $J=0$ 时

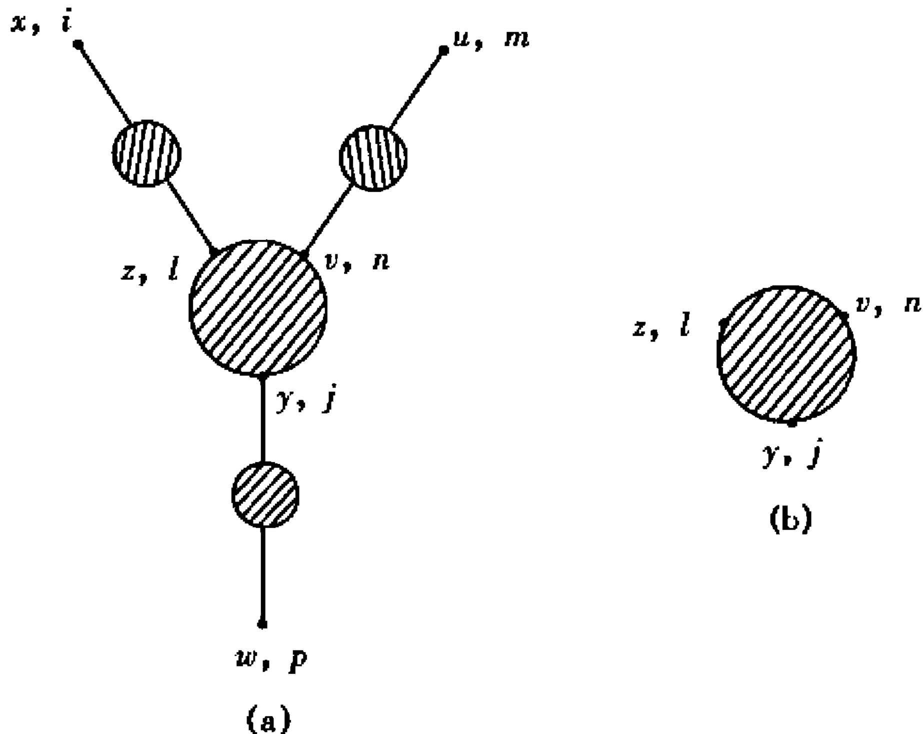


图 2.7

$$\Delta'^J_{il}(x-z)\big|_{J=0}=\langle 0|\,T\hat{\bar{\varphi}}_i(x)\,\hat{\bar{\varphi}}_l(z))\,|\,0\rangle_c$$

所以

$$\left.\frac{\delta^3\Gamma'[\bar{\Phi}]}{\delta\bar{\Phi}_l(z)\delta\bar{\Phi}_j(y)\delta\bar{\Phi}_n(v)}\right|_{\bar{\Phi}=0}$$

必定是一个去肢的三点 1*PI* 顶角函数，图形见图 2.7(b)（$\bar{\Phi}=0$ 就意味着 $J=0$，见(2.151)）。

用 $\Gamma'[\bar{\Phi}]$ 还可得到去肢的任意 n 点的 1*PI* 顶角函数（可见第八章的讨论），所以把 $\Gamma[\bar{\Phi}]$，$\Gamma'[\bar{\Phi}]$ 叫做 1*PI* 顶角函数的生成泛函。以后为了方便，对于真空自发破缺的 $\Gamma'[\bar{\Phi}]$ 省去"′"，写成 $\Gamma[\bar{\Phi}]$。

参考文献

1 G. Costa, M. Tcoin, R; v. Nuovo Cimento **5** (1975)29.

2 S. Abers, B. W. Lee, Phys. Reports. **c9**(1973)1.

3 Н. Н. Боголюбов, Д. В. Щирков, Введение в Теорию Квантованных Полей, Издание Третье, Издательство《Наука》, 1976.

4 D. J. Amit, Field theory, the renormalization group and critical phenomena, McGRAW – HILL, 1987.

第三章　规范场的量子化和 F－P 场的引出

为了用路径积分方法把规范场量子化，我们将首先利用正则关系来讨论一种既有自作用又有静止质量的矢量场的路径积分量子化。由此可表明矢量场的一些特点和质量为零时的困难。然后讨论 Faddeev－Popov 的处理方法，并以 $A_0=0$ 规范（时间规范）为例，来说明利用正则关系导出的路径积分和用 Faddeev－Popov 处理方法得出的路径积分是等价的。本章还将说明如何利用规范不变性把 $W[0]$ 从 $A_0=0$ 规范转到其他规范；说明为什么要引出 F－P 场和如何从规范条件得到规范确定项。最后提出不同规范的等价性问题以结束本章。

§3－1　一种设想的有自作用和有静止质量的矢量场

我们引入如下的矢量场 A_μ^a 的拉氏量：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{\mu^2}{2}A_\mu^a A_\mu^a \quad (\mu,\nu=1,2,3,4) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_\nu^a}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_M^a}{\partial x_\nu} + f_{abc}A_\mu^b A_\nu^c\right)^2 - \frac{\mu^2}{2}A_\mu^a A_\mu^a \text{①} \\
&= \frac{1}{2}\pi_i^a \pi_i^a - \frac{1}{2}B_i^a B_i^a \qquad (i=1,2,3) \\
&\quad -\frac{\mu^2}{2}(A_i^a A_i^a - A_0^a A_0^a)
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

(3.1)中的 B_i^a 是：

$$
\varepsilon_{ijk}B_k^a = \left(\frac{\partial A_j^a}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i^a}{\partial x_j} + f_{abc}A_i^b A_j^c\right) \qquad (i,j,k=1,2,3) \tag{3.2}
$$

(3.1)中的 π_i^a 则是 A_i^a 的正则共轭量（共轭场）：

$$
\pi_i^a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_i^a} = \frac{\partial A_0^a}{\partial x_i} + \frac{\partial A_i^a}{\partial t} + f_{abc}A_i^b A_0^c \qquad (i=1,2,3) \tag{3.3}
$$

但是

$$
\pi_4^a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}_4^a} = 0
$$

这说明 $A_4^a(=iA_0^a)$ 不是一个独立的力学量。

再看运动方程：

$$
\partial_M \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial A_\nu^a}{\partial x_M}\right)} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\nu^a} \qquad (M,\nu=1,2,3,4)
$$

① f_{abc} 是群的结构常数。

$\nu=4$ 时得到

$$-i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial A_0^a}{\partial x_i}+\frac{\partial A_i^a}{\partial t}+f_{abc}A_i^b A_0^c\right)$$
$$=-i\mu^2A_0^a-if_{dea}A_i^e\left(\frac{\partial A_0^d}{\partial x_i}+\frac{\partial A_i^d}{\partial t}+f_{dfg}A_i^f A_0^g\right)$$

整理后写成

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\pi_i^a=\mu^2A_0^a+f_{dea}A_i^e\pi_i^d \tag{3.4}$$

由此我们看到,A_0^a 可以写成 π_i^a 及其$\frac{\partial}{\partial x_i}$微分和 A_i^a 的函数。

$A_i^a(i=1,2,3)$既然是独立变量,就可写出哈密顿密度如下(利用(3.3)):

$$\mathscr{H}=\pi_i^a\dot{A}_i^a-\mathscr{L}=\pi_i^a\left(\pi_i^a-\frac{\partial A_0^a}{\partial x_i}-f_{abc}A_i^b A_0^c\right)$$
$$-\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a+\frac{1}{2}B_i^qB_i^q+\frac{\mu^2}{2}(A_i^aA_i^a-A_0^aA_0^a)$$
$$=\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a+\frac{1}{2}B_i^aB_i^a-\pi_i^a\left(\frac{\partial A_0^a}{\partial x_i}+f_{abc}A_i^b A_0^c\right)+\frac{\mu^2}{2}(A_i^aA_i^a-A_0^aA_0^a) \tag{3.5}$$

其中 A_0^a 满足(3.4)

注意 π_i^a 与 A_0^a 可对易,因为从(3.4)看到:

$$A_0^a=\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\pi_i^a-f_{dea}A_i^e\pi_i^d\right) \tag{3.4$'$}$$

而 π_i^a 与(3.4)′右方可对易($a\neq e$)

还有,π_i^a 与$\left(\frac{\partial A_0^a}{\partial x_i}+f_{abc}A_i^b A_0^c\right)$可对易,因为已知 π_i^a 与 A_0^a 可对易,而且 $a\neq b,a\neq c$。

于是(3.5)右方的 π_i^a 和$\left(\frac{\partial A_0^a}{\partial x_i}+f_{abc}A_i^b A_0^c\right)$的排列次序可以是任意的。

现在用第一章的办法,仿照(1.33),(1.45),(1.48),(1.59),并根据(3.5),可写出:

$$\langle A'',t''|e-i(t'-t)H|\rangle=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{A'}^{A''}\prod_a\prod_{n=0}^{N-1}(\mathrm{dA}_n^a)\left(\frac{\mathrm{d}\pi_n^a}{\mathrm{h}^3}\right)$$
$$\cdot\exp\left(\mathrm{i}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\int\left\{\pi_{\mathrm{in}}^a\cdot\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{in+1}}^a-\mathrm{A}_{\mathrm{in}}^a}{\varepsilon}-\mathscr{H}_n\right\}\mathrm{d}r\right)\langle A',t'|\rangle$$
$$(\mathrm{dA}_n^a=\mathrm{d}A_{1n}^a\mathrm{d}A_{2n}^a\mathrm{d}A_{3n}^a,\mathrm{d}\pi_n^a=\mathrm{d}\pi_{1n}^a\mathrm{d}\pi_{2n}^a\mathrm{d}\pi_{3n}^a) \tag{3.6}$$

自(3.5),并考虑到 A_i 的排列次序可以任意,所以取:

$$\mathscr{H}_n=\frac{1}{2}\pi_{in}^a\cdot\pi_{in}^a+\frac{1}{2}\overline{B}_{in}^a\overline{B}_{in}^a-\pi_i^a\left(\frac{\partial A_{0n}'^a}{\partial x_i}+f_{abc}\overline{A}_{in}^bA_{0n}'^c\right)$$
$$+\frac{\mu^2}{2}(\overline{A}_{in}^a\overline{A}_{in}^a-A_{0n}'^aA_{0n}'^a) \tag{3.7}$$

定义:

$$\overline{A}_{in}^a=\frac{A_{in+1}^a+A_{in}^a}{2},\dot{A}_{in}^a=\frac{A_{in+1}^a-A_{in}^a}{\varepsilon} \tag{3.8}$$

$$\varepsilon_{ijk}\overline{B}^a_{kn} = \left(\frac{\partial \overline{A}^a_{jn}}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{A}^a_{in}}{\partial x_j} + f_{abc}\overline{A}^b_{in}\overline{A}^c_{jn}\right) \tag{3.9}$$

$$A'^{n}_{0a} = \frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\pi^a_{in} - f_{dea}\overline{A}^e_{in}\pi^d_{in}\right) \tag{3.10}$$

于是可以用 δ 函数和(dA'^a_{0n})积分来规定 $\mathscr{H}_n$ 中的 A^a_{0n}：

$$(3.6) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\prod_a\prod_{n=0}^{N-1}(\mathrm{d}\mathbf{A}^a_n)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^a_n}{h^3}\right)(\mathrm{d}A'^a_{0n})\cdot\prod_{x,a,n}\delta\left(A'^a_{0n} + \frac{1}{\mu^2}f_{dea}\overline{A}^e_{in}\pi^d_{in} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\pi^a_{in}\right)$$
$$\cdot\exp\left(i\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\int\left\{\pi^a_{in}\frac{A^a_{in+1} - A^a_{in}}{\varepsilon} - \mathscr{H}_n\right\}\mathrm{d}\mathbf{r}\right)\langle A',t'| \rangle \tag{3.11}$$

再用一个哑变量 π^a_{0n} 的积分 $d\pi^a_{0n}$ 来替换 δ 函数：

$$(3.6) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A'}^{A''}\prod_a\prod_{n=0}^{N-1}(\mathrm{d}\mathbf{A}^a_n)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^a_n}{h^3}\right)(\mathrm{d}A'^a_{0n})\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon\pi^a_{0n}}{h}\right)$$
$$\cdot\exp\left(i\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\int\pi^a_{0n}\left\{A'^a_{0n} + \frac{1}{\mu^2}f_{dea}\overline{A}^e_{in}\pi^d_{in} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\pi^a_{in}\right\}\mathrm{d}\mathbf{r}\right)$$
$$\cdot\exp\left(i\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\int\left\{\pi^a_{in}\dot{A}^a_{in} - \left[\frac{1}{2}\pi^a_{in}\pi^a_{in} + \frac{1}{2}\overline{B}^a_{in}\overline{B}^a_{in} - \pi^a_{in}\left(\frac{\partial A'^a_{0n}}{\partial x_i} + f_{abc}\overline{A}^b_{in}A'^c_{0n}\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{\mu^2}{2}(\overline{A}^a_{in}\overline{A}^a_{in} - A'^a_{0n}A'^a_{0n})\right]\right\}\mathrm{d}\mathbf{r}\right)\langle A',t'| \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A'}^{A''}\prod_a\prod_{n=0}^{N-1}(\mathrm{d}\mathbf{A}^a_n)\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}^a_n}{h^3}\right)(\mathrm{d}A'^a_{0n})\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon\pi^a_{0n}}{h}\right)$$
$$\cdot\exp\left(i\sum_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\int\left\{-\frac{1}{2}\left(\pi^a_{in} - \dot{A}^a_{in} - \frac{\partial A'^a_{0n}}{\partial x_i} - f_{abc}\overline{A}^b_{in}A'^c_{0n}\right.\right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{\mu^2}f_{abc}\overline{A}^b_{in}\pi^c_{0n} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\pi^a_{0n}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\dot{A}^a_{in} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A'^a_{0n} + \frac{\pi^a_{0n}}{\mu^2}\right) + f_{abc}\overline{A}^b_{in}\left(A'^c_{0n} + \frac{\pi^c_{0n}}{\mu^2}\right)\right]^2$$
$$- \frac{1}{2}\overline{B}^a_{in}\overline{B}^a_{in} - \frac{\mu^2}{2}\left[\overline{A}^a_{in}\overline{A}^a_{in} - \left(A'^a_{0n} + \frac{\pi^a_{0n}}{\mu^2}\right)\left(A'^a_{0n} + \frac{\pi^a_{0n}}{\mu^2}\right)\right]$$
$$\left.\left. - \frac{\pi^a_{0n}\pi^a_{0n}}{2\mu^2}\right\}d\mathbf{r}\right)\langle A',t'| \rangle \tag{3.12}$$

先把$\left(\dfrac{d\boldsymbol{\pi}^a_n}{h^3}\right)$积分积掉，再对哑变量作变数变换：

$$A'^a_{0n} + \frac{\pi^a_{0n}}{\mu^2} = \overline{A}^a_{0n} \tag{3.13}$$
$$\pi^a_{0n} = \pi'^a_{0n}$$

接着作 $d\pi'^a_{0n}$积分，积分得常数，于是有：

$$(3.6) = 常数\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{A'}^{A''}\prod_a\prod_{n=0}^{N-1}(\mathrm{d}\mathbf{A}^a_n)(\mathrm{d}\overline{A}^a_{0n})$$
$$\cdot\exp\left(i\prod_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\int\left\{\frac{1}{2}\left(\dot{A}^a_{in} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{A}^a_{0n} + f_{abc}\overline{A}^b_{in}\overline{A}^c_{0n}\right)^2 - \frac{1}{2}\overline{B}^a_{in}\overline{B}^a_{in}\right.\right.$$

$$
-\frac{u^2}{2}(\bar{A}_{in}\bar{A}_{in}-\bar{A}^a_{0n}\bar{A}^a_{0n})\Big\}\mathrm{d}\mathbf{r}\Big)<A',t'|> \tag{3.14}
$$

再换变数，取 $A_{0n}(n=0,1,\cdots,N-1)$ 为新的积分变数：

$$
\bar{A}_{0n}=\frac{A_{0n+1}+A_{0n}}{2} \tag{3.15}
$$

其中包括 $\bar{A}_{0n-1}=\dfrac{A_{0n}+A_{0n-1}}{2}$，但对 A_{0N} 不积分，它由 t'' 时的(3.4)'决定。由于雅可毕行列式为常数，使得 $A^a_{1n},A^a_{2n},A^a_{3n},A^a_{0n}$ 处于同等地位：

$$
\begin{aligned}
(3.6) &= \text{常数}\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\int_{A'}^{A''}\prod_a\prod_{n=0}^{N-1}(\mathrm{d}\mathbf{A}^a_n)(\mathrm{d}\bar{A}^a_{0n})\\
&\quad\cdot\exp\Big(i\prod_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\int\Big\{\frac{1}{2}\Big(\dot{A}^a_{in}+\frac{\partial}{\partial x_i}\bar{A}^a_{0n}+f_{abc}\bar{A}^b_{in}\bar{A}^c_{0n}\Big)^2-\frac{1}{2}\bar{B}^a_{in}\bar{B}^a_{in}\\
&\quad-\frac{u^2}{2}(\bar{A}^a_{in}\bar{A}^a_{in}-\bar{A}^a_{0n}\bar{A}^a_{0n})\Big\}\mathrm{d}\mathbf{r}\Big)<A',t'|>\\
&= \text{常数}\cdot\lim_{\varepsilon\to0}\int_{A'}^{A''}\prod_a\prod_{n=0}^{N-1}(\mathrm{d}\mathbf{A}^a_n)(\mathrm{d}A^a_{0n})\\
&\quad\cdot\exp\Big(i\prod_{n=0}^{N-1}\frac{\varepsilon}{\hbar}\int\mathscr{L}(\dot{A}_n,A_n)\mathrm{d}\mathbf{r}\Big)<A',t'|>\\
&= \text{常数}\cdot\int_{A'}^{A''}\prod_a\mathrm{d}(\mathbf{A}^a)\mathrm{d}(A^a_0)\\
&\quad\cdot\exp\Big(\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{r}\mathscr{L}(\dot{A}(x,t),A(x,t)\Big)<A',t'|>
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

这样就证明了在带有质量的、有自作用的矢量场的情况下，(1.59)仍成立，路径积分中的 $\mathscr{L}$ 就是原来的 $\mathscr{L}$。

仿照以前的做法，把 J 放进去，立刻有(略去常数因子)：

$$
\begin{aligned}
W[J] &= \int\prod_a\mathrm{d}(\mathbf{A}^a)\mathrm{d}(A^a_0)\\
&\quad\cdot\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}t\mathrm{d}\mathbf{r}\Big(-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}-\frac{\mu^2}{2}A^a_\mu A^a_\mu+A^a_\mu J^a_\mu\Big)\Big\}
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

再用§2-3的办法，取出 A 的二次项，在欧氏空间有：

$$
\frac{1}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x_E\mathrm{d}^4y_EA^i_\mu(x_E)\frac{1}{2}[(\Box_E-\mu^2)\delta_{\mu\nu}-\partial_{\mu E}\partial_{\nu E}]\delta_{ij}\delta^4(x_E-y_E)A^i_\nu(y_E)
$$

于是

$$
\begin{aligned}
K^{ij}_{\mu\nu}(x_E-y_E) &= -[(\Box_E-u^2)\delta_{\mu\nu}-\partial_{\mu E}\partial_{\nu E}]\delta_{ij}\delta^4(x_E-y_E)\\
&= \int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})+i\nu(\tau_x-\tau_y)}[(\mathbf{k}^2+\nu^2+\mu^2)\delta_{\mu\nu}-k_{\mu E}k_{\nu E}]\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

与§2-3的 R_ξ 规范的例子对比，这里的 $K^{ij}_{\mu\nu}(x_E)$ 正好相当于取 M_W 为 $\mu,\xi=0$。所以立刻有(在闵氏空间)：

$$
\Delta^{ij}_{\mu\nu A}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}e^{ikx}\frac{-i}{k^2+\mu^2-i\varepsilon}\Big(\delta_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{\mu^2}\Big)\delta_{ij} \tag{3.18}
$$

这正是通常有静止质量的矢量场的传播子。为了同通常的矢量场理论比较，我们先取 f_{abc}

$=0$。在这种情况下，通常正则量子化给出的传播子 $\Delta^{ij}_{\mu\nu A}$之中还有一个非协变项。另外，通常 S 矩阵方法要用 $\mathscr{H}_I$ 来做微扰，在费米场与矢量场相互作用的 $\mathscr{H}_I$ 中，也包含一个非协变项。两个非协变项的贡献正好互相抵消。所以在费米场与矢量场($f_{abc}=0$)相互作用的物理系统中，实际起作用的传播子仍旧是(3.18)(可参见[1]的有关章节)。对比之下，路径积分方法就简捷得多了：第一，传播子就是(3.18)，是协变的；第二，路径积分方法使用 $\mathscr{L}_I$(而不是 $\mathscr{H}_I$)来做微扰，$\mathscr{L}_I$ 中没有非协变项。这样，就去掉了非协变项的累赘。如果再加上 A^a_μ 的自作用(取 $f_{abc}\neq 0$)，正则量子化就会更困难，但路径积分方法则并不太复杂。这是路径积分量子化的优点，也是用相互作用的拉氏量 $\mathscr{L}_I$ 做微扰的优点。

如果取 $f_{ijk}\neq 0, \mu^2=0$，则(3.1)就化为规范场的拉氏量。此时的(3.18)是发散的，于是我们又遇到了 §2-3 中所说的困难，即 $K_{\mu\nu}$的奇异性困难。

§3-2　质量为零时的困难和 Faddeev-Popov 处理方法[2]

正如前述，由于规范场的静止质量 $\mu=0$，我们已经遇到了一些困难。如 $K_{\mu\nu}$的奇异性(即 $\mathrm{Det}|K_{\mu\nu}|=0$，见 §2-3)以及 $\Delta^{ij}_{\mu\nu A}\to\infty$ (见 3.18)。$K_{\mu\nu}$的奇异性还会导致(3.17)或 $W[J]$中的 $\mathrm{d}(\mathrm{A}^a)\mathrm{d}(A^a_0)$积分的发散①。原因是 $\mathrm{Det}|K_{\mu\nu}|=0$ 意味着 $K_{\mu\nu}$对角化后，必定有等于 0 的对角矩阵元出现。与此相应，转到欧氏空间后，不可能 A^a_μ 的每一个自由度都在高斯型阻尼因子 $e^{-A^a_\mu K_{\mu\nu} A^a_\nu}$中的贡献。于是，那些对高斯型阻尼因子没有贡献的 A^a_μ 的自由度，在 $\mathrm{d}(\mathrm{A}^a)\mathrm{d}(A^a_0)$积分中就必定导致发散。

说得更具体一些，规范场的拉氏量 $\mathscr{L}$ 中的二次项是(见 §3-1，取 $\mu=0$)：

$$-\frac{1}{2}A^a_\mu K_{\mu\nu} A^a_\nu$$

其中　$-K_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}\Box-\partial_\mu\partial_\nu$

于是　$-K_{\mu\nu}A^a_\nu=\Box A^a_\mu-\partial_\mu(\partial_\nu A^a_\nu)$

$\longrightarrow \partial_\mu(K_{\mu\nu}A^a_\nu)=0$

由此可见，$K_{\mu\nu}A^a_\nu$ 只有三个横向分量(四维意义的横向，有三个分量)，并没有纵向分量。标积 $A^a_\mu(K_{\mu\nu}A^a_\nu)$中，$A^a_\mu$ 的纵向自由度贡献为零。所以，$\mathrm{d}(\mathrm{A}^a)\mathrm{d}(A^a_0)$的泛函积分中，缺少了 A^a_μ 的纵向自由度的阻尼因子，导致积分发散。因此，(3.17)式在进行第一步运算时，即转到欧氏空间作积分时，就已遇到了困难。

这个困难的根本原因在于 $\mathscr{L}$ 和 $S=\int d^4x\mathscr{L}$ 是规范不变的。它导致 $W[J]$和 $W[0]$都发散。

现在直观地看一看 $W[0]$的发散。我们取一个 x 点，在 x 点上取定一个 $A^a_\mu(x)$(每一个 $A^a_\mu(x)$有 $4n$ 个分量，$\mu=1,2,3,4$；$a=1,2,\cdots,n$)。经过规范变换 θ 后，得到 $A^{a\theta}_\mu(x)$：

$$A^a_\mu(x)\xrightarrow{\theta}A^{a\theta}_\mu(x)$$

令 θ 遍历 G 群定义下的 θ 的所有的值，则 $A^{a\theta}_\mu(x)$也遍历 G 规范群变换下所有可能的

① $W[0]$就是发散的。

$A_\mu^{a\theta}(x)$的值。所有这些$A_\mu^{a\theta}(x)$的集合,叫做规范群G的通过$A_\mu^a(x)$点(这个点有$4n$个坐标)的一个轨道。由于有n个$\theta^a(a=1,2,\cdots,n)$,所以每一个轨道包含着n个自由度。然而$A_\mu^a(x)$共有$4n$个分量,有$4n$个自由度,所以在选择轨道的出发点$A_\mu^a(x)$时,只剩下$3n$个自由度。根据自由度的考虑,$d(\mathrm{A}^a)d(A_0^a)$泛函积分相当于先对每个轨道里的$A_\mu^a(x)$的取值求和(也即对θ的取值求和——n维积分),然后再对轨道求和($3n$维积分):

$$\begin{aligned}&\prod_x\int\prod_{a,\mu}\mathrm{d}(A_\mu^a(x))\cdots\\&\quad=\prod_x\int\text{对不同的轨道求和(}3n\text{ 维积分)}\\&\quad\cdot\int\text{对同一轨道内的不同群参数 }\theta\text{ 的取值求和(}n\text{ 维积分)}\cdots\end{aligned}\tag{3.19}$$

由于规范不变性,在同一个轨道里面的$A_\mu^a(x)$的取值求和(即对θ的取值求和)时,$\mathscr{L}$和S保持不变,没有阻尼。所以(3.19)中"对同一轨道内的不同群参数θ的取值求和"应正比于积分$\int g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(x)(\theta^a,a=1,2,\cdots,n)$。因而(3.19)右方应出现如下因子

$$\prod_x\int g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(x)$$

这里为了利用群的不变性,我们采用了群G上的不变测度$g(\theta)d^n\theta(x)$(对此下面还要说明)。

于是直观地看到,(3.19)应写成

$$\begin{aligned}\prod_x\int\prod_{a,\mu}\mathrm{d}(A_\mu^a(x))\cdots&=\prod_x\int g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(x)\cdot\\&\cdot\int\text{对不同的轨道求和(}3n\text{ 维积分)}\cdots\end{aligned}\tag{3.20}$$

对于紧致群,$\int g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(x)$是在有限的区域内积分(例如在$O(3)$中,$\theta$就是*Euler*角),积分值大于1,然而是有限的(这积分值又叫做紧致群的体积)。但x是连续的,在连乘记号$\prod_x$之下,出现无穷个$\int g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(x)$(对应于无穷个时空点$x$)连乘。每个因子都大于1,结果就是无穷大。

$$\prod_x\int g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(x)=\infty\tag{3.21}$$

顺便说一下,在格点规范的情况,时空点x的个数有限(在数字计算中只能取有限个格点)。所以$\prod_x\int g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(x)$只是$\int g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(x)$的有限次幂,是有限的。这样就可以不必取规范条件,可以绕过规范的选取、$F-P$场的引入等一系列问题。

但在我们现在讨论的时空连续的情况,(3.21)和(3.20)都是无穷大。Faddeev 和 Popov 建议,为了定义有意义的(能作$d(A_\mu^a)$积分,$W(J)$能作微扰展开的)$W[0]$,应在(3.20)中把(3.21)的无穷大因子扣除。具体来说就是

$$\prod_x\int\prod_{a,\mu}\mathrm{d}(A_\mu^a)\cdots\xrightarrow{\text{换成}}\text{对不同的轨道求和(}3n\text{ 维积分)}\tag{3.22}$$

这相当于在每个轨道上只取一个$A_\mu^a(x)$。在这个限制下,$A_\mu^a(x)$剩下的有关a和μ的自

由度为 $3n$。

以上全是直观的讨论，以下要具体化一下。

首先一个问题是每一个轨道上只取一个 $A^a_\mu(x)$，怎样取法？这就涉及规范条件：

我们可以在 $A^a_\mu(x)$ 的有关 a 和 μ 的 $4n$ 维空间（$A^a_\mu(x)$ 是这个空间的一个点，它的 $4n$ 个分量就是它的 $4n$ 个坐标）中选取一个超曲面。这个超曲面必须与每一条轨道相交，而不是相切。超曲面的方程写作：

$$C^a(A_\mu) = 0 \qquad (a = 1,2,\cdots,n) \tag{3.23}$$

它把 $A^a_\mu(x)$ 的自由度约束掉 n 个，所以超曲面上的 $A^a_\mu(x)$ 的自由度为 $3n$。

这超曲面的方程(3.23)就是规范条件，通过曲面上的每一个点（即每一个 $A^a_\mu(x)$），有一条轨道。

我们再取另一个超曲面（即换一个规范条件）：

$$\overline{C}^a(A_\mu) = 0 \qquad (a = 1,2,\cdots,n) \tag{3.24}$$

总可以找到一组 θ^a（n 个，$a=1,2,\cdots,n$），使得 $A^n_\mu \xrightarrow{\theta} A^{n\theta}_\mu$（规范变换），
而且

$$C^a(A^\theta_\mu) = \overline{C}^a(A_\mu) = 0 \tag{3.25}$$

因为(3.25)的方程有 n 个，$\theta^a(x)$（$a=1,2,\cdots,n$）也有 n 个（对每一个时空点 x），解是可以有的。问题是 θ^a 的解是不是不止一组。下面关于 Gribor 不确定性的讨论将说明，在微扰论的前提下，可以认为只有一组 θ^a 解。

这就是说，在微扰论的前提下，规范变换 θ 与规范条件 $C^a(A^\theta_\mu)=0$ 之间有一一对应关系。

Gribov 不确定性[3]

以库伦规范为例，看是否可能存在规范变换 θ，使得 $A \xrightarrow{\theta} A^\theta$，边界条件为 $\partial_j\theta| =0$（$j=1,2,3$），无穷远处并且满足（即不止有一个规范满足(3.26)）

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \mathrm{div}\mathbf{A}^\theta = 0 \tag{3.26}$$

首先，对于 Abel 规范场是不可能的，除非变换 θ 是恒等变换。可以这样来证明：

Abel 规范场的规范变换是

$$A^\theta_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta \tag{3.27}$$

由于(3.26)，所以

$$\Delta^2\theta = 0 \tag{3.28}$$

（在这里，时间变量 t 不起作用，可以不写出来）。θ 的一般解可以写成

$$\theta(\mathbf{x}) = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}f(\mathbf{k}) + ax + by + cz + lxy + myz + nzx \tag{3.29}$$

（不起作用的常数项可以不写出来）。其实，$ax+by+czzxy+myz+nzx$ 也可以归到 $f(\mathbf{k})$ 之中，以 $\delta(\mathbf{k})$ 的微商的形式出现。但我们现在把 $\delta(\mathbf{k})$ 的微商都分出来，$f(\mathbf{k})$ 中不再含有 δ 函数。根据(3.28)式，有

$$0 = \int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)f(\mathbf{k})。$$

乘 $e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}\mathrm{d}^3x$ 积分，作逆变换，得到

$$0=(k_1'^2+k_2'^2+k_3'^2)f(\mathbf{k}')$$

由于 $k_1'^2+k_2'^2+k_3'^2>0$，所以

$$f(\mathbf{k}')=0 \tag{3.30}$$

（因为 $f(\mathbf{k}')$ 中不含 $\delta(\mathbf{k}')$ 及其微商，所以虽然 $k_1'=k_2'=k_3'=0$ 时，$f(0)$ 可以 $\neq 0$，但这个情况的测度为零，对 θ 无贡献）。代入(3.29)得

$$\theta(x)=ax+by+cz+lxy+myz+nzx$$

但边界条件要求在无穷远处 $\partial\theta=0$。所以 $a=b=c=l=m=n=0$

$$\therefore \theta(x)=0\longrightarrow A=A^0\text{。证毕。}$$

在其他规范这个结论也成立。例如在

$$\partial_\mu A_\mu=0$$

规范，取欧氏空间，要求

$$\Box_E\theta=0,$$

在无穷远处（x,y,z 很大时），取边界条件

$$\partial_\mu\theta|_{\text{无穷远处}}=0\text{。}$$

可同样证明 $\theta=0$。

其次，对非 Abel 规范场，θ 的不唯一性则是可能的。说明如下：

非 Abel 规范场的规范变换是（自(A1.18)）：

$$T^aA_\mu^{a\prime}=e^{-i\theta\gamma^i}\left[T^aA_\mu^a-\frac{i}{g}e^{i\theta\gamma^i}\partial_\mu(e^{-i\theta\gamma^i})\right]e^{i\theta\gamma^i}$$

我们现在讨论 θ 小的情况，此时规范变换简化成为

$$A_\mu^{a\prime}=A_\mu^a-\frac{i}{g}\partial_\mu\theta^a+f_{abc}\theta^bA_\mu^c,$$

与 Abel 规范的不同在于右方多了含有 A_μ^c 的项。若

$$\mathrm{div}\mathbf{A}^a=\mathrm{div}\mathbf{A}^{a\prime}=0$$

则 θ 满足如下方程式

$$\Delta^2\theta^a-gf_{abc}\mathrm{div}(\theta^b\mathbf{A}^c)=0 \tag{3.31}$$

这又有两种情况：

第一种情况，gA_μ^c 很小，可以把 θ 作微扰展开：

$$\theta=\theta^{(0)}+\theta^{(1)}+\cdots$$

代入(3.31)得到

$$\Delta^2\theta^{(0)a}=0$$

$$\Delta^2\theta^{(1)a}-gf_{abc}\mathrm{div}(\theta^{(0)b}\mathbf{A}^c)=0$$

$$\cdots$$

边界条件要求 $\partial_j\theta|_{\text{无穷远处}}=0(j=1,2,3)$，所以在零级近似就要求

$$\vec{\partial}\theta^{(0)a}|_{\text{无穷远处}}=0$$

与 $\Delta\theta^{(0)a}=0$ 合在一起，根据上面已有的证明，可知 $\theta^{(0)a}=0$。然后，又从

$$\Delta^2\theta^{(1)a}=0,\vec{\partial}\theta^{(1)a}|_{\text{无穷远处}}=0$$

知道 $\theta^{(1)a}=0,\cdots$结果 $A_\mu^{a\prime}=A_\mu^a$。没有非平凡的($A_\mu^{a\prime}\neq A_\mu^a$ 的)θ 解。

第二种情况。gA_μ^c 比较大,这时不能把 θ 微扰展开。我们来考察方程

$$\Delta^2\theta^a - gf_{abc}\mathrm{div}(\theta^b\mathbf{A}^c) = E\theta^a \tag{3.32}$$

它相当于一个薛定谔方程,描述一个假想的粒子在位势 $g\mathbf{A}$ 的作用下运动,θ 相当于波函数。在 $g\mathbf{A}$ 足够大时,可以有 $E=0$(甚至 $E<0$)的束缚态解(波函数 θ 在无穷远处为零)。换句话说,在 gA_μ^c 足够大时,可以找到 θ 的非平凡解,满足 $\mathbf{A}^a(x)\neq\mathbf{A}^{a\theta}(x)$ 和 $\mathrm{div}\mathbf{A}^a=\mathrm{div}\mathbf{A}^{a\theta}=0$。所以说,规范条件并不能把非 Abel 规范场 A_μ^a 唯一地确定下来。

Gribov 讨论了(3.32)的束缚态解的存在,所以这个不确定性叫做 Gribov 不确定性。事实上对于非 Abel 规范场,取其他的规范也会有类似的不确定性(gA_μ^a 足够大时)。可以统称为 Gribov 不确定性。

Gribov 不确定性并不影响规范场的微扰理论。§1-5 中已经指出,在微扰论中,不靠近给定的某一经典解的 A_μ^a 场组态,对微扰展开基本上没有贡献。而 Gribov 不确定性给出的场组态正好是后一种情况。说明如下:

1. 从上面看到,只有在 gA_μ^a 足够大时,也即在 $A^\theta-A\sim O\left(\frac{1}{g}\right)$时,才会有 $A^\theta\neq A$,而且满足 $\mathrm{div}\mathbf{A}^\theta=0$。可是,在微扰论中,$g$ 很小,所以 A^θ 不可能在 A 的邻近。

2. 如果不是小 θ 近似,则 θ 满足的方程不再是线性的,上面讨论并没有涉及这种情况。但是,如果在 θ 较大时才出现不确定性,那么经规范变换后得到的 $A_\mu^{a\theta}$ 就不会在 A_μ^a 的邻近了。

综上所述,可见 Gribov 不确定性对于路径积分微扰论没有什么影响。以后我们还将提到规范变换和规范条件之间的一一对应关系,但都是以微扰论为前提来说的。

下一个问题是:怎样把如下的路径积分

$$W[0] = \int d(\varphi)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathscr{L}(x)\right) \tag{3.33}$$

限制在某一个超曲面 $C^a(\varphi)=0$ 上? Faddeev 和 popov 所建议的办法就是引入一个泛函 $\mathscr{J}_c(\varphi)$(一般文献上都用Δ符号,为避免与玻色场的传播子混淆,我们改用 $\mathscr{J}_c(\varphi)$ 符号),并要求它满足

$$\mathscr{J}_c(\varphi)\int\prod_x g(\theta(x))d^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^\theta(x))) = 1 \tag{3.34}$$

这里的 $\prod_x g(\theta(x))d^n\theta(x)$ 就是前面(3.20) 中引入的群 G 上的不变测度。然后,我们把(3.34) 式插入(3.33) 式,就得到(以下 $\theta(x),\varphi(x)$ 简写为 θ,φ):

$$W[0] = \int d(\varphi)\prod_x g(\theta)d^n\theta\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^\theta))\exp\left(\frac{i}{\hbar}d^4x\cdot\mathscr{L}(x)\right) \tag{3.35}$$

下面要说明 $W[0]$ 写成(3.35) 的形式以后,可以把无穷大因子 $\prod_x\int g(\theta)d^n\theta$ 抽出来。在说明如何抽出之前,我们先看一看不变测度问题[①]。

设有一个离散群 G,R 是 G 中的一个元素,$f(R)$ 为群元素 R 的函数,$R\in m$,m 是包括 R

---

① 在一些群论书中可以找到不变测度的定义。这里为了叙述的连贯性和读者的方便,占用少量篇幅作一个说明。

的一个子集。如果 H 也是 G 中的一个元素，$HR=S$，则 m 中全部元素 $R_1, R_2, \cdots$ 经 H 作用后，就形成 $S_1, S_2, \cdots$ 所做成的子集 Hm。m 中与 Hm 中群元素的个数相同，于是：

$$\sum_{R \in m} f(R) = \sum_{S \in Hm} f(H^{-1}S) \tag{3.36}$$

若 m 是整个 G 群，则 Hm 必定也是整个 G 群，所以有：

$$\sum_{R \in G} f(R) = \sum_{S \in G} f(H^{-1}S) = \sum_{R \in G} f(H^{-1}R) \tag{3.37}$$

然后，我们要在李群 G 中找出与(3.36)，(3.37)相对应的性质：

可以在 R 的邻近建立一个测度 $\mathrm{d}\tau_R$，它相当于离散群的情况下，在 R 的邻近区域中的群元素的个数。但由于在连续群的情况，群元素的个数已没有意义，所以我们在此用群的测度来代替群元素的个数。可以把测度 $\mathrm{d}\tau_R$ 写成

$$\mathrm{d}\tau_R = \rho(R)\mathrm{d}^n r \tag{3.38}$$

$\mathrm{d}^n r$ 是所取的 R 邻近的群参数小体积，$\rho(R)$ 是 R 邻近的群参数体积中的测度密度（对应于离散的群元素个数的密度）。再拿 G 中的一个元素 H 遍乘 $\mathrm{d}\tau_R$ 中所有的元素（包括 R），则得到 $HR=S$ 邻近的各个群元素（包括 S）。它们的测度应该和 $\mathrm{d}\tau_R$ 的测度相等（相当于离散群的情况下元素的个数相等），于是，我们又可以在 S 的邻近建立一个测度 $\mathrm{d}\tau_S=\mathrm{d}\tau_{HR}$，要求

$$\mathrm{d}\tau_S = \rho(S)\mathrm{d}^n s = \mathrm{d}\tau_R = \rho(R)\mathrm{d}^n r \tag{3.39}$$

一旦这个关系成立，立刻有（与(3.36)对应）：

$$\int_{R \in m} \mathrm{d}\tau_R f(R) = \int_{S \in Hm} \mathrm{d}\tau_S f(H^{-1}S) \tag{3.40}$$

其中 m 代表包括 R 在内的一个区域，Hm 代表包括 $S=HR$ 在内的一个区域。

若 m 扩充成为整个 G 群，则 Hm 必定也扩充成为整个 G 群，所以有（与(3.37)对应）：

$$\int_{R \in G} \mathrm{d}\tau_R f(R) = \int_{S \in H \cdot G = G} \mathrm{d}\tau_S f(H^{-1}S) = \int_{R \in G} \mathrm{d}\tau_R f(H^{-1}R) \tag{3.41}$$

但到此为止(3.39)中的 $\rho(S)$，$\rho(R)$ 还没有很好地定义。为此，我们设想在恒等元素 E 附近有一个测度 $\mathrm{d}\tau_E$。仍沿用(3.38)的形式，则有

$$\mathrm{d}\tau_E = \rho(0)\mathrm{d}^n e \tag{3.42}$$

这里我们把 $\rho(E)$ 写成 $\rho(0)$。

在 G 中取一个元素 B，让它作用于 E 和 E 邻近的各个元素，则这些元素被 B 转移到 B 和 B 邻近的区域中。设 B 的群参数是

$$b_{k0} = \varphi_k(0, b_0)_2 \tag{3.43}$$

E 邻近的元素的群参数是 e（对于 E，$e=0$），经 B 作用后，转移到 B 的邻近的元素的群参数是

$$b_k = \varphi_k(e, b_0) \tag{3.44}$$

(3.44)又可写成：

$$b_{k0} + \mathrm{d}b_k = \varphi_k(0, b_0) + \left.\frac{\partial \varphi_k(e, b_0)}{\partial e_l}\right|_{e=0} \mathrm{d}e_l$$

$$\therefore \mathrm{d}b_k = \left.\frac{\partial \varphi_k(e, b_0)}{\partial e_l}\right|_{e=0} \mathrm{d}e_l \tag{3.45}$$

于是,E 邻近的群参数体积 $d^n e$ 和转移后的 β 邻近的群参数体积 $d^n b$ 之间有下列关系:

$$\mathrm{d}^n b = \begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial\varphi_1(e,b_0)}{\partial e_1}\right|_{e=0} & \cdots & \left.\dfrac{\partial\varphi_n(e,b_0)}{\partial e_1}\right|_{e=0} \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\dfrac{\partial\varphi_1(e,b_0)}{\partial e_n}\right|_{e=0} & \cdots & \left.\dfrac{\partial\varphi_n(e,b_0)}{\partial e_n}\right|_{e=0} \end{vmatrix} \mathrm{d}^n e = \mathscr{J}(b)\mathrm{d}^n e \tag{3.46}$$

现在定义

$$\rho(b) = \frac{\rho(0)}{\mathscr{J}(b)} \tag{3.47}$$

则立刻有

$$\rho(b)\mathrm{d}^n b = \frac{\rho(0)}{\mathscr{J}(b)}\mathrm{d}^n b = \rho(0)\mathrm{d}^n e \tag{3.48}$$

与(3.38),(3.39)是一致的,因为(3.48)又可写成:

$$\mathrm{d}\tau_B = \mathrm{d}\tau_E \tag{3.49}$$

这样,(3.38),(3.39)中的 ρ 就有了定义。而且(3.47)的定义对于(3.39),(3.40),(3.41)都是适用的,自洽的,因为取 B 为 R 或 S,就有

$$\mathrm{d}\tau_R = \rho(R)\mathrm{d}^n r = \rho(0)\mathrm{d}^n e$$

$$\mathrm{d}\tau_S = \rho(S)\mathrm{d}^n S = \rho(0)\mathrm{d}^n e \qquad (S = HR) \tag{3.50}$$

$\therefore$ (3.39)成立,从而(3.40),(3.41)成立。

用(3.47)定义的 ρ 所写出的测度(3.49),(3.50),叫做不变测度,或叫 Haar 测度,它的主要性质(紧致群的情况下)就是:

$$\mathrm{d}\tau_R = \mathrm{d}\tau_{HR} = \mathrm{d}\tau_{RH}$$

$$\int \mathrm{d}\tau_R f(R) = \int \mathrm{d}\tau_R f(H^{-1}R) = \int \mathrm{d}\tau_R f(RH^{-1}) \tag{3.51}$$

注意在紧致群的情况下,左乘不变测度和右乘不变测度是相等的。

现在回到(3.20)和(3.34),我们在(3.20)和(3.34)中采用的 $g(\theta(x))d^n\theta(x)$ 就是上述不变测度:$\mathrm{d}^n\theta(x)$ 就是群参数体积,$g(\theta)$ 就是 $\rho(\theta)$(元素 θ 邻近的密度)。

在(3.34)中对 φ 作规范变换 θ':

$$\varphi \longrightarrow \varphi^{\theta'}$$

$$\varphi^{\theta} \longrightarrow (\varphi^{\theta'})^{\theta} = \varphi^{\theta'\theta} \tag{3.52}$$

则(3.34)变成(这是 $\mathscr{J}_c(\varphi^{\theta'})$ 的定义):

$$\mathscr{J}_c(\varphi^{\theta'})\int\prod_x g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^{\theta'\theta}(x))) = 1 \tag{3.53}$$

利用(3.41),θ 相当于 R,θ'相当于 H^{-1},(3.53)又写成

$$\mathscr{J}_c(\varphi^{\theta'})\int\prod_x g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^{\theta}(x))) = 1 \tag{3.54}$$

(3.54)与(3.34)比较,立刻得到

$$\mathscr{J}_c(\varphi^{\theta'}) = \mathscr{J}_c(\varphi) \tag{3.55}$$

这 θ'是 G 群中任意取的一个元素,所以说,$\mathscr{J}_c(\varphi)$是规范不变的。

现在我们回到(3.35)式。先不作 $\mathrm{d}^n\theta$ 积分,因此可以在 θ 给定的情况下对 φ 作变数

变换，我们所选取的变数变换就是 $\varphi\longrightarrow\varphi^{\theta^{-1}}$，$\varphi^{\theta^{-1}}$ 表示对 φ 作规范变换 θ^{-1}。经过这个变数变换后，$\mathscr{L}(x)$ 不变，因为它是规范不变的；$\mathscr{J}_c(\varphi)=\mathscr{J}_c(\varphi^{\theta^{-1}})$ 也不变，因为我们刚才证明了在取不变测度后 $\mathscr{J}_c(\varphi)$ 规范不变（见(3.55)）经 θ^{-1} 变换后，$C^a((\varphi^{\theta^{-1}})^{\theta})=C^a(\varphi)$，不再与 θ 有关。最后，看一看 $d(\varphi)$ 在 $\varphi\longrightarrow\varphi^{\theta^{-1}}$ 的变数变换下变不变：

如果 φ 是规范场 A，则在微小规范变换下（见(A1.18)）有

$$A'^a_\mu=A^a_\mu-\frac{1}{g}\partial_\mu(\Delta\theta^a)+f_{abc}(\Delta\theta)^bA^c_\mu \tag{3.56}$$

（这里特别写成 $\Delta\theta$，以表示 $(\Delta\theta)^a$ 是一级微小量）。其中 f_{abc} 全反对称，所以 $\frac{\partial A'^a_\mu}{\partial A^b_\nu}$ 矩阵的对角元素不含 $\Delta\theta$：

$$\lim_{\Delta\theta\to0}\mathrm{Det}\left|\frac{\partial A'^a_\mu}{\partial A^b_\nu}\right|=\lim_{\Delta\theta\to0}\begin{vmatrix}1 & O(\Delta\theta) & O(\Delta\theta) & \cdots\\ O(\Delta\theta) & 1 & O\Delta\theta) & \cdots\\ O(\Delta\theta) & O(\Delta\theta) & 1 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots\end{vmatrix} \tag{3.57}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\to0}(1+O((\Delta\theta)^2)=1$$

这就是说，经过微小规范变换 $\Delta\theta$ 后，$d(A_\mu)=d(A'_\mu)$（没有一级微小修正）。

非微小的规范变换是由很多微小变换累积而成的。既然在每一个微小规范变换下，$\mathrm{d}(A_\mu)$ 都不变，则累积成为非微小的规范变换时，必然仍是 $\mathrm{d}(A_\mu)$ 不变。所以，在 $\varphi\to\varphi^{\theta^{-1}}$ 的变数变换下，$\mathrm{d}(\varphi)=\mathrm{d}(\varphi^{\theta^{-1}})$[①]。于是，作了 $\varphi\to\varphi^{\theta^{-1}}$ 的变数变换后，(3.35)的 $W[0]$ 写成：

$$W[0]=\int\mathrm{d}(\varphi)\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi))\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right)\cdot\int\prod_x g(\theta)\mathrm{d}^n\theta \tag{3.58}$$

此时的(3.58)与(3.20)一样，$\int\prod_x g(\theta)\mathrm{d}^n\theta$ 显然是一个可以抽掉的常数发散因子。抽掉它后，$W[0]$ 就写成

$$W[0]=\int\mathrm{d}(\varphi)\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi))\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right) \tag{3.59}$$

$\Big($如前所说，$W[0]$ 改变一个常数因子无关紧要，不影响物理结果。去掉 $\int\prod_x g(\theta)\mathrm{d}^n\theta(\theta)$ 因子自然也不例外$\Big)$。

现在，在(3.59)中，$d(\varphi)$ 的积分已经不是 $4n$ 个自由度的积分。由于有 $\delta(C^a(\varphi))(a=1,2,\cdots,n)$，$d(\varphi)$ 的积分只限于在 $c^a(\varphi)=0$ 的超曲面上，所以是 $3n$ 个自由度的积分。

事实上这就是(3.22)式的“对不同轨道求和”，已不再有规范不变性引起的发散。然

---

① 这里我们只讨论了 φ 为规范场的情况。事实上 φ 为费米场、Higgs 场时，$\mathrm{d}(\varphi)$ 在规范变换下也是不变的，见第四章的讨论。

后，我们又可以定义 $W[J]$，办法也是把 $\varphi_i J_i$ 放到 $W[0]$ 的指数上去。

$$W[J]=\int \mathrm{d}x(\varphi)\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi))\exp\cdot\left(i\int \mathrm{d}^4x\left(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}(x)+\varphi_i(x)J_i(x)\right)\right)\tag{3.60}$$

以上就是 Faddeev－Popov 提出的克服规范场静止质量为零所引起的困难的办法。可以看到，其关键在于利用了不变测度，从而可以把无穷大的常数因子 $\int\prod_x g(\theta)\mathrm{d}^n\theta$ 去掉。

§3－3 在 $A_0^a=0$ 规范（时间规范）下，从正则共轭量入手的方法和 Faddeev－Popov 方法是等价的

经过上一节的讨论后，接着而来的问题就是 Faddeev－Popov 方法和从正则共轭量入手的方法是不是相互一致。现在我们就取 $A_0^a=0$ 规范来看一看这个问题。

先找出正则共轭量。由于 $A_0^a=0$，所以（$\mathscr{L}^{\mathrm{T}}$ 表示时间规范拉氏量，即在规范不变的拉氏量 $\mathscr{L}$ 中令 $A_0^a=0$）：

$$\mathscr{L}^{\mathrm{T}}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i^a(x)}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial A_j^a(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i^a(x)}{\partial x_j}+f_{abc}A_i^b(x)A_j^c(x)\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_1^a(x)}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}B_i^a(x)B_i^a(x)\tag{3.61}$$

$B_i^a(x)$ 的定义见(3.2)。于是 $A_i^a(x)$ 的共轭场是

$$\pi_i^a=\frac{\partial\mathscr{L}^{\mathrm{T}}}{\partial\dot{A}_i^a}=\frac{\partial A_i^a}{\partial t}\tag{3.62}$$

按定义又有：

$$\mathscr{H}^{\mathrm{T}}=\pi_i^a\dot{A}_i^a-\mathscr{L}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{2}\pi_i^a\pi_i^a+\frac{1}{2}B_i^aB_i^a\tag{3.63}$$

这里不出现 π_i^a 与 A_i^a 的交叉项，所以立刻可以利用(1.59)，(1.60)的结果写出 $W[0]$：

$$W[0]=\int\prod_a \mathrm{d}(A_1^a)\mathrm{d}(A_2^a)\mathrm{d}(A_3^a)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4\mathscr{L}^{\mathrm{T}}(x)\right)\tag{3.64}$$

(3.64)又可写成

$$W[0]=\int\prod_a \mathrm{d}(\mathbf{A}^a)\mathrm{d}(A_0^a)\prod_x\delta(A_0^a)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right)\tag{3.65}$$

其中 $\mathscr{L}(x)$ 就是规范不变的（含有 A_0^a 的）拉氏量。

然后再用 Faddeev－Popov 的方法来求 $W[0]$。利用(3.59)式，立刻可以写出

$$W[0]=\int\prod_a \mathrm{d}(\mathbf{A}^a)\mathrm{d}(A_0^a)\mathscr{J}_{A_0}(A)\prod_{x,a}\delta(A_0^a(x))\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int \mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right)\tag{3.66}$$

但要想和(3.64)比较，还必须把 $\mathscr{J}_{A_0}(A)$ 求出来。为此，我们回到(3.34)式，看看 $\mathscr{J}_c(\varphi)$ 应该是什么。

假定在(3.34)中 φ 是已经给定的，则总可以找到一个 θ_0，使得

$$\varphi^{\theta_0}=\varphi_0\tag{3.67}$$

$$C^a(\varphi_0(x)) = 0$$

(在微扰论中，θ_0 是唯一的)。于是利用(3.41)，R 相当于 θ，H^{-1} 相当于 θ_0，可自(3.34)得到：

$$\begin{aligned} 1 &= \mathscr{J}_c(\varphi)\int\prod_x g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^\theta(x))) \\ &= \mathscr{J}_c(\varphi)\int\prod_x g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^{\theta_0\theta}(x))) \\ &= \mathscr{J}_c(\varphi)\int\prod_x g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi_0^\theta(x))) \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$(\varphi^{\theta_0\theta} = (\varphi^{\theta_0})^\theta = \varphi_0^\theta)。$$

如果 θ_0 是唯一的，则只有在 $\theta = E$(恒等变换)时，$C^a(\varphi_0^\theta(x))$方才有$\neq 0$ 的贡献。所以可以在 $\theta = E$ 的邻近把 $C^a(\varphi_0^\theta(x))$展开：

$$C_a(\varphi_0^\theta(x)) = C^a(\varphi_0(x)) + \left.\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|_{\varphi=\varphi_0}\theta^b \tag{3.69}$$

头一项 $C^a(\varphi_0(x)) = 0$，$g(\theta(x)) = \rho(E) = \rho(0) = 1$(因在 $\theta = E$ 邻近展开，故取 $g(\theta(x)) = \rho(E) = \rho(0)$。又因 $\rho(0)$ = 常数，常数因子无关紧要，故取做 1。)所以自(3.68)得到

$$\begin{aligned} \mathscr{J}_c^{-1}(\varphi) &= \int\prod_x \mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta\left(\left.\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|_{\varphi=\varphi_0}\cdot\theta^b\right) \\ &= \mathrm{Det}^{-1}\left.\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|\right._{\varphi=\varphi_0} \end{aligned} \tag{3.70}$$

注意在(3.70)中注明了 $\varphi = \varphi_0$。但是把(3.70)代入(3.59)，(3.60)时，就不须注明了，因为(3.59)，(3.60)中的 $\delta(C^a(\varphi))$已经保证了只在 $\varphi = \varphi_0$ 时才有$\neq 0$ 的贡献。这时，Det $\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|$中的 φ 保持和 $\delta(C^a(\varphi))$中的 φ 相同就行了。另外要记住一点，即$\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}$的微商是 $\theta = E$ 的邻近做的，正好适用小 θ 值的规范变换式$(\mathrm{A1.18})_3$。

顺便再看一看与 θ^{-1}有关的积分：

$$\overline{\mathscr{J}}_c^{-1}(\varphi) = \int\prod_x g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^{\theta^{-1}}(x))) \tag{3.71}$$

也是总可以找到一个 θ_0，使得

$$\varphi^{\theta_0} = \varphi_0$$

$$C^a(\varphi_0(x)) = 0$$

与(3.41)，(3.51)对比，R 相当于 θ，函数$f(R)$相当于 $\delta(C^a(\varphi^{\theta^{-1}}(x)))$，$H^{-1}$相当于 θ_0^{-1}，$f(RH^{-1})$相当于

$$\delta(C^a(\varphi^{(\theta\theta_0^{-1})^{-1}}(x))) = \delta(C^a(\varphi^{\theta_0\theta^{-1}}(x))) = \delta(C^a(\varphi_0^{\theta^{-1}}(x)))。$$

所以可以利用(3.51)得到：

$$\overline{\mathscr{J}}_c^{\,1}(\varphi) = \int\prod_x g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi_0^{\theta^{-1}}(x))) \tag{3.72}$$

同样在 $\theta = E$ 邻近展开，取 $g(\theta(x)) = \rho(E) = \rho(0) = 1$，

$$C^a(\varphi_0^{\theta^{-1}}(x)) = C^a(\varphi_0(x)) + \left.\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|_{\varphi=\varphi_0}(-\theta^b) \tag{3.73}$$

头一项得零,于是

$$\overline{\mathscr{J}}^{-1}(\varphi) = \int\prod_{x} \mathrm{d}^n\theta(x) \prod_{x,a} \delta\left(\left.\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|_{\varphi=\varphi_0}\cdot(-\theta^b)\right)$$

$$= \mathrm{Det}^{-1}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|_{\varphi=\varphi_0} = \mathscr{J}_c^{-1}(\varphi) \tag{3.74}$$

代入(3.71)得到与(3.34)等价的关系式:

$$\mathscr{J}_c(\varphi)\int\prod_{x} g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^{\theta^{-1}}(x))) = 1 \tag{3.75}$$

有了(3.70),我们就可以写出 $\mathscr{J}_{A_0}(A)$。取定 $C^a(\varphi)=A_0^a$,根据(A1.18)$_3$ 的 A_0^a 与 θ^b 的关系有:

$$\frac{\delta C^a(x)}{\delta\theta^b(y)} = -i\frac{\delta A_4^a(x)}{\delta\theta^b(y)}$$

$$= -i\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x_4}\delta^4(x-y)\delta_{ab} + f_{abc}\delta^4(x-y)A_4^c(x)\right)$$

$$= \frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial x_4}\delta^4(x-y)\delta_{ab}\quad (A_4^c = 0) \tag{3.76}$$

所以

$$\mathscr{J}_{A_0}(A) = \mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a(x)}{\delta\theta^b(y)}\right|_{A_0=0}$$

之中并不含有 A 场以及任何量子场。而且,由于它涉及所有的格子点,所以它也不是格子点的坐标的函数。事实上它是一个常数因子,而常数因子在路径积分中是不起作用的。于是,在 $A_0^a=0$ 规范,Faddeev - Popov 处理方法给出的 $W[0]$是:

$$W[0] = \int\prod_{a}\mathrm{d}(\mathbf{A}^a)\mathrm{d}(A_0^a)\mathscr{J}_{A_0}(A)\prod_{x,a}\delta(A_0^a(x))$$

$$\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right)$$

$$= 常数\int\prod_{a}\mathrm{d}(A_1^a)\mathrm{d}(A_2^a)\mathrm{d}(A_3^a)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}^{\mathrm{T}}(x)\right) \tag{3.77}$$

恰好和(3.65)一致。所以,在 $A_0^a=0$ 规范,从正则共轭量入手的方法和 Faddeev - Popov 方法是等价的。

再看 $A_0^a=0$ 规范的传播子:

$$\int\prod_{a}\mathrm{d}(A_1^a)\mathrm{d}(A_2^a)\mathrm{d}(A_3^a)\cdot e^{\frac{i}{2}\int\mathrm{d}^4x(A_\mu^a\Box A_\mu^a - A_\mu^a\partial_\mu\partial_\nu A_\nu^a)+A_i^aJ_i^a}\delta(A_0^a)\mathrm{d}(A_0^a)$$

$$= \int\prod_{a}\mathrm{d}(A_1^a)\mathrm{d}(A_2^a)\mathrm{d}(A_3^a)$$

$$\cdot\exp\left[\frac{i}{2}\int\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4yA_i^a(x)[(\Box\delta_{ij}-\partial_i\partial_j)\delta^4(x-y)]A_j(y)\right.$$

$$\left.+i\int\mathrm{d}^4xA_i^a(x)J_i^a(x)\right]$$

$$\therefore K_{ij}(x_E-y_E) = -(\Box_E\delta_{ij}-\partial_{iE}\partial_{jE})\delta^4(x_E-y_E)$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_E(x_E-y_E)}((\mathbf{k}^2+v^2)\delta_{ij}-k_ik_j) \tag{3.78}$$

$$K_{ij}^{-1}(x_E-y_E)=\int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_E(x_E-y_E)}\cdot\frac{\delta_{ij}+\frac{k_ik_j}{v^2}}{k^2+v^2}\tag{3.79}$$

转回闵氏空间后有：

$$\Delta_{ij}(x-y)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)}\cdot(-i)\cdot\frac{\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k_0^2}}{k^2-k_0^2-i\varepsilon}$$

$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)}\cdot(-i)\frac{\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k_0^2}}{k^2-i\varepsilon}\tag{3.80}$$

（请读者自己检验一下）。这里又看到，在传播子(3.80)中含有着规范场粒子的物理的极点 $k^2=0$。还应注意到，(3.80)是非协变的。

§3－4 利用规范不变性来推出其他规范的 W[0]路径积分和引出规范确定项

上一节已经知道，从正则共轭量入手得到的 $W[0]$ 路径积分和用 Faddeev－Popov 方法得到的 $W[0]$ 路径积分在 $A_0^a=0$ 规范是等价的。现在我们再利用规范不变性来证明，从一种规范的 Faddeev－Popov 的 $W[0]$ 路径积分可推出另一种规范的 Faddeev－Popov 的 $W[0]$ 路径积分。回顾一下(3.59)，它是在 $C^a(\varphi)=0$ 规范下的 Faddeev－Popov$W[0]$ 路径积分，其中含有 $\mathscr{J}_c(\varphi)$。类似于(3.34)，取 $\overline{C}^a(\varphi)=0$ 规范，又可定义 $\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)$ 如下：

$$\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)\int\prod_x g(\theta(x))d^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(\overline{C}^a(\varphi^\theta(x)))=1\tag{3.81}$$

把(3.81)乘到(3.59)上去，得到：

$$W[0]=\int d(\varphi)\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_x g(\theta(x))d^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi))$$
$$\cdot\prod_{x,a}\delta(\overline{C}^a(\varphi^\theta))\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathscr{L}(x)\right)\tag{3.82}$$

也是先不作 $d^n\theta(x)$ 积分，而在 θ 给定的情况下对 φ 作变数变换 $\varphi\to\varphi^{\theta^{-1}}$。在这个变数变换下，$\mathscr{L}(x)$ 不变（规范不变），$\mathscr{J}_c(\varphi)$ 和 $\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)$ 都不变（见(3.55)），$d(\varphi)$ 不变（见(3.57)及注），于是(3.82)变成

$$W[0]=\int d(\varphi)\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_x g(\theta(x))d^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^{\theta^{-1}}))$$
$$\cdot\prod_{x,a}\delta(\overline{C}^a(\varphi))\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathscr{L}(x)\right)\tag{3.83}$$

利用(3.75)，$d^n\theta(x)$ 积分后立刻得到：

$$W[0]=\int d(\varphi)\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)\prod_{x,a}\delta(\overline{C}^a(\varphi))\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int d^4x\mathscr{L}(x)\right)\tag{3.84}$$

正好是在(3.59)中把 $C^a(\varphi)$ 换成 $\overline{C}^a(\varphi)$，$\mathscr{J}_c(\varphi)$ 换成 $\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)$。

由此可见，用 Faddeev－Popov 方法写出的 $W[0]$ 路径积分是规范不变的，这是一个很

有用的性质。

我们还可以把(3.34)改写成

$$\mathscr{J}_{c-\varepsilon}(\varphi)\int\prod_{x} g(\theta(x))\mathrm{d}^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^\theta(x))-\varepsilon^a(x))=1 \tag{3.85}$$

其中 $\varepsilon^a(x)$是 x 的任意函数,但不含 φ 场。根据(3.70)可得

$$\mathscr{J}_{c-\varepsilon}(\varphi)=\mathrm{Det}\left|\frac{\delta(C^a-\varepsilon^a)}{\delta\theta^b}\right|_{\varphi=\varphi_0'}=\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|_{\varphi=\varphi_0'} \tag{3.86}$$

$$\varphi_0' \text{ 满足 } C^a(\varphi_0')-\varepsilon^a(x)'=0$$

于是,利用上面(3.81)-(3.84)的结果,把 $\overline{C}^a$ 取作 $C^a-\varepsilon^a$,则(3.84)写成:

$$W[0]=\int\mathrm{d}(\varphi)\mathscr{J}_{c-\varepsilon}(\varphi)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi)-\varepsilon^a(x))\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right)$$

$$=\int\mathrm{d}(\varphi)\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi)-\varepsilon^a(x)\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right) \tag{3.87}$$

这里对 $\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|$也不必标明 $\varphi=\varphi_0'$,因为 δ 函数保证了只有在 $\varphi=\varphi_0'$(即 $C^a(\varphi)-\varepsilon^a(x)=0$)时才有$\neq 0$ 的贡献。在 $\mathscr{J}_{c-\varepsilon}(\varphi)$中,现在可认为 φ 和 $C^a(\varphi)$中的 φ,以及和 $\mathscr{L}(x)$中的 φ 相同。

在(3.87)中,$\varepsilon(x)$ 是任意的,因为(3.81) ~ (3.84)的证明说明任意取 $\varepsilon^a(x)$ 都不会改变 $W[0]$。因此,给 $\varepsilon^a(x)$ 一个分布 $G(\varepsilon^a(x))$,$W[0]$ 必定也可写成$\left(\text{只要求}\int G(\varepsilon^a(x)\cdot\mathrm{d}\varepsilon^a(x)\text{ 积分不发散。略去常数因子}\right)$:

$$W[0]=\int\mathrm{d}(\varphi)\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi)-\varepsilon^a(x))$$

$$\cdot G(\varepsilon^a(x))\mathrm{d}(\varepsilon^a(x))\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right)$$

$$=\int\mathrm{d}(\varphi)\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|\prod_{x,a}G(C^a(\varphi))\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\mathscr{L}(x)\right) \tag{3.88}$$

为了计算微扰的方便,可以取

$$G(\varepsilon^a)=e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\xi}{2}\int\mathrm{d}^4x(\varepsilon^a(x))^2} \tag{3.89}$$

它满足 $\int G(\varepsilon^a)\mathrm{d}\varepsilon^a$ 不发散的要求。如果没有归一化好,则(3.88)与(3.87)可能相差常数倍。然而这是无关紧要的。

把(3.89)代入(3.88),就得到

$$W[0]=\int\mathrm{d}(\varphi)\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|$$

$$\cdot\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int\mathrm{d}^4x\left[\mathscr{L}(x)-\frac{\xi}{2}(C^a(\varphi))^2\right]\right) \tag{3.90}$$

于是,$W[0]$中的规范条件 $\delta(C^a(\varphi))$(见(3.59))就转化为 e 指数上的规范确定项 $-\frac{\xi}{2}(C^a(\varphi))^2$(见(3.90))。这正是§2-3 中引入规范确定项来计算规范场的传播子的依据。

而且,从上面的讨论还可看到,(3.90)形式的 $W[0]$路径积分也是规范不变的!

到此为止，我们已经证明的是：第一，$A_0^a=0$ 规范中，正则共轭量的方法和 Faddeev - Popov 方法是等价的。第二，Faddeev - Popov 方法在各种不同规范的情况下得到的$W[0]$，可以通过规范变换而互相沟通。也就是说，Faddeev - Popov 给出的 $W[0]$是规范不变的。但是，这里有一个问题，就是如果不是用 Faddeev - Popov 的方法，而是在各种规范中都从头开始，找到正则共轭量，找到$\mathscr{H}$的表式，把时间分成N等分，然后令$N\to\infty$，结果是否会一样？文献[4]讨论了一种做法，办法是把 $A_0^a=0$ 规范的场看做是“直角坐标”的坐标变量，把其他规范的场看做是“弯曲坐标”的坐标变量。从 $A_0^a=0$ 规范换到其他规范，相当于从直角坐标换到弯曲坐标。按照这样的观点，可以写出弯曲坐标的$\mathscr{H}$，并对弯曲坐标A_μ^a 作路径积分。计算结果表明，在协变规范的情况下，和 Faddeev - Popov 的方法是一致的；但在非协变规范的情况下，则和 Faddeev - Popov 方法的结果有所不同。（取 $A_0^a=0$ 规范时也和 Faddeev - Popov 方法一致）。

不过，由于非协变规范在计算微扰论问题时，特别是证明任意多圈图的可重正化性以及作高次微扰计算时并不方便，所以，我们以后的讨论都将限于取协变规范，不涉及不协变规范，从而也不涉及两种不同做法结果也不相同的问题。

再回到(3.90)，和以前一样，也可以定义 $W[J]$如下：

$$W[J]=\int d(\varphi)\,\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|\cdot\exp\left(i\int d^4x\left[\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}(x)-\frac{\xi}{2\hbar}(C^a(\varphi))^2+\varphi_i(x)J_i(x)\right]\right)\tag{3.91}$$

此式以后有用。目前为了初步探讨一下不同规范的 $W[J]$之间的关系，我们再回到(3.60)。取两种规范，$C^a(\varphi)=0$ 和 $\bar{C}^a(\varphi)=0$，写出

$$W_c[j]=\int d(\varphi)\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi))\cdot\exp\left(i\int d^4x\left(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}(x)+\varphi_i(x)j_i(x)\right)\right)\tag{3.92}$$

$$W_{\bar{c}}[J]=\int d(\varphi)\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)\prod_{x,a}\delta(\bar{C}^a(\varphi))\cdot\exp\left(i\int d^4x\left(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}(x)+\varphi_i(x)J_i(x)\right)\right)\tag{3.93}$$

与(3.82) - (3.84)的推导相仿，取 $\varphi\to\varphi^{\theta^{-1}}$：

$$\begin{aligned}W_c[j]&=\int d(\varphi)\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_x g(\theta(x))d^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi))\\&\quad\cdot\prod_{x,a}\delta(\bar{C}^a(\varphi^\theta))\exp\left(i\int d^4x\left(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}(x)+\varphi_i(x)j_i(x)\right)\right)\\&=\int d(\varphi)\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)\mathscr{J}_c(\varphi)\prod_x g(\theta(x))d^n\theta(x)\prod_{x,a}\delta(C^a(\varphi^{\theta^{-1}}))\\&\quad\cdot\prod_{x,a}\delta(\bar{C}^a(\varphi))\exp\left(i\int d^4x\left(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}(x)+\varphi_i^{\theta^{-1}}(x)j_i(x)\right)\right)\\&=\int d(\varphi)\mathscr{J}_{\bar{c}}(\varphi)\prod_{x,a}\delta(\bar{C}^a(\varphi))\\&\quad\cdot\exp\left(i\int d^4x\left(\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}(x)+\varphi_i^{\theta_0}(x)j_i(x)\right)\right)\end{aligned}\tag{3.94}$$

$$\text{其中 } \theta_0 \text{ 定义为 } C^a(\varphi^{\theta_0}) = 0$$

对比(3.93)与(3.94)又得到：

$$W_c[j] = \left[e^{i\int d^4x j_i(x) \cdot f_i\left(x, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} \right] W_{\bar{c}}[J] \,\Big|_{J=0} \tag{3.95}$$

其中 f_i 的定义是

$$\varphi_i^{\theta_0}(x) = f_i(x, \varphi(x)) \tag{3.96}$$

从(3.95)明显看到，C 规范的 $W_c[j]$ 和 $\overline{C}$ 规范的 $W_{\bar{c}}[J]$ 所给出的格林函数的差别不是在图的内部，而是在格林函数的腿部。具体来说，在 $\overline{C}$ 规范，腿是由($W_{\bar{c}}[J]$ 中的)$\varphi_i J_i$ 项引出 φ_i 去连接的。一旦换到 C 规范，(3.95)的费曼图的内部仍可以采用原先 $\overline{C}$ 规范的图的内部，腿则要改成由((3.95)中的)$j_i f_i(x,\varphi)$ 项引出的 $f_i(x,\varphi)$ 去连接。但在计算物理的 S 矩阵元时，腿的改动不会造成实质性的改变，因为必须把 $\lim_{k^2\to -m^2}(k^2+m^2)$ (m 是物理质量)乘到腿上去，以致 $f_i(x,\varphi)$ 连接出来的各个项中，只有极点与 φ 传播子的极点相同的$\left(\text{分母上有}\dfrac{1}{k^2+m^2}\text{的}\right)$项才能保留下来，从而只会影响重正化常数，而不影响物理的结果。关于这个问题还有一些细节，例如非物理的极点项正好互相抵消掉，例如必须是物理粒子的重正化的 S 矩阵，方才是规范不变的，等等。详细讨论将留到第九章。为了讨论较有普通性的情况，第九章的 $W[J]$ 将采用(3.91)的形式，$\mathrm{Det}\left|\dfrac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|$ 则以 F－P 场的拉氏函数的形式放在 e 指数上(见下节)。

§3－5　F－P 场的引出和它们的传播子

上一节又留下了一个问题，如果用(3.91)作微扰论计算，$\mathrm{Det}\left|\dfrac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|$ 如何处理？我们不妨回顾一下第二章。

在(2.8)式，对于实玻色场：

$$\int d(\varphi)\exp\left(\int d^4x_E d^4y_E \frac{1}{\hbar} \cdot \left(-\frac{1}{2}\varphi_\alpha(x_E)K_{\alpha\beta}(x_E-y_E)\varphi_\beta(y_E)\right)\right)$$

积分后会给出

$$\frac{1}{(\mathrm{Det}\,|K_{\alpha\beta E}|)^{1/2}}$$

在(2.16)式，对于复玻色场：

$$\int d(\varphi^*)d(\varphi)\exp\left(\int d^4x_E d^4y_E \frac{1}{\hbar}\left(-\varphi^*_\alpha(x_E)K_{\alpha\beta}(x_E-y_E)\varphi_\beta(y_E)\right)\right)$$

积分后给出

$$\frac{1}{\mathrm{Det}\,|K_{\alpha\beta E}|}$$

两者的 $\mathrm{Det}\,|K_{\alpha\beta E}|$ 都是在分母上。但是，又在(2.37)式看到，对于反对易性质的 $\bar{\rho},\rho$，

则有：

$$\int \prod_i \mathrm{d}\bar{\rho}_i \prod_j \mathrm{d}\rho_j \exp(-\bar{\rho}_i K_{ij} \rho_j) = \mathrm{Det}\,|K_{ij}|$$

积分后 $\mathrm{Det}\,|K_{ij}|$ 恰好出现在分子上。

所以，为了得到 $\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a(x)}{\delta\theta^b(y)}\right|$，应该使用两个反对易的 $\bar{u}(x)$，$u(x)$，做成如下的路径积分：

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{d}(\bar{u})\,d(u)\exp\left(\int \mathrm{d}^4x_E\mathrm{d}^4y_E\,\frac{g}{\hbar}\left(-\bar{u}_a(x_E)\,\frac{\delta C^a(x_E)}{\delta\theta^b(y_E)}u_b(y_E)\right)\right)\\&= \mathrm{Det}\left|\frac{g}{\hbar}\,\frac{\delta C^a(x_E)}{\delta\theta^b(y_E)}\right| \qquad (3.97)\end{aligned}$$

与 $\left|\frac{\delta C^a(x_E)}{\delta\theta^b(y_E)}\right|$ 只相差一个无关紧要的常数因子。采用欧氏空间和乘上 $\frac{g}{\hbar}$ 因子，是为了做微扰的方便。

这 $\bar{u}_a$，u_b 最早是由 Faddeev 和 Popov 引入的，所以可以称它们 F－P 场。F－P 场纯是为了对 $\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|$ 作微扰计算而发明出来的一种手段。它们不是物理的场，所以不能有外线。它们是标量场，却有费米子的反对易性质，违反自旋与统计的通常的关系，所以又常被称为“鬼场”。

把(3.97)的路径积分装到(3.91)中去，得到(换到欧氏空间)：

$$\begin{aligned}W_E[J] = &\int \mathrm{d}(\varphi)\,\mathrm{d}(\bar{u})\,d(u)\\&\cdot \exp\cdot\left(\int \mathrm{d}^4x_E\left(\frac{1}{\hbar}\left[\mathscr{L}(x_E) - \frac{\xi}{2}(C^a(\varphi))^2 + \bar{u}_a M_{ab} u_b\right]\right.\right.\\&\left.\left.+ \varphi_i(x_E)J_i(x_E)\right)\right) \qquad (3.98)\end{aligned}$$

其中 $\bar{u}_a M_{ab} u_b$ 的 $\int \mathrm{d}^4x_E$ 积分，本来应写成(见(3.97))：

$$\int \mathrm{d}^4x_E\mathrm{d}^4y_E\,\bar{u}_a(x_E)M_{ab}(x_E - y_E)u_b(y_E)$$

其中

$$M_{ab}(x_E - y_E) = -g\,\frac{\delta C^a(x_E)}{\delta\theta^b(y_E)} \qquad (3.99)$$

但 $M_{ab}(x_E - y_E)$ 中的 $x_E - y_E$ 经常以 $\delta(x_E - y_E)$ 及其微商的形式出现，所以立刻可以进行 d^4y_E 积分。(3.98)的写法表示已作过 d^4y_E 积分。

如果 $\bar{u}_a M_{ab} u_b$ 中只有 $\bar{u}$，u 二次项，不含其他的场(φ 场或 A 场)，则积分得到的 $\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a(x)}{\delta\theta^b(y)}\right|$ 也不含其他的场，可作为常数看待(例如 $A_0^a = 0$ 规范就是这种情况①)。但在一

---

① 显然轴规范 $C^a(x) = n_\mu A_\mu^a = 0$ 给出的 $\left|\frac{\delta C^a(x)}{\delta\theta^b(y)}\right|$ 也不含有任何场。所以这个雅可比行列式可以并入归一化因子，从而不出现 F－P 场。

般情况下，$\bar{u}_a M_{ab} u_b$ 中不仅有 $\bar{u},u$ 二次项，还有含有其他场（φ 或 A）的三次项（在取非线性的二次规范时，还会有四次项出现）。此时在作微扰时，就必须把高于二次的项同 $\bar{u},u$ 二次项分开，高于二次的项归入微扰拉氏量，$\bar{u},u$ 二次项则留作 Grassmann 代数类型的高斯积分。但是，如果高于二次的项中 $\bar{u},u$ 不设法处理，则 Grassmann 代数类型的高斯积分仍是不能作的。因此，我们又要沿用前面用过的办法，就是一方面把高于二次的含有 $\bar{u}$、u 的项和 $\mathscr{L}_I$ 中其他的项一起作微扰展开，一方面则在指数积分中引入两个源函数 $\bar{\xi}_a(x_E)$，$\xi_a(x_E)$，然后把微扰展开的 $\bar{u}_a(x_E)$ 换成 $-\dfrac{\delta}{\delta\xi_a(x_E)}$，$u_a(x_E)$ 换成 $\dfrac{\delta}{\delta\bar{\xi}_a(x_E)}$。若在闵氏空间，则 $\bar{u}_a(x)$ 换成 $-\dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta\xi_a(x)}$，$u_a(x)$ 换成 $\dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta\bar{\xi}_a(x)}$。

具体来说，

$$M_{ab}=M_{ab}^{(1)}+M_{ab}^{(2)}=-g\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b} \tag{3.100}$$

$M_{ab}^{(1)}$ 不含场，$\bar{u}_a M_{ab}^{(1)} u_b$ 是 $\bar{u},u$ 二次项；$\bar{u}_a M_{ab}^{(2)} u_b$ 是含 $\bar{u},u$ 的高于二次的项。取

$$\mathscr{L}_I'=\mathscr{L}_I+\bar{u}_a M_{ab}^{(2)} u_b \tag{3.101}$$

则(3.98)的 $W_E[J]$ 在微扰展开后写成：

$$\begin{aligned}W_E[J]=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int \mathrm{d}^4x_{1E}\cdots \mathrm{d}^4x_{nE}\\&\mathscr{L}_I'\left(\frac{\delta}{\delta J(x_{1E})},-\frac{\delta}{\delta\xi(x_{1E})},\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}(x_{1E})}\right)\cdots\\&\cdots\mathscr{L}_I'\left(\frac{\delta}{\delta J(x_{nE})},-\frac{\delta}{\delta\xi(x_{nE})},\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}(x_{nE})}\right)\\&\cdot\int\cdot\,\mathrm{d}(\varphi)d(\bar{u})\mathrm{d}(u)\\&\cdot\exp\Big\{\int\mathrm{d}^4x_E\mathrm{d}^4y_E\frac{1}{\hbar}\Big[\varphi_\alpha(x_E)\Big(-\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}(x_E-y_E)\Big)\varphi_\beta(y_E)\\&+\bar{u}_a(x_E)(-K_{ab}(x_E-y_E)u_b(y_E)\Big]+\int\mathrm{d}^4x_E[\varphi_\alpha(x_E)J_\alpha(x_E)\\&+\bar{\xi}_a(x_E)u_a(x_E)+\bar{u}_a(x_E)\xi_a(x_E)]\Big\}\end{aligned} \tag{3.102}$$

这里为了与§2-3的符号对应，取

$$M_{ab}^{(1)}=-K_{ab} \tag{3.103}$$

(3.102)中的高斯型积分都是可以作的，得到

$$\begin{aligned}W_E[J]=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{\hbar^n}\int \mathrm{d}^4x_{1E}\cdots \mathrm{d}^4x_{nE}\\&\mathscr{L}_I'\left(\frac{\delta}{\delta_J(x_{1E})},-\frac{\delta}{\delta\xi(x_{1E})},\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}(x_{1E})}\right)\cdots\\&\cdots\mathscr{L}_I'\left(\frac{\delta}{\delta J(x_{nE})},-\frac{\delta}{\delta\xi(x_{nE})},\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}(x_{nE})}\right)\end{aligned}$$

$$\cdot \text{常数} \cdot \exp\left\{\hbar\int d^4x_E d^4y_E\left[J_\alpha(x_E)\frac{1}{2}K^{-1}_{\alpha\beta}(x_E-y_E)J_\beta(y_E)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\bar{\xi}_a(x_E)K^{-1}_{ab}(x_E-y_E)\xi_b(x_E)\right]\right\} \tag{3.104}$$

按照§2-3的写法,又有

$$\begin{aligned} K^{-1}_{\alpha\beta}(x_E-y_E) &= \Delta^{\varphi}_{\alpha\beta}(x_E-y_E) \\ K^{-1}_{ab}(x_E-y_E) &= \Delta^{u}_{ab}(x_E-y_E) \end{aligned} \tag{3.105}$$

注意这里虽然引入了 $\bar{\xi}_{aE},\xi_{aE}$,但它们纯是为了用 $-\frac{\delta}{\delta\xi_{aE}},\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}_{aE}}$来替换 $u,\bar{u}$ 才引人的。正如上述,$\bar{u},u$ 在 Feynman 图中的贡献,应该只限于计算 $\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|$,相当于 $\bar{u},u$ 线的封闭圈,不应该有 $\bar{u},u$ 的外线。

(3.104)如果换回到闵氏空间,则是

$$W[J] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\frac{1}{\hbar^n}\int d^4x_1\cdots d^4x_n$$

$$\mathscr{L}'_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)},-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi(x_1)},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}(x_1)}\right)\cdots$$

$$\cdots\mathscr{L}'_I\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_n)},-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi(x_n)},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\bar{\xi}(x_n)}\right)$$

$$\cdot \text{常数} \cdot \exp\left\{\hbar\int d^4x d^4y\left[J_\alpha(x)\frac{1}{2}(-\Delta^{\varphi}_{\alpha\beta}(x-y))J_\beta(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\bar{\xi}_a(x)(-\Delta^{u}_{ab}(x-y))\xi_b(y)\right]\right\} \tag{3.106}$$

现在我们举四个例子来看一看 $\bar{u},u$ 的传播子 $\Delta^{u}_{ab}(x-y)$。都从欧氏空间入手:

例1. 费曼规范:

$C^i=\partial_\mu A^i_\mu(x)$(为了与(2.63)一致,$a,b$,换成 i,j)

$$\delta C^i=\partial_{\mu E}\left(-\frac{1}{g}\partial_{\mu E}\theta^i+f_{ijk}\theta^j A^k_{\mu E}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta C^i(x_E)}{\delta\theta^j(y_E)} =& -\frac{1}{g}\Box_E\delta^4(x_E-y_E)\delta_{ij} \\ &+\partial_{\mu E}\delta^4(x_E-y_E)A^k_{\mu E}(y_E)f_{ijk}\end{aligned} \tag{3.107}$$

自(3.100):

$$M_{ij}(x_E-y_E) = \Box_E\delta^4(x_E-y_E)\delta_{ij}-g\partial_{\mu E}\delta^4(x_E-y_E)A^k_{\mu E}(y_E)f_{ijk} \tag{3.108}$$

其中第一项是 $M^{(1)}_{ij}$,第二项是 $M^{(2)}_{ij}$。自(3.103):

$$K_{ij}(x_E) = -\Box_E\delta^4(x_E)\delta_{ij} = \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_E x_E}k_E^2\delta_{ij} \tag{3.109}$$

$$\therefore\quad K^{-1}_{ij}(x_E) = \Delta^{u}_{ij}(x_E) = \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_E x_E}\frac{1}{k_E^2}\delta_{ij} \tag{3.110}$$

转回到闵氏空间:

$$\Delta_{ij}^{u}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \frac{-i}{k^2 - i\varepsilon} \delta_{ij} \tag{3.111}$$

(请读者自己检验)。这就是费曼规范的 F－P 场的传播子。

例 2. ξ 规范：

$$C^i = \xi^{1/2} \partial_\mu A_\mu^i(x) \quad (\text{见}(2.66))$$

$$M_{ij}(x_E - y_E) = \xi^{1/2} \Box_E \delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij} - \xi^{1/2} g \partial_{\mu E} \delta^4(x_E - y_E) A_\mu^k(y_E) f_{ijk} \tag{3.112}$$

和例 1 相仿，得到

$$K_{ij}(x_E) = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} e^{ik_E x_E} \xi^{1/2} k_E^2 \delta_{ij}$$

$$K_{ij}^{-1}(x_E) = \Delta_{ij}^{u}(x_E) = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} e^{ik_E x_E} \frac{1}{\xi^{1/2}} \frac{1}{k_E^2} \delta_{ij}$$

$$\Delta_{ij}^{u}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \frac{1}{\xi^{1/2}} \frac{-i}{k^2 - i\varepsilon} \delta_{ij} \tag{3.113}$$

其实，ξ 规范和费曼规范（$\xi = 1$ 的 ξ 规范）等效，也就是说(3.112)和(3.108)等效。因为无非是 $\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta \theta^b}\right|$ 多了一个无关紧要的常数因子。这种等效性是规范不变性的一种表现（ξ 数值可变，代表不同规范）。事实上在 A_μ^a 与费米子耦合的情况下，物理的 S 矩阵之中 ξ 也是不会出现的（从而也是与例 1 的费曼规范等效），因为在 A 的传播子中，ξ 是与 $\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ 乘在一起的，而这种项在物理的 S 矩阵元中没有贡献（和量子电动力学一样）。另外，A 的外线也不会含有 ξ（参看第四章关于费曼规则的说明），这也是物理的 S 矩阵元规范不变的一种表现。

例 3. R_ξ 规范：

$$C^i = \xi^{1/2} \partial_\mu A_\mu^i - \xi^{-1/2} M_W \varphi_i \quad (i = 1,2,3, \text{见}(2.80))$$

$$\delta C^i = \xi^{1/2} \partial_\mu \delta_j A_\mu^i - \xi^{-1/2} M_W \delta \varphi_i$$

先看一看 $\delta\varphi_i$ 与 θ^j 的关系：

取(2.76)，在小 θ 的规范变换下$\left(\text{此处 } T_i \text{ 是 Pauli 矩阵}, L_i = \frac{1}{2} T_i\right)$：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \delta\varphi_2 + i\delta\varphi_1 \\ \delta x - i\delta\varphi_3 \end{pmatrix} &= -i\left(\frac{T_1\theta^1}{2} + \frac{T_2\theta^2}{2} + \frac{T_3\theta^3}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varphi_2 + i\varphi_1 \\ x - i\varphi_3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-i}{2\sqrt{2}}\left(\theta^1\begin{pmatrix} x - i\varphi_3 \\ \varphi_2 + i\varphi_1 \end{pmatrix} + \theta^2\begin{pmatrix} -ix - \varphi_3 \\ i\varphi_2 - \varphi_1 \end{pmatrix} + \theta^3\begin{pmatrix} \varphi_2 + i\varphi_1 \\ -x + i\varphi_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -v\theta^2 - iv\theta^1 \\ iv\theta^3 \end{pmatrix} - (\text{含 } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \bar{x} \text{ 的项})
\end{aligned} \tag{3.114}$$

此处取 $x = \bar{x} + v$（见附录一）。

$$\therefore \quad \delta\varphi_i = -\frac{v}{2}\theta^i + (\text{含 } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \bar{x} \text{ 的项}) \tag{3.115}$$

$$i = 1,2,3$$

于是得到（取欧氏空间，δA_μ^i 与前一样）：

$$\delta C^i = \xi^{1/2}\left(-\frac{1}{g}\Box_E\delta^4(x_E - y_E) + \frac{v}{2\xi}M_W\delta^4(x_E - y_E)\right)\theta^i$$
$$+ \xi^{1/2}(\text{含 } A,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\bar{x} \text{ 的项}) \tag{3.116}$$

$$\therefore \frac{\delta C^i}{\delta\theta^j} = \frac{\xi^{1/2}}{g}\left(-\Box_E\delta^4(x_E - y_E) - \frac{M_W^2}{\xi}\delta^4(x_E - y_E)\right)\delta_{ij}$$
$$+ \xi^{1/2}(\text{含 } A,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\bar{x} \text{ 的项}) \tag{3.117}$$

$\xi^{1/2}$也是归结为 Det$\left|\frac{\delta C^i}{\delta\theta^j}\right|$中的无关紧要的常数因子,所以可以取

$$M_{ij}(x_E - y_E) = \left(\Box_E\delta^4(x_E - y_E) - \frac{M_W^2}{\xi}\delta^4(x_E - y_E)\right)\delta_{ij}$$
$$-(\text{含 } A,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3 \text{ 的项}) \tag{3.118}$$

其中第一项是 $M_{ij}^{(1)}$,第二项是 $M_{ij}^{(2)}$。

求 $\bar{u},u$ 的传播子,只需 $M_{ij}^{(1)}$:

$$K_{ij}(x_E) = \left(-\Box_E + \frac{M_W^2}{\xi}\right)\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij}$$
$$= \int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_Ex_E}\left(k_E^2 + \frac{M_W^2}{\xi}\right)\delta_{ij} \tag{3.119}$$

$$K_{ij}^{-1}(x_E) = \Delta_{ij}^u(x_E) = \int\frac{\mathrm{d}^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_Ex_E}\frac{1}{k_E^2 + \frac{M_W^2}{\xi}}\delta_{ij} \tag{3.120}$$

$$\Delta_{ij}^u(x) = \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}e^{ikx}\frac{-i}{k^2 + \frac{M_W^2}{\xi} - i\varepsilon}\delta_{ij} \tag{3.121}$$

例 4:推广的 R_ξ 规范:

$$C^i = \xi^{1/2}\partial_\mu A_\mu^i + i\xi^{-1/2}g(v,L_i\bar{\varphi}) \qquad (\text{见}(2.94))$$
$$\frac{\delta C^i}{\delta\theta^j} = \frac{\xi^{1/2}}{g}\left(-\Box_E\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij} + \frac{i}{\xi}g^2(v,L_i(-iL_j)v)\right)$$
$$+ \frac{\xi^{1/2}}{g}(\text{含 } A,\bar{\varphi} \text{ 等场量的项}) \tag{3.122}$$

对(3.122)要解释一下。从§A1-2看到:

v 矢量的方向代表带有静止质量的 Higgs 场。

$L_a v(\neq 0)$矢量的方向代表没有静止质量的 Goldstone 场。

作为 M^2 的本征矢量,v 与 $L_a v(\neq 0)$具有不同本征值,它们应该是正交的(参考§2-3 例 4 中的讨论)。所以在$(v,L_i\bar{\varphi})$中:

原先平行于 v 的 $\bar{\varphi}_{//v}$分量没有贡献,

原先正交于 v 的 $\bar{\varphi}_{\perp v}$分量方才有贡献。

由于 $\bar{\varphi}_{\perp v}$原先本不含有 v,所以 $\bar{\varphi}_{\perp v} = \varphi_{\perp v}$,于是$(v,L_i\bar{\varphi})$可写成:

$$(v,L_i\bar{\varphi}) = (v,L_i\varphi_{\perp v})$$

在规范变换下:

$$\varphi_{\perp v} \to \varphi_{\perp v} - (iL_j\theta^i\varphi)_{\perp v} = \varphi_{\perp v} - (iL_j\theta^j(\bar{\varphi} + v))_{\perp v} - \varphi_{\perp v} - iL_jv\theta^j - (iL_j\bar{\varphi})_{\perp v}\theta^j$$

$$\therefore \delta\varphi_{\perp v} = -iL_j v\theta^j - (iL_j\overline{\varphi})_{\perp v}\theta^j$$

（第九章(9.61)式就是这种情况的一个例子）。

于是得到：

$$\delta C^i = \frac{\xi^{1/2}}{g}\left(-\Box_E\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij}\theta^j + \frac{i}{\xi}g^2(v, L_i\delta\varphi_{\perp v})\right)$$
$$+\frac{\xi^{1/2}}{g}(\text{含 } A, \overline{\varphi} \text{ 等场量的项})$$
$$= \frac{\xi^{1/2}}{g}\left(-\Box_E\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij}\theta^j + \frac{i}{\xi}g^2(v, L_i(-iL_j v))\theta^j)\right)$$
$$+\frac{\xi^{1/2}}{g}(\text{含 } A, \overline{\varphi} \text{ 等场量的项})$$

这就得到了(3.122)。

和例2一样，去掉$\xi^{1/2}$因子，采用(2.91)的$(M^2)_{ij}$的定义，得到

$$M_{ij}^{(1)}(x_E - y_E) = \Box_E\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij} - \frac{(M^2)_{ij}}{\xi}\delta^4(x_E - y_E) \tag{3.123}$$

$$K_{ij}(x_E) = -\Box_E\delta^4(x_E - y_E)\delta_{ij} + \frac{(M^2)_{ij}}{\xi}\delta^4(x_E - y_F)$$
$$= \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_E x_E}\left(k_E^2\delta_{ij} + \frac{(M^2)_{ij}}{\xi}\right)$$
$$= \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_E x_E}\left(\sum_r \overline{E}_i^{(r)}k_E^2\overline{E}_j^{(r)} + \sum_s E_i^{(s)}\left(k_E^2 + \frac{M_s^2}{\xi}\right)E_j^{(s)}\right) \tag{3.124}$$

写出(3.124)最后表式时利用了(2.100)，(2.104)。

$$K_{ij}^{-1}(x_E) = \int\frac{d^4k_E}{(2\pi)^4}e^{ik_E x_E}\left(\sum_r \overline{E}_i^{(r)}\frac{1}{k_E^2}\overline{E}_j^{(r)} + \sum_s E_i^{(S)}\frac{1}{k_E^2 + \frac{M_s^2}{\xi}}E_j^{(S)}\right) \tag{3.125}$$

转到闵氏空间：

$$\Delta_{ij}^u(x) = K_{ij}^{-1}(E_E)|x_{E\to x}$$
$$= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ikx}\left(\sum_r \overline{E}_j^{(r)}\frac{-i}{k^2 - i\varepsilon}\overline{E}_j^{(r)} + \sum_s E_i^{(s)}\frac{-i}{k^2 + \frac{M_s^2}{\xi} - i\varepsilon}E_j^{(s)}\right) \tag{3.126}$$

请注意，在§2-3例3的(2.84)中，

$$\frac{1}{(k^2 + M_W^2 - i\varepsilon)}\left(\delta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{M_W^2}{\xi} - i\varepsilon}\right)$$
$$= \frac{1}{(k^2 + M_W^2 - i\varepsilon)}\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}\right) - \frac{1}{k^2 + \frac{M_W^2}{\xi} - i\varepsilon}\frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \tag{3.127}$$

又在§2-3例4的(2.114)中，也可仿效(3.127)写成

$$\frac{1}{k^2 + M_s^2 - i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\cdot\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{M_s^2}{\xi} - i\varepsilon}\right)$$

$$= \frac{1}{k^2 + M_s^2 - i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_s^2}\right) - \frac{1}{k^2 + \frac{M_s^2}{\xi} - i\varepsilon}\frac{k_\mu k_\nu}{M_s^2} \tag{3.128}$$

与(3.121),(3.126),(2.86),(2.117)对比,立刻看到,F－P 传播子的极点总是和非物理的 Higgs 场传播子的极点,以及 A_μ^a 场传播子的非物理极点相同,这就将保证这些极点项的互相抵消(见第九章)。

参 考 文 献

1 D. Lurié, Particles and Fields, Interscience Publishers, Wiley, 1968.

2 L. D. Faddeev, V. N. Popov, Phys. Lett., B25(1967)29.

3 V. N. Gribov, Nucl. Phys., B139(1978)1.

4 N. H. Christ, T. D. Lee, Phys. Rev., D22(1980)939.

5 S. Abers, B. W. Lee, Phys. Reports., C9(1973)1.

第四章　微扰量子规范理论和 Slavnov 恒等式

这一章将说明微扰量子规范理论的一些费曼规则是如何导出的（前两章讨论的费曼规则只限于传播子），它们在第十章和附录三中将得到重要应用。为了便于进一步讨论重正化问题，还将引入简化符号，并用简化符号写出 B. R. S. 变换和 1*PI* 顶角生成泛函 Γ 的 Slavnov 恒等式。然后，再通过微扰方法来讨论 *AAA* 顶角 $\Gamma^{abc}_{\lambda\mu\nu}$ 和 $\bar{u}Au$ 顶角 $\nu^{abc}_{\rho\tau}$ 之间的关系，作为 W－T 恒等式的应用的一个例子。

§4－1　费曼规则

为了说明费曼规则如何导出，我们举如下的非 Abel 规范场的有效拉氏量 $\mathscr{L}_{eff}$ 为例，其中包含了协变的规范确定项和相应的 F－P 场，也包含了费米场（但没有写出 Higgs 场，与 Higgs 场有关的费曼规则见第十章 §10－8）：

$$\mathscr{L}_{eff}=-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu)^2-\frac{\xi}{2}(\partial_\mu A^a_\mu)^2$$

$$+\bar{u}_a(\Box\delta_{ab}-gf_{abc}\partial_\mu A^c_\mu)u_b-\bar{\psi}_i[\gamma_\mu(\partial_\mu\delta_{ij}-igA^a_\mu T^a_{ij})+m\delta_{ij}]\psi_j \tag{4.1}$$

与这个 $\mathscr{L}_{eff}$ 相应的费曼规则（动量表象）是：

1. 规范场的传播子（见 §2－3 的例 2）：

a,μ　b,ν　k

$$\triangle^{ab}_{\mu\nu}=\frac{-i}{k^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)\delta_{ab} \tag{4.2}$$

$$\xi=\begin{cases}1 & \text{费曼规范}\\ \infty & \text{朗道规范}\end{cases}$$

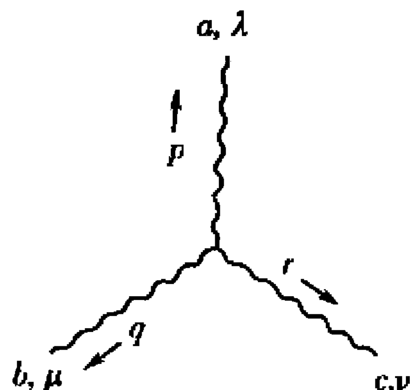
2. F－P 场的传播子（见 §3－5 的例 2）：

a　b　k

$$\triangle^{u}_{ab}=\frac{-i}{k^2-i\varepsilon}\delta_{ab} \tag{4.3}$$

因 F－P 场的传播子是有方向的（从 $\bar{u}$ 到 u），所以用带箭头的断线来表示。

3. 规范场三线顶点：



$$gf_{abc}[(p-q)_\nu\delta_{\lambda\mu}+(q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu}+(r-p)_\mu\delta_{\nu\lambda}] \tag{4.4}$$

说明：(4.1) 的 $\mathscr{L}_{eff}$ 中对这个图有贡献的项是：

$$-\frac{2}{4}(\partial_\alpha A^e_\beta-\partial_\beta A^e_\alpha)gf_{efg}A^f_\alpha A^g_\beta$$

换到动量表象，因为 p,q,r 都是向外（离开顶点），所以 $\partial_\mu\to-ik_\mu$（k 代表 p,q,r），于是，这个项在动量表象可写成：

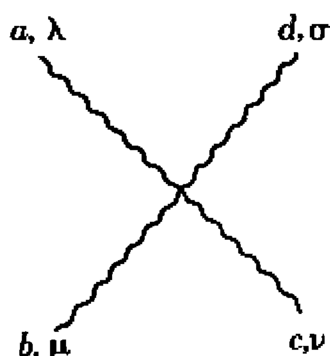
$$-\frac{1}{2}(-ik_\alpha A^e_\beta+ik_\beta A^e_\alpha)gf_{efg}A^f_\alpha A^g_\beta$$

S 矩阵中用的是 $i\mathscr{L}_{eff}$，所以还要乘一个 i。考虑到这个顶点与(a,λ)，(b,μ)，(c,ν)三个点相连有 3×2 =6 种方式，从而得到总的贡献：

$$\delta_{ae}\cdot\frac{1}{2}(-p_\alpha\delta_{\beta\lambda}+p_\beta\delta_{\alpha\lambda})gf_{efg}(\delta_{bf}\delta_{cg}\cdot\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}+\delta_{bg}\delta_{cf}\cdot\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})$$
$$+\delta_{be}\cdot\frac{1}{2}(-q_\alpha\delta_{\beta\mu}+q_\beta\delta_{\alpha\mu})gf_{efg}(\delta_{cf}\delta_{ag}\cdot\delta_{\nu\alpha}\delta_{\lambda\beta}+\delta_{cg}\delta_{af}\cdot\delta_{\nu\beta}\delta_{\lambda\alpha})$$
$$+\delta_{ce}\cdot\frac{1}{2}(-r_\alpha\delta_{\beta\nu}+\gamma_\beta\delta_{\alpha\nu})gf_{efg}(\delta_{af}\delta_{bg}\cdot\delta_{\lambda\alpha}\delta_{\mu\beta}+\delta_{ag}\delta_{bf}\cdot\delta_{\lambda\beta}\delta_{\mu\alpha})$$

整理后即得到(4.4)。

4. 规范场四线顶点



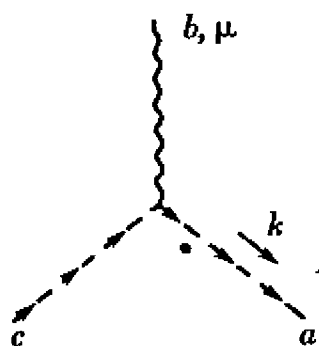
$$\begin{aligned}&-ig^2f_{abe}f_{cde}(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\sigma}-\delta_{\lambda\sigma}\delta_{\mu\nu})\\&-ig^2f_{ace}f_{dbe}(\delta_{\lambda\sigma}\delta_{\nu\mu}-\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\sigma})\\&-ig^2f_{ade}f_{bce}(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\lambda\nu}\delta_{\sigma\mu})\end{aligned}\tag{4.5}$$

说明：(4.1)的 $\mathscr{L}_{eff}$中对这个图有贡献的项是：

$$-\frac{1}{4}g^2f_{efg}f_{ehj}A^f_\mu A^g_\nu A^h_\mu A^j_\nu$$

这个顶点与(a,λ)，(b,μ)，(c,ν)，(d,σ)四个点有 4! 种方式相连。具体来说，与一个 A^a_λ 有四种连接方式，消去$\frac{1}{4}$。余下的三个 A，又有六种连接方式，从而可以直接写出(4.5)。

5. 规范场与 F－P 场的作用顶点：



$$-gf_{abc}k_\mu=gf_{acb}k_\mu\tag{4.6}$$

说明：$i\mathscr{L}_{eff}$中对这个图有贡献的是如下一项（经过部分积分）：

$$ig(\partial_\mu\bar{u}_a)f_{acb}A^b_\mu u_a$$

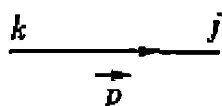
图上的点代表$(\partial_\mu\bar{u}_a)$中的微分。

换到 k 表象，因为 k 是向外的（离开顶点），所以有：

$$ig(-ik_\mu\bar{u}_a)f_{acb}A^b_\mu u_c$$

与(b,μ)，(c)，(a)三个点相连，就得到(4.6)。

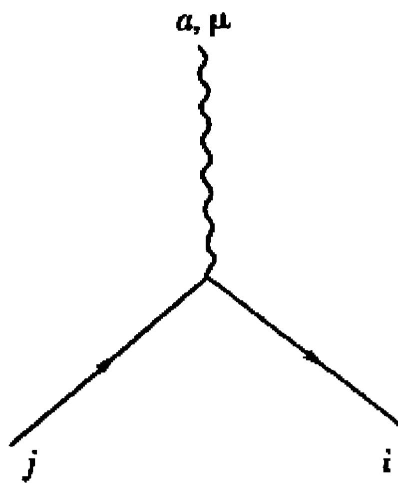
6. 费米场传播子（见 §2－2）：



$$S^{jk}_F(p)=\frac{-\gamma_\mu p_\mu-im}{p^2+m^2-i\varepsilon}\delta_{jk}\tag{4.7}$$

箭头方向是从 $\bar{\psi}_k$ 到 ψ_j（k,j 是群表示指标，例如可以是色指标或味指标）。

7. 规范场与费米场的作用顶点：



$$- \nu_\mu g T_{ij}^a \tag{4.8}$$

外线的表式

我们利用约化公式,约化公式的推导见〔1〕,〔2〕。外线的粒子都是物理粒子,其质量都取重正化好的物理质量。在约化公式中出现的 Z_φ, Z_ψ, Z_A 等都是重正化常数,见第五章。

1. 标量粒子的约化公式:

末态:

$$\frac{-i}{Z_\varphi^{1/2}} f_k^*(x)(\Box - \mu_\varphi^2) \xrightarrow{k\,表象} \frac{1}{Z_\varphi^{1/2}} \frac{i}{\sqrt{2E_k}}(k^2 + \mu_\varphi^2)$$

始态:

$$\frac{-i}{Z_\varphi^{1/2}}(\Box - \mu_\varphi^2) f_k(x) \xrightarrow{k\,表象} \frac{1}{Z_\varphi^{1/2}} \frac{i}{\sqrt{2E_k}}(k^2 + \mu_\varphi^2)$$

其中 $$f_k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - iE_k t}$$

传播子是 $$\frac{-i}{k^2 + \mu_\varphi^2 - i\varepsilon}(当\ k^2 \to -\mu_\varphi^2\ 时)$$

所以外线是:

$$\lim_{k^2 \to -\mu_\varphi^2} \frac{1}{Z_\varphi^{1/2}} \frac{i}{\sqrt{2E_k}}(k^2 + \mu_\varphi^2) \cdot Z_\varphi^{1/2} \frac{-i}{k^2 + \mu_\varphi^2 - i\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2E_k}}, \tag{4.9}$$

传播子的 $Z_\varphi^{1/2}$ 是重正化的结果(见第五章),下同。

2. 旋量粒子的约化公式:

末态:

$$\frac{i}{Z_\psi^{1/2}} \bar{u}_{k\sigma}(x)(\gamma \cdot \overleftarrow{\partial} + m) \xrightarrow{k\,表象} \frac{i}{Z_\psi^{1/2}} \sqrt{\frac{m}{E_k}}\, \bar{u}_{k\sigma}(i\gamma_\mu k_\mu + m)$$

其中 $$\bar{u}_{k\sigma}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{m}{E_k}}\, \bar{u}_{k\sigma} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

始态:

$$\frac{i}{Z_\psi^{1/2}}(-\gamma \overrightarrow{\partial} + m) u_{k\sigma}(x) \xrightarrow{k\,表象} \frac{i}{Z_\psi^{1/2}} \sqrt{\frac{m}{E_k}}\,(i\gamma_\mu k_\mu + m) u_{k\sigma}$$

其中 $$u_{k\sigma}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{m}{E_k}}\, u_{k\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

传播子是 $$\frac{-1}{\gamma_\mu k_\mu - im - i\varepsilon}(\text{当 }\gamma_\mu k_\mu \to im\text{ 时})$$

所以外线是：

$$\lim_{\hat{k}\to im}\frac{i}{Z_\psi^{1/2}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}\,\bar{u}_{k\sigma}(i\gamma_\mu k_\mu + m)\cdot Z_\psi^{1/2}\frac{-1}{\gamma_\mu k_\mu - im - i\varepsilon} = \sqrt{\frac{m}{E_k}}\,\bar{u}_{k\sigma} \tag{4.10$_1$}$$

$$\lim_{\hat{k}\to im} Z_\psi^{1/2}\frac{-1}{\gamma_\mu k_\mu - im - i\varepsilon}\cdot\frac{-i}{Z_\psi^{1/2}}\sqrt{\frac{m}{E_k}}(-i\gamma_\mu k_\mu - m)u_{k\sigma} = \sqrt{\frac{m}{E_k}}\,u_{k\sigma} \tag{4.10$_2$}$$

反粒子用 $v,\bar{v}$，有类似情况。

3. 有静止质量的矢量粒子的约化公式：

末态：

$$\frac{-i}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}e^{-ik\cdot x+E_k t}\varepsilon_{k_\lambda}(\Box-\mu_A^2)\xrightarrow{k\text{表象}}\frac{1}{Z_A^{1/2}}\frac{i}{\sqrt{2E_k}}\varepsilon_{k_\lambda}(k^2+\mu_A^2)$$

始态：

$$\frac{-i}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}\varepsilon_{k_\lambda}(\Box-\mu_A^2)e^{ik\cdot x-iE_k t}\xrightarrow{k\text{表象}}\frac{1}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2E_k}}(k^2+\mu_A^2)\varepsilon_{k_\lambda}$$

其中 ε_{k_λ} 是极化矢量：

$$\varepsilon_{k_1} = (\varepsilon_{k_{1x}},\varepsilon_{k_{1y}},\varepsilon_{k_{1z}},0),$$
$$\varepsilon_{k_2} = (\varepsilon_{k_{2x}},\varepsilon_{k_{2y}},\varepsilon_{k_{2z}},0),$$
$$\varepsilon_{k_3} = \left(\frac{E_k}{\mu_A}\frac{k_x}{|\boldsymbol{k}|},\frac{E_k}{\mu_A}\frac{k_y}{|\boldsymbol{k}|},\frac{E_k}{\mu_A}\frac{k_z}{|\boldsymbol{k}|},i\frac{|\boldsymbol{k}|}{\mu_A}\right)$$

它们都与

$$k=(k_x,k_y,k_z,iE_k)$$

正交，而且 $\varepsilon_{k_1},\varepsilon_{k_2},\varepsilon_{k_3},\frac{ik}{\mu_A}$ 是四个正交归一的 4 – 矢量。

传播子是（有自发破缺时的 R_ξ 规范）：

$$\frac{-i}{k^2+\mu_A^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\gamma}+\frac{k_\mu k_\nu}{\mu_A^2}\right)+\frac{i}{k^2+\frac{\mu_A^2}{\xi}}\cdot\frac{k_\mu k_\nu}{\mu_A^2}$$
$$=\frac{-i}{k^2+\mu_A^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+\frac{\mu_A^2}{\xi}}\right)(k^2\longrightarrow-\mu_A^2\text{时})$$

（见(2.84)以及第九章的(9.111)）。由于

$$(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu\cdot k_\mu=0$$

所以外线是：

$$\lim_{k^2\to-\mu_A^2}\frac{1}{Z_A^{1/2}}\frac{i}{\sqrt{2E_k}}(k^2+\mu_A^2)(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu Z_A^{1/2}\frac{-i}{k^2+\mu_A^2-i\varepsilon}$$
$$\cdot\left(\delta_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+\frac{\mu_A^2}{\xi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2E_k}}(\varepsilon_{k_\lambda})_\nu(\lambda=1,2,3) \tag{4.11}$$

此式与 ξ 无关，也即与规范无关。

4. 无静止质量的规范粒子的约化公式：

我们先看费曼规范：在这个规范中，A_μ^a 满足运动方程 $\Box A_\mu^a=0$。对于每一个 k，有两个物理的极化状态。相应的极化矢量 $\varepsilon_{k_\lambda}(\lambda=1,2)$ 与 k 正交；

$$(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu\cdot k_\mu=0$$
$$k_\mu\cdot k_\mu=0 \tag{4.12}$$

这两个 ε_{k_λ} 可以取作只有 1,2,3 三个分量。而且，只有这两个物理的极化状态方才有外线。

末态：

$$\frac{-i}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}e^{-ik\cdot x+ik_0t}\varepsilon_{k_\lambda}\Box\xrightarrow{k\text{表象}}\frac{1}{Z_A^{1/2}}\frac{i}{\sqrt{2k_0}}\varepsilon_{k_\lambda}k^2(\lambda=1,2)$$

始态：

$$\frac{-i}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\varepsilon_{k_\lambda}\Box e^{ik\cdot x-ik_0t}\xrightarrow{k\text{表象}}\frac{1}{Z_A^{1/2}}\frac{i}{\sqrt{2k_0}}\varepsilon_{k_\lambda}k^2(\lambda=1,2)$$

传播子是 $$(-i)\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}(\text{当 } k^2\to0\text{ 时})$$

所以外线是：

$$\lim_{k^2\to0}\frac{i}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}k^2(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu\cdot Z_A^{1/2}(-i)\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2-i\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{2k_0}}(\varepsilon_{k_\lambda})_\nu(\lambda=1,2) \tag{4.13}$$

现在要问一个问题：不同的规范，传播子不同，外线会不会也要变？回答是，物理的粒子，外线的贡献不因规范而变。以下就取各种规范来说明这一点（在没有真空自发破缺的情况下）。

在具体讨论各种规范之前，我们再考察一下(4.12)式：

按照 Lorentz 群的变换性质，带静止质量的自旋为 1 的粒子应该有三个自旋态($\lambda=1,2,3$)。在 k 给定的情况下，对应于每一个物理的自旋态有一个极化 4－矢量 ε_{k_λ}。这些极化 4－矢量都能满足 $k\cdot\varepsilon_{k_\lambda}=0$（这是带静止质量的矢量场的运动方程所要求的）。而且，事实上也正好存在三个互相正交的 $\varepsilon_{k_\lambda}(\lambda=1,2,3)$（见有静止质量的矢量粒子的约化公式一节）。但是，如果静止质量 $\mu_A=0$，则第三个极化矢量

$$\varepsilon_{k_3}=\left(\frac{E_k}{\mu_A}\frac{k_x}{|\boldsymbol{k}|},\frac{E_k}{\mu_A}\frac{k_y}{|\boldsymbol{k}|},\frac{E_k}{\mu_A}\frac{k_z}{|\boldsymbol{k}|},i\frac{|\boldsymbol{k}|}{\mu_A}\right)$$

的每一个分量都→∞，这是无意义的。再从另一方面考虑，由于此时 $E_k=k_0=|\boldsymbol{k}|$，如果要 ε_{k_3} 的各个分量不趋于∞，则可以取

$$\varepsilon_{k_3}=(ak_x,ak_y,ak_z,iak_0)$$

显然这个 ε_{k_3} 也满足 $k\cdot\varepsilon_{k_3}=0$，但同时又有

$$\varepsilon_{k_3}\cdot\varepsilon_{k_3}=a^2k^2=0$$

所以没有贡献，是不可观测到的。总之，由于这些情况，不带质量的矢量粒子在 k 给定时必须排除纵向的自旋态 ε_{k_3}，只能有而且必定有两种横向的物理的自旋态。即 $\varepsilon_{k_1},\varepsilon_{k_2}$，它们满足

$$\varepsilon_{k_1}\cdot\varepsilon_{k_2}=0$$

$$\varepsilon_{k_1}\cdot k=\varepsilon_{k_2}\cdot k=0 \tag{4.12)'$$

即满足(4.12)式。

以上的讨论带有普遍性,并不涉及具体的规范,所以 $\mu_A=0$ 的物理的矢量粒子的极化矢量 $\varepsilon_{k_\lambda}(\lambda=1.2)$,在任何规范都应满足(4.12)。(顺便说一下,量子电动力学为了计算方便而引入第三、第四个极化矢量,不满足 $\varepsilon_{k_\lambda}\cdot k=0$。但这两个极化状态是没有贡献的、非物理的,因此讨论约化公式时不考虑它们)。于是,以下讨论 $\mu_A=0$ 的矢量粒子在各种规范中的外线时,k 都满足 $k^2=0$;极化矢量 $\varepsilon_{k_\lambda}(\lambda=1,2)$ 都满足 $\varepsilon_{k_\lambda}\cdot k=0$。

为了导出约化公式,我们可以把 $A^{\text{in}}_{\text{out}}$ 展开为(相当于没有相互作用的 A):

$$A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}(x)=\sum_k\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon_{k_\lambda}(a^{\text{in}}_{k\lambda\,\text{out}}e^{ikx}+a^{+\text{in}}_{k\lambda\,\text{out}}e^{-ikx}) \tag{4.14}$$

其中 $\varepsilon_{k_\lambda}(\lambda=1,2)$ 满足 $k\cdot\varepsilon_{k_\lambda}=0$。同时有

$$\Box A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}(x)=0\qquad\qquad \partial_\mu A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}(x)=0$$

然而我们注意到,满足(4.12)的两个 ε_{k_λ} 不是唯一确定的。由于 $k^2=0$,取任意的 $\omega_{k\lambda}$(实数),则

$$(\varepsilon'_{k_\lambda})_\mu=(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu+\omega_{k_\lambda}k_\mu \tag{4.15}$$

也满足(4.12)′。从而又有 $A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}{}'(x)$:

$$A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}{}'(x)=\sum_k\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon'_{k_\lambda}(a^{\text{in}}_{k_\lambda\,\text{out}}e^{ikx}+a^{+\text{in}}_{k_\lambda\,\text{out}}e^{-ikx}) \tag{4.16}$$

也满足: $\Box A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}{}'(x)=0\qquad\qquad \partial_\mu A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}{}'(x)=0$

还看到:

$$A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}{}'(x)-A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}(x)+\sum_k\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{\lambda=1}^{2}\omega_{k_\lambda}k_\mu(a^{\text{in}}_{k_\lambda\,\text{out}}e^{ikx}+a^{+\text{in}}_{k_\lambda\,\text{out}}e^{-ikx})$$

$$=A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}(x)-\frac{\partial}{\partial x_\mu}\sum_k\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\sum_{\lambda=1}^{2}\omega_{k_\lambda}(ia^{\text{in}}_{k_\lambda\,\text{out}}e^{ikx}-ia^{+\text{in}}_{k_\lambda\,\text{out}}e^{-ikx}) \tag{4.17}$$

与$(A1.18)_3$ 比较,(4.17)右方的第二项正好相当于 $\partial_\mu\theta^a$(只是我们在 $A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}(x)$ 中把指标 a 省去了①)。所以 $A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}{}'(x)$ 与 $A^{\text{in}}_{\mu\,\text{out}}(x)$ 的差别显然在于一个规范变换。不过(4.17)与$(A1.18)_3$ 的规范变换也有差别,就是在(4.17)中没有 $gf_{abc}\theta^bA^c_\mu$ 项。这是因为 $A^{\text{in}}_{\text{out}}$ 与没有相互作用的 A 相当。没有相互作用,就意味着 $g=0$。所以对于没有相互作用的 A,规范变换$(A1.18)_3$ 应归结为(4.17);而物理粒子的极化矢量的规范变换则归结为(4.15)。

在(4.15)中,ω_{k_λ} 是任意的(实数),还必须确定一个规范,即增加一个附加条件,才能把 ω_{k_λ} 以及 ε'_{k_λ} 唯一地确定下来(就是用一个条件,确定一个待定参量 ω_{k_λ})。

---

① 在$(A1.18)_2$ 中,如果简单地令 $g\to0$(没有相互作用),则会出现∞,除非取 $\theta^l=g\underline{\theta}^l$,$\underline{\theta}^l$ 有限。于是$(A1.18)_2$ 右方可展开为 g 的幂级数。$g\to0$ 时,只留下 g 零次项。正好相当于$(A1.18)_3$ 中略去 $f_{abc}\theta^bA^c_\mu$ 项,而 $\frac{1}{g}\partial\mu\theta^a=\partial\mu\underline{\theta}^a$。

协变规范

以 ξ 规范为例子，附加条件就是：

$$\xi k\cdot\varepsilon_{k_\lambda}=0 \tag{4.18}$$

它和(4.12)相同，所以并没有增加新的条件（不过为了物理图象的简单清楚，一般都取 $(\varepsilon_{k_\lambda})_4=0$。但这在下面的讨论中无关紧要）。

非协变规范

A. 库伦规范：附加条件是：

$$k_i(\varepsilon_{k_\lambda})_i=0\quad(\text{对 } i=1,2,3 \text{ 求和}) \tag{4.19}$$

同时又满足(4.12)，$k_\mu(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu=0$。所以，在库伦规范中，$(\varepsilon_{k_\lambda})_4=0$

B. 轴规范：附加条件是：

$$n_\mu(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu=0 \tag{4.20}$$

再看约化公式。因为(4.12)仍成立，(4.14)和(4.16)形式相同，所以在各种不同的规范，约化公式有相同的形式（只是 ε_{k_λ}所满足的附加条件不同）：

末态：

$$\frac{1}{Z_A^{1/2}}\frac{i}{\sqrt{2k_0}}\varepsilon_{k_\lambda}k^2\quad(\lambda=1,2)$$

始态：

$$\frac{1}{Z_A^{1/2}}\frac{i}{\sqrt{2k_0}}\varepsilon_{k_\lambda}k^2\quad(\lambda=1,2)$$

再看传播子：

协变规范外线

以 ξ 规范为例子。传播子是：

$$\frac{-i}{k^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)$$

所以外线是

$$\lim_{k^2\to0}\frac{i}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}k^2(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu Z_A^{1/2}\frac{(-i)}{k^2-i\varepsilon}$$
$$\cdot\left(\delta_{\mu\nu}-\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\frac{k_k k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)=\frac{1}{\sqrt{2k_0}}(\varepsilon_{k_\lambda})_\nu\quad(\lambda=1,2) \tag{4.21$_1$}$$

此处利用了(4.18)。

非协变规范外线

A. 库伦规范：加入的规范确定项是

$$-\frac{\lambda}{2}(\partial_i A_i^a)^2$$

先求传播子。$K_{\mu\nu}$写成（为了方便，写成矩阵形式。取 k 表象）：

$$K_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} k^2+(\lambda-1)k_1k_1 & (\lambda-1)k_1k_2 & (\lambda-1)k_1k_3 & -k_1k_4 \\ (\lambda-1)k_2k_1 & k^2+(\lambda-1)k_2k_2 & (\lambda-1)k_2k_3 & -k_2k_4 \\ (\lambda-1)k_3k_1 & (\lambda-1)k_3k_2 & k^2+(\lambda-1)k_3k_3 & -k_3k_4 \\ -k_4k_1 & -k_4k_2 & -k_4k_3 & k^2-k_4k_4 \end{pmatrix}$$

尝试把 $K_{\mu\nu}^{-1}$写成如下形式：

$$K_{\mu\nu}^{-1}=\begin{pmatrix} 1+Bk_1k_1 & Bk_1k_2 & Bk_1k_3 & Ck_1k_4 \\ Bk_2k_1 & 1+Bk_2k_2 & Bk_2k_3 & Ck_2k_4 \\ Bk_3k_1 & Bk_3k_2 & 1+Bk_3k_3 & Ck_3k_4 \\ Ck_4k_1 & Ck_4k_2 & Ck_4k_3 & D+Ck_4k_4 \end{pmatrix}\frac{1}{k^2-i\varepsilon} \qquad (4.22)_1$$

则解得

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{\lambda-1+\dfrac{k^2k_0^2}{\lambda|\boldsymbol{k}|^4}}{k_0^2-\lambda|\boldsymbol{k}|^2} \\ C &= \frac{k^2}{\lambda|\boldsymbol{k}|^4} \\ D &= \frac{k^2}{|\boldsymbol{k}|^2} \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)_2$$

（请读者自己检验）

传播子是 $\qquad -iK_{\mu\nu}^{-1}$

在 $\lambda\to\infty$ 时，$B\to-\dfrac{1}{|\boldsymbol{k}|^2}$，$C\to0$，$D\to\dfrac{k^2}{|\boldsymbol{k}|^2}$，就得到通常看到的库伦规范传播子：

$$\begin{aligned} D_{ij}(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}e^{ikx}\frac{-i}{k^2-i\varepsilon}\left(\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right) \\ D_{i4}(x) &= D_{4i}(x)=0 \\ D_{44}(x) &= \int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-i}{|\boldsymbol{k}|^2}e^{ikx} \end{aligned} \qquad (4.22)_3$$

因为库伦规范中$(\varepsilon_{k_\lambda})_4=0$，而且由于(4.19)，所以外线是（不论 λ 是不是$\to\infty$）：

$$\lim_{k^2\to0}\frac{i}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}k^2(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu Z_A^{1/2}(-i)K_{\mu\nu}^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2k_0}}(\varepsilon_{k_\lambda})_\nu \quad (\lambda=1,2) \qquad (4.21)_2$$

B. 轴规范：加入的规范确定项是

$$-\frac{\xi}{2}(n_\mu A_\mu^a)^2$$

先求传播子。$K_{\mu\nu}$是

$$K_{\mu\nu}=k^2\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu+\xi n_\mu n_\nu$$

$$K_{\mu\nu}^{-1}=\frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{(k^2+\xi n^2)k_\mu k_\nu}{\xi k^2(k\cdot n)^2}-\frac{k_\mu n_\nu+k_\nu n_\mu}{k^2(k\cdot n)}$$

$$\xrightarrow{\xi\to\infty}\frac{1}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}+n^2\frac{k_\mu k_\nu}{(k\cdot n)^2}-\frac{k_\mu n_\nu+k_\nu n_\mu}{(k\cdot n)}\right)$$

（这里 k^2 是 $k^2-i\varepsilon$ 的简写）。注意只有在 $\xi\to\infty$ 时，$K_{\mu\nu}^{-1}$方才 $\sim k^{-2}$（当 $k\to\infty$ 时），方才是可重正化的规范（见第五章）。

由于$(\varepsilon_{k_\lambda})$满足(4.12)′和(4.20)，所以外线是（不论 ξ 是否$\to\infty$）：

$$\lim_{k^2\to 0}\frac{i}{Z_A^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{2k_0}}k^2(\varepsilon_{k_\lambda})_\mu Z_A^{1/2}(-i)K_{\mu\nu}^{-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2k_0}}(\varepsilon_{k_\lambda})_\nu\quad(\lambda=1,2)\tag{4.21$_3$}$$

总之，$(4.21)_1$，$(4.21)_2$，$(4.21)_3$ 都和(4.13)形式相同，只是$(\varepsilon_{k_\lambda})$ $(\lambda=1,2)$满足的附加条件不同。但正如上述，它们的差别在于(4.15)，所以 ε_{k_1}和 ε_{k_2}在各种规范中都是正交归一的，从而说明了自旋 1、$\mu_A=0$ 的物理粒子的外线贡献，不随规范而变。

以上都是常见的规范。顺便说一下，轴规范又分成三类：

(ⅰ)$n^2>0$，可以经洛仑兹变换变成 $A_3=0$ 的规范（有的作者专门把这种规范叫做“轴规范”）。

(ⅱ)$n^2<0$，可以经洛仑兹变换变成 $A_0=0$ 的规范（又叫“时间规范”。见第三章§3-3）。

(ⅲ)$n^2=0$，可以经洛仑兹变换变成 $A_3\pm A_0=0$ 的规范（又叫“光锥规范”）。

其细节这里不讲了。

以后我们将只讨论协变规范，一般不再讨论非协变规范。

§4-2　简化符号和反映规范群性质的两个等式

为了运算和书写的方便，我们现在引入简化符号，把如下的规范变换（θ 很小时）

$$A_\mu^a(x)\to A_\mu^a(x)-\frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)+f_{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x)\qquad\text{（见(A1.18)}_3\text{）}$$

$$\varphi_a(x)\to\varphi_a(x)-iL_{ab}^j\theta^j(x)\varphi_b(x)$$

$$\psi_l(x)\to\psi_l(x)-iT_{lm}^j\cdot\theta^j(x)\psi_m(x)\qquad\text{（见(A1.13)）}$$

统一地写成

$$\varphi_i\to\varphi_i+\frac{1}{g}(\Delta_i^j+gt_{ik}^j\varphi_k)\theta^j\tag{4.22}$$

我们的做法是，把 θ^j 写成 $\theta^j(x_j)$，同时：

1. $A_\mu^a(x)$的规范变换写成：

$$\begin{aligned}A_{\underline{i}}^{\underline{i}}(x_i)\to A_{\underline{i}}^{\underline{i}}(x_i)&-\frac{1}{g}\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_j)\delta_{\underline{i}\underline{j}}\theta^j(x_j)\\&+f_{\underline{i}\underline{j}\underline{k}}\delta^4(x_i-x_j)\delta^4(x_j-x_k)\delta_{\underline{i}\underline{k}}\theta^j(x_j)A_{\underline{k}}^{\underline{k}}(x_k)\end{aligned}\tag{4.23}$$

取　　$\varphi_i=A_{\underline{i}}^{\underline{i}}(x_i)$，

$\Delta_i^j=-\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_j)\delta_{\underline{i}\underline{j}}$，

$t_{ik}^j=f_{\underline{i}\underline{j}\underline{k}}\delta^4(x_i-x_j)\delta^4(x_j-x_k)\delta_{\underline{i}\underline{k}}$

(两个简化符号相乘,若有重复出现的 x,就对这个 x 积分,但同一符号中的重复出现的 x 不意味着积分。例如 t^j_{ik} 中的 x_j 同时有两个 δ 函数中出现,但并不对 x_j 积分,只是在乘上另一个简化符号,例如乘上 $\theta^j=\theta^j(x_j)$(如(4.23)中那样)之后,重复出现的才积分)。则(4.23)就可写成(4.22)形式。

2. $\varphi_a(x)$ 的规范变换写成:

$$\varphi_{\bar{i}}(x_i)\to\varphi_{\bar{i}}(x_i)-iL^{\underline{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\delta^4(x_i-x_j)\delta^4(x_j-x_k)\theta^{\underline{j}}(x_j)\varphi_{\bar{k}}(x_k) \tag{4.24}$$

取 $\varphi_i=\varphi_{\bar{i}}(x_i)$,

$\Delta^j_i=0$

$$t^j_{ik}=-iL^{\underline{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\delta^4(x_i-x_j)\delta^4(x_j-x_k)$$

则(4.24)就可写成(4.22)形式。

3. $\psi_i(x)$ 的规范变换写成:

$$\psi_i(x_i)\to\psi_{\bar{i}}(x_i)-iT^{\underline{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\delta^4(x_i-x_j)\delta^4(x_j-x_k)\theta^{\underline{j}}(x_j)\psi_{\bar{k}}(x_k) \tag{4.25}$$

取 $\psi_i=\psi_{\bar{i}}(x_i)$,

$\Delta^j_i=0$

$t^j_{ik}=-iT^{\underline{j}}_{\bar{i}\bar{k}}\delta^4(x_i-x_j)\delta^4(x_j-x_k)$

则(4.25)就可写成(4.22)形式。

在这里,一个指标 i 可以包含四种内容:$\underline{i}$ 代表洛仑兹指标(1、2、3、4);$\underline{i}$ 代表群指标;$\bar{i}$ 代表群表示的指标;x_i 则是时间空间指标(坐标)。从而把指标符号简化了。

两个等式

在紧致半单李群的情况下,结构常数可以写成全反对称的 $f_{\underline{i}\underline{j}\underline{k}}$。根据 Jacobi 恒等式:

$$f_{\underline{i}\underline{j}\underline{k}}f_{\underline{k}\underline{l}\underline{m}}+f_{\underline{i}\underline{l}\underline{k}}f_{\underline{k}\underline{m}\underline{j}}+f_{\underline{i}\underline{m}\underline{k}}f_{\underline{k}\underline{j}\underline{l}}=0$$

$$\therefore\quad f_{\underline{i}\underline{j}\underline{k}}f_{\underline{k}\underline{l}\underline{m}}-f_{\underline{i}\underline{l}\underline{k}}f_{\underline{k}\underline{j}\underline{m}}=f_{\underline{i}\underline{k}\underline{m}}f_{\underline{k}\underline{j}\underline{l}}=f_{\underline{j}\underline{l}\underline{k}}f_{\underline{i}\underline{k}\underline{m}} \tag{4.26}$$

上面 1. 中的 t^j_{ik} 与这里的 $f_{\underline{i}\underline{j}\underline{k}}$ 相对应,所以可以用简化符号把(4.26)写成

$$t^j_{ik}t^l_{km}-t^l_{ik}t^j_{km}=f_{jlk}t^k_{im} \tag{4.27}$$

其中

$$f_{jlk}=f_{\underline{i}\underline{j}\underline{k}}\delta^4(x_j-x_l)\delta^4(x_l-x_k) \tag{4.28}$$

(请读者自己检验)。这就得到用简化符号表述的反映规范不变性的第一个等式:

$$[t^j,t^l]=f_{jlk}t^k \tag{4.29}$$

(这里把 t^i,t^l,t^k 看作矩阵,略去矩阵元的脚标)。同时还有

$$[-iL^j,-iL^l]=-[L^j,L^l]=-f_{jlk}iL^k$$

$$[-iT^j,-iT^l]=-[T^j,T^l]=-f_{jlk}iT^k$$

把它们用简化符号表述出来(分别用上面 2、3 中的 t^j,t^l,t^k),也同样得到(4.29)。所以(4.29)这个等式对于规范场、标量场、费米场同样适用。

用简化符号表述的反映规范群性质的第二个等式是:

$$t^i_{lm}\Delta^j_m-t^j_{lm}\Delta^i_m=f_{ijk}\Delta^k_l \tag{4.30}$$

对于 φ_i 和 ψ_l,都有 $\Delta^j=0$,(4.30)自然成立。所以只须证明(4.30)对于 A^a_μ 也成立。

证明：

$$
\begin{aligned}
t^i_{lm}\Delta^j_m - t^j_{lm}\Delta^i_m =& -\int f_{\underline{l}\,\underline{i}\,\underline{m}}\delta^4(x_l - x_i)\delta^4(x_i - x_m)\delta_{\underline{l}\,\underline{m}}d^4x_m \cdot \partial_{\underline{m}}\delta^4(x_m - x_j)\delta_{\underline{m}\,\underline{j}} \\
&+ \int f_{\underline{l}\,\underline{j}\,\underline{m}}\delta^4(x_l - x_j)\cdot\delta^4(x_j - x_m)\delta_{\underline{l}\,\underline{m}}d^4x_m \cdot \partial_{\underline{m}}\delta^4(x_m - x_i)\delta_{\underline{m}\,\underline{i}} \\
=& f_{\underline{l}\,\underline{i}\,\underline{j}}\int\delta^4(x_l - x_i)\partial_{\underline{m}}\delta^4(x_i - x_m)\delta_{\underline{l}\,\underline{m}}d^4x_m\delta^4(x_m - x_j) \\
&+ f_{\underline{l}\,\underline{i}\,\underline{j}}\int\delta^4(x_l - x_j)\partial_{\underline{m}}\delta^4(x_j - x_m)\delta_{\underline{l}\,\underline{m}}d^4x_m\delta^4(x_m - x_i) \\
=& -f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{l}}\delta^4(x_l - x_i)\partial_{\underline{l}}\delta^4(x_i - x_j)\delta_{\underline{l}\,\underline{m}}\delta_{\underline{m}\,\underline{i}} \\
&- f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{l}}\delta^4(x_l - x_j)\partial_{\underline{l}}\delta^4(x_j - x_i)\delta_{\underline{l}\,\underline{m}}\delta_{\underline{m}\,\underline{i}} \\
=& -f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{l}}\delta^4(x_l - x_i)\partial_{\underline{l}}\delta^4(x_l - x_j) \\
&- f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{l}}\delta^4(x_l - x_j)\partial_{\underline{l}}\delta^4(x_l - x_i) \\
=& -f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{l}}\partial_{\underline{l}}(\delta^4(x_l - x_i)\delta^4(x_l - x_j))
\end{aligned}
$$

同时，(4.30)中的f_{ijk}也是简化符号，其具体内容如(4.22)。所以

$$
\begin{aligned}
f_{ijk}\Delta^k_l =& -f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{k}}\int\delta^4(x_i - x_j)\delta^4(x_j - x_k)d^4x_k\partial_{\underline{l}}\delta^4(x_l - x_k)\delta_{\underline{l}\,\underline{k}} \\
=& -f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{l}}\delta^4(x_i - x_j)\partial_{\underline{l}}\delta^4(x_l - x_j) \\
=& -f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{l}}\partial_{\underline{l}}(\delta^4(x_i - x_j)\delta^4(x_l - x_j)) \\
=& -f_{\underline{i}\,\underline{j}\,\underline{l}}\partial_{\underline{l}}(\delta^4(x_l - x_i)\delta^4(x_l - x_j))
\end{aligned}
$$

证毕

这两个用简化符号写出的等式在下一节讨论 B. R. S. 变换时将很有用。

用上述的简化符号，还可把作用量的规范不变性表述成（当 θ^α 小时）：

$$
\frac{\delta L_{inv}[\varphi]}{\delta\varphi_i}\left(\frac{1}{g}\Delta^\alpha_i + t^\alpha_{ij}\varphi_j\right)\theta^\alpha = 0 \text{①}
$$

然而 θ^α 是任意的，所以规范不变性实质上就是：

$$
\frac{\delta L_{inv}[\varphi]}{\delta\varphi_i}(\Delta^\alpha_i + gt^\alpha_{ij}\varphi_j) = 0 \tag{4.31}
$$

还可以把一般所取的线性规范的 C^α 用简化符号写成

$$
C^\alpha[\varphi] = F^\alpha_i\varphi_i \tag{4.32}
$$

§4－3　B. R. S. 变换

规范场的有效作用量

$$
L_{eff} = L_{inv} - \frac{\xi}{2}(C^\alpha)^2 + \bar{u}_\alpha M_{\alpha\beta}u_\beta \text{②} \tag{4.33}
$$

---

① 用了简化符号后，出现相同 x_i, x_j 指标（例如 $\varphi_i K_{ij}\varphi_j$，$\varphi_i\varphi_i$）就意味着 x_i 和 x_j 积分，所以把 $\mathscr{L}_{inv}$ 中的 φ_i 都写成简化符号，就意味着 $L_{inv}[\varphi] = \int d^4_x\mathscr{L}_{inv}(x)$。$L_{inv}$ 就代表通常的作用量。以后我们用简化符号时，就不写 $\mathscr{L}_{inv}$，而是写 L_{inv}。

② 注意这里的 ξ 和作为 F－P 场的源的 $\xi,\bar{\xi}$ 不是一回事。

并不是规范不变的。Becchi, Rouet 和 Stora 发现，如果把规范变换加以扩充，则 L_{eff} 仍具有一种不变性。这扩充的规范变换就叫做 B. R. S. 变换，L_{eff} 的不变性就是 B. R. S. 变换不变性。

具体来说，B. R. S. 变换是

$$\begin{aligned}
\delta\varphi_i &= (\Delta_i^\alpha + g t_{ij}^\alpha \varphi_j) u_\alpha \delta\lambda \\
\delta u_\alpha &= -\frac{g}{2} f_{\alpha\beta\gamma} u_\beta u_\gamma \delta\lambda \\
\delta \bar{u}_\alpha &= \xi F_i^\alpha \varphi_i \delta\lambda
\end{aligned} \tag{4.34}$$

(4.32) 的 $C^\alpha[\varphi]$ 的 B. R. S. 变换则是

$$\delta C^\alpha[\varphi] = F_i^\alpha (\Delta_i^\beta + g t_{ij}^\beta \varphi_j) u_\beta \delta\lambda \tag{4.35}$$

同时，自(4.32)和 $M_{\alpha\beta}$ 的定义，有：

$$M_{\alpha\beta} = -F_i^\alpha (\Delta_i^\beta + g t_{ij}^\beta \varphi_j) \tag{4.36}$$

(4.34)中的 $\delta\lambda$ 是一个与时空坐标无关的反对易 c 数。在(4.34)的第一式中，$u_\alpha\delta\lambda$ 相当于(4.22)式中的 $\frac{1}{g}\theta^\alpha$。$\delta\lambda$ 和 θ^α 都是无穷小。所以(4.34)相当于 φ_i 的定域规范变换。从而(4.33)的第一项在 B. R. S. 变换下不变。

现在证明(4.33)的后两项也不变。先导出两个关系式：

1.
$$\begin{aligned}
\delta M_{\alpha\beta} &= -\delta(F_i^\alpha(\Delta_i^\beta + g t_{ij}^\beta \varphi_j)) = -F_i^\alpha g t_{ij}^\beta \delta\varphi_j \\
&= -F_i^\alpha g t_{ij}^\beta (\Delta_i^\gamma + g t_{jk}^\gamma \varphi_k) u_\gamma \delta\lambda \\
&= -R^{\alpha\beta\gamma} u_\gamma \delta\lambda
\end{aligned} \tag{4.37}$$

定义：

$$R^{\alpha\beta\gamma} = -\frac{\delta M_{\alpha\beta}}{u_\gamma \delta\lambda} = F_i^\alpha g t_{ij}^\beta (\Delta_j^\gamma + g t_{jk}^\gamma \varphi_k) \tag{4.38}$$

2. 利用 $u, \bar{u}$ 的反对易和前一节的两个等式(4.29)和(4.30)，得到：

$$\begin{aligned}
R^{\alpha\beta\gamma} u_\beta u_\gamma &= \frac{1}{2}(R^{\alpha\beta\gamma} - R^{\alpha\gamma\beta}) u_\beta u_\gamma \\
&= \frac{1}{2} F_i^\alpha g[(t_{ij}^\beta \Delta_j^\gamma - t_{ij}^\gamma \Delta_j^\beta) + g(t_{ij}^\beta t_{jk}^\gamma - t_{ij}^\gamma t_{jk}^\beta)\varphi_k] \cdot u_\beta u_\gamma \\
&= \frac{1}{2} F_i^\alpha g(f_{\beta\gamma\delta}\Delta_i^\delta + g f_{\beta\gamma\delta} t_{ik}^\delta \varphi_k) u_\beta u_\gamma \\
&= -\frac{g}{2} f_{\beta\gamma\delta} M_{\alpha\delta} u_\beta u_\gamma
\end{aligned} \tag{4.39}$$

根据两个关系式(4.37)，(4.39)和一个定义(4.38)，(4.33)后两项的变化是：

$$\begin{aligned}
&\delta\left(-\frac{1}{2}\xi(C^\alpha)^2 + \bar{u}_\alpha M_{\alpha\beta} u_\beta\right) \\
&= -\xi C^\alpha \cdot \delta C^\alpha + (\delta\bar{u}_\alpha) M_{\alpha\beta} u_\beta + \bar{u}_\alpha (\delta M_{\alpha\beta}) u_\beta + \bar{u}_\alpha M_{\alpha\beta} (\delta u_\beta) \\
&= -\xi F_i^\alpha \varphi_i (-M_{\alpha\beta}) u_\beta \delta\lambda - \xi F_i^\alpha \varphi_i M_{\alpha\beta} u_\beta \delta\lambda \\
&\quad + \bar{u}_\alpha (-R^{\alpha\beta\lambda})(u_\gamma \delta\lambda) u_\beta - \bar{u}_\alpha M_{\alpha\beta} \frac{g}{2} f_{\beta\gamma\delta} u_\gamma u_\delta \delta\lambda
\end{aligned}$$

$$= -\frac{g}{2}\bar{u}_\alpha f_{\beta\gamma\delta}M_{\alpha\delta}u_\gamma u_\beta\delta\lambda - \frac{g}{2}\bar{u}_\alpha f_{\beta\gamma\delta}M_{\alpha\beta}u_\gamma u_\delta\delta\lambda = 0$$

所以(4.33)后两项在 B. R. S. 变换下也不变。这样就证明了 L_{eff} 具有 B. R. S. 不变性。

再把(4.33)扩充一下,取

$$S[\varphi,u,\bar{u},K,L] = L_{eff}[\varphi,u,\bar{u}] + K_i(\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha\varphi_j)u_\alpha + \frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}L_\alpha u_\beta u_\gamma \tag{4.40}$$

S 是扩充了的作用量;K_i, L_α 是新引入的源函数。K_i 与 $\delta\lambda, u, \bar{u}, \xi, \bar{\xi}$ 反对易;L_α 是普通 c 数。L_{eff} 已知 B. R. S. 不变。

现在证明(4.40)也是 B. R. S. 不变的:

1. $$\delta[(\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha\varphi_j)u_\alpha] = gt_{ij}^\alpha(\delta\varphi_j)u_\alpha + (\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha\varphi_j)\delta u_\alpha$$

$$= -gt_{ij}^\alpha(\Delta_j^\beta + gt_{jk}^\beta\varphi_k)u_\beta u_\alpha\delta\lambda - (\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha\varphi_j)\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma\delta\lambda$$

$$= -\frac{g}{2}(t_{ij}^\alpha\Delta_j^\beta - t_{ij}^\beta\Delta_j^\alpha)u_\beta u_\alpha\delta\lambda$$

$$-\frac{g^2}{2}(t_{ij}^\alpha t_{jk}^\beta - t_{ij}^\beta t_{jk}^\alpha)\varphi_k u_\beta u_\alpha\delta\lambda$$

$$-(\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha\varphi_j)\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma\delta\lambda$$

$$= -\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}(\Delta_i^\gamma + gt_{ik}^\gamma\varphi_k)u_\beta u_\alpha\delta\lambda$$

$$-\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}(\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha\varphi_j)u_\beta u_\gamma\delta\lambda - 0$$

所以(4.40)的第二项是 B. R. S. 不变的。

2. $$\delta[f_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma] = f_{\alpha\beta\gamma}(\delta u_\beta)u_\gamma + f_{\alpha\beta\gamma}u_\beta(\delta u_\gamma)$$

$$= -\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}f_{\beta\lambda\sigma}u_\lambda u_\sigma\delta\lambda u_\gamma - \frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}u_\beta f_{\gamma\lambda\sigma}u_\lambda u_\sigma\delta\lambda$$

$$= \left(\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}f_{\beta\lambda\sigma}u_\gamma u_\lambda u_\sigma - \frac{g}{2}f_{\alpha\gamma\beta}u_\gamma f_{\beta\lambda\sigma}u_\lambda u_\sigma\right)\delta\lambda$$

$$= g f_{\alpha\beta\gamma}f_{\beta\lambda\sigma}u_\gamma u_\lambda u_\sigma\delta\lambda = -g f_{\alpha\gamma\beta}f_{\beta\lambda\sigma}u_\gamma u_\lambda u_\sigma\delta\lambda$$

$$= -g f_{\alpha\lambda\beta}f_{\beta\sigma\gamma}u_\gamma u_\lambda u_\sigma\delta\lambda = -g f_{\alpha\sigma\beta}f_{\beta\gamma\lambda}u_\gamma u_\lambda u_\sigma\delta\lambda$$

$$= -\frac{g}{3}(f_{\alpha\gamma\beta}f_{\beta\lambda\sigma} + f_{\alpha\lambda\beta}f_{\beta\sigma\gamma} + f_{\alpha\sigma\beta}f_{\beta\gamma\lambda})u_\gamma u_\lambda u_\sigma\delta\lambda = 0$$

所以(4.40)的第三项也是 B. R. S. 不变的。

总起来,$S[\varphi,u,\bar{u},K,L]$ 是 B. R. S. 不变的。顺便还看到,B. R. S. 变换(4.34)式又可写成:

$$\begin{aligned} \delta\varphi_i &= \frac{\delta S}{\delta K_i}\delta\lambda \\ \delta u_\alpha &= -\frac{\delta S}{\delta L_\alpha}\delta\lambda \\ \delta\bar{u}_\alpha &= \xi F_i^\alpha\varphi_i\delta\lambda \end{aligned} \tag{4.41}$$

§4-4 Ward-Takahashi 恒等式和 Slavnov-Taylor 恒等式

上一节证明了 S 的 B. R. S. 不变性。现在再证明 $d(\varphi)d(u)d(\overline{u})$ 体积元的 B. R. S. 不变性。我们写出 B. R. S. 变换：

$$\begin{aligned} \varphi_i' &= \varphi_i + (\Delta_i^\alpha + g t_{ij}^\alpha \varphi_j) u_\alpha \delta\lambda, \\ u_\alpha' &= u_\alpha - \frac{g}{2} f_{\alpha\beta\gamma} u_\beta u_\gamma \delta\lambda, \\ \overline{u}_\alpha' &= \overline{u}_\alpha + \xi F_i^\alpha \varphi_i \delta\lambda \end{aligned} \tag{4.42}$$

求雅可毕行列式：

$$\frac{\partial A_\mu^{\alpha\prime}}{\partial A_\mu^\alpha} = 1 \text{（因 } f_{\underline{i}\underline{\alpha}\underline{i}} \text{ 全反对称}, \alpha, \mu \text{ 不求和）}$$

$$\left.\frac{\partial A_\mu^{\alpha\prime}}{\partial A_\mu^\beta}\right|_{\alpha\neq\beta} \sim O(\delta\lambda) \text{（}\mu \text{ 不求和）}$$

$$\frac{\partial u_\alpha'}{\partial u_\alpha} = 1 \text{（因 } f_{\underline{i}\underline{\alpha}\underline{i}} \text{ 全反对称}, \alpha \text{ 不求和）}$$

$$\left.\frac{\partial u_\alpha'}{\partial u_\beta}\right|_{\alpha\neq\beta} \sim O(\delta\lambda)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_\alpha'}{\partial \overline{u}_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$\frac{\partial \psi_\alpha'}{\partial \psi_\alpha} = 1 - igT_{\alpha_\alpha}^i \delta\lambda^i \quad (\alpha \text{ 不求和})$$

非对角 $\sim O(\delta\lambda)$

$$\frac{\partial \overline{\psi}_\alpha'}{\partial \overline{\psi}_\alpha} = 1 + igT_{\alpha_\alpha}^i \delta\lambda^i \quad (\alpha \text{ 不求和})$$

此地 $\delta\lambda^i = u_i \delta\lambda$

若 φ 为复场，则

$$\frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial \varphi_\alpha} = 1 - igL_{\alpha_\alpha}^i \delta\lambda^i \quad (\alpha \text{ 不求和})$$

非对角 $\sim O(\delta\lambda)$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha^{*\prime}}{\partial \varphi_\alpha^*} = 1 + igL_{\alpha_\alpha}^i \delta\lambda^i \quad (\alpha \text{ 不求和})$$

若 φ 为实场，则在实表示中 L^i 是纯虚反对称（见 §A1-2 例）：

$$\frac{\partial \varphi_\alpha'}{\partial \varphi_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

$\therefore d(\varphi)d(u)d(\overline{u})$（$\varphi$ 包括 $A, \psi, \overline{\psi}$，复的 Higgsφ，φ^* 或实的 Higgsφ）的雅可毕行列式为：

$$
\begin{vmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
& 1 & & & & & & O(\delta\lambda) & & \\
& & \ddots & & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & & \\
& & & & 1 & & & & & \\
& & & & & \ddots & & & & \\
& & & & & & 1-igT^i_{1_1}\delta\lambda^i & & & \\
& & & & & & & 1+igT^i_{1_1}\delta\lambda^i & & \\
& & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 1-igL^i_{1_1}\delta\lambda^i & \\
& O(\delta\lambda) & & & & & & & & 1+igL^i_{1_1}\delta\lambda^i \\
& & & & & & & & & & \ddots
\end{vmatrix} = 1 + O((\delta\lambda)^2) \tag{4.43}
$$

现在定义

$$
\begin{aligned}
& W[J,\xi,\bar{\xi},K,L] \\
&= \int \mathrm{d}(\varphi)\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u}) e^{i\{S(\varphi,u,\bar{u},K,L)+J_i\varphi_i+\bar{\xi}_\alpha u_\alpha+\bar{u}_\alpha\xi_\alpha\}}
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

(用的是简化符号,有相同 x 指标的两个简化符号相乘,就意味着对这个 x 积分,所以不再在指数上写积分符号)。积分变量 $\varphi,u,\bar{u}$ 作(4.34)的变换,当然不影响(4.44)的积分值,因为积分是在 $\varphi,u,\bar{u}$ 整个函数空间进行的。又体积元 $\mathrm{d}(\varphi)\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u})$ 是不变的(自(4.43)看到,雅可毕行列式随 $\delta\lambda$ 的变化为 $O((\delta\lambda)^2)$,取微分时可以略去,而且 $S[\varphi,u,\bar{u},K,L\}$ 也是 B. R. S. 不变的,所以

$$
\begin{aligned}
0 &= W[J,\xi,\bar{\xi},K,L]_{\delta\lambda\neq 0} - W[J,\xi,\bar{\xi},K,L]_{\delta\lambda\neq 0} \\
&= i\int \mathrm{d}(\varphi)\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u})\left(J_i\frac{\delta\varphi_i}{\delta\lambda}+\bar{\xi}_\alpha\frac{\delta u_\alpha}{\delta\lambda}-\frac{\delta\bar{u}_\alpha}{\delta\lambda}\bar{\xi}_\alpha\right)\delta\lambda \\
&\quad \cdot e^{i\{S(\varphi,u,\bar{u},K,L)+J_i\varphi_i+\bar{\xi}_\alpha u_\alpha+\bar{u}_\alpha\xi_\alpha\}}
\end{aligned}
$$

利用(4.41),并把 $\delta\lambda$ 移到左方(否则 $\delta\lambda$ 不能约去),得到

$$
\begin{aligned}
0 = i\delta\lambda\int \mathrm{d}(\varphi)\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u})\left(-J_i\frac{\delta S}{\delta K_i}+\bar{\xi}_\alpha\frac{\delta S}{\delta L_\alpha}+\xi_\alpha(\underset{\sim}{\xi}F^\alpha_i)\varphi_i\right) \\
\cdot e^{i\{S(\varphi,u,\bar{u},K,L)+J_i\varphi_i+\bar{\xi}_\alpha u_\alpha+\bar{u}_\alpha\xi_\alpha\}}
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

约去 $\delta\lambda$,再考虑到(4.44)的定义,又得到

$$
0 = \left(-J_i\frac{\delta}{\delta K_i}+\bar{\xi}_\alpha\frac{\delta}{\delta L_\alpha}+\xi_\alpha(\underset{\sim}{\xi}F^\alpha_i)\frac{\delta}{\delta J_i}\right)W[J,\xi,\bar{\xi},K,L] \tag{4.46}
$$

(注意与 F^α_i 乘在一起的 $\underset{\sim}{\xi}$ 来自规范确定项,与 $\xi_\alpha,\bar{\xi}_\alpha$,也即与 $W[J,\xi,\bar{\xi},K,L]$ 中的 $\xi,\bar{\xi}$ 无关)。

考虑到(4.40)的 S 的内容,(4.45)又可写成(去掉 $i\delta\lambda$):

$$
\begin{aligned}
&\left(-J_i\left(\Delta^\alpha_i+gt^\alpha_{ij}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_j}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}_\alpha}+\bar{\xi}_\alpha\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}\frac{1}{i}\frac{1}{i}\frac{\delta^2}{\delta\bar{\xi}_\beta\delta\bar{\xi}_\gamma}\right. \\
&\left.+\xi_\alpha(\underset{\sim}{\xi}F^\alpha_i)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_i}\right)W[J,\xi,\bar{\xi}]=0
\end{aligned} \tag{4.47}
$$

此处 $$W[J,\xi,\bar{\xi}] = W[J,\xi,\bar{\xi},K,L]_{K=L=0}$$

再作 $\dfrac{\delta}{\delta\xi_\beta}$ 微分,并令 $\xi_\alpha=0,\bar{\xi}_\alpha=0$,得到

$$\left(-J_i\left(\Delta_i^\alpha + g t_{ij}^\alpha \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_j}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta^2}{\delta\xi_\beta \delta\bar{\xi}_\alpha}\right.$$
$$\left.+(\underset{\sim}{\xi} F_i^\beta)\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_i}\right)W[J,\xi,\bar{\xi}]_{\xi_\alpha=\bar{\xi}_\alpha=0}=0 \quad (4.48)$$

(4.47)、(4.48)这种关于 W 的泛函微分式,称为 Ward-Takahashi 恒等式。我们将在下一节讨论 Ward-Takahashi 恒等式的一个应用。

用类似的方法我们还可以导出另一个关于 W 的泛函微分方程。在(4.44)的 $W[J,\xi,\bar{\xi},K,L]$ 中,对积分变量 $\bar{u}_\alpha$ 作平移变换:

$$\bar{u}_\alpha \to \bar{u}_\alpha + \delta\bar{u}_\alpha$$

则积分体积元 $d(\varphi)d(u)d(\bar{u})$ 当然保持不变。同时,由于积分变量的变换不影响积分值(因为是在 $\varphi,u,\bar{u}$ 整个函数空间进行积分),所以

$$0 = W[J,\xi,\bar{\xi},K,L]_{\delta\bar{u}\neq 0} - W[J,\xi,\bar{\xi},K,L]_{\delta\bar{u}=0}$$
$$= i\int \delta\bar{u}_\alpha d(\varphi)d(u)d(\bar{u})[\xi_\alpha - F_i^\alpha(\Delta_i^\beta + g t_{ij}^\beta \varphi_j)u_\beta]$$
$$\cdot e^{i\{S[\varphi,u,\bar{u},K,L]+J_i\varphi_i+\bar{\xi}_\alpha u_\alpha+\bar{u}_\alpha\xi_\alpha\}}$$

[ ]中第二项来自(4.33)的 L_{eff}中的 $\bar{u}_\alpha M_{\alpha\beta}u_\beta$,以及(4.36)中的 $M_{\alpha\beta}$的定义。$\delta\bar{u}_\alpha$ 是任意的,所以自上式得到:

$$0 = \left(-F_i^\alpha \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta K_i} + \xi_\alpha\right)W[J,\xi,\bar{\xi},K,L] \quad (4.49)$$

这就是关于 W 的与(4.46)并列的第二个泛函微分方程。

Slavnov 恒等式

现在要用 $1PI$ 顶角生成泛函 Γ 来把(4.46)和(4.49)表达出来。这样我们就得到 Slavnov 恒等式。Slavnov 恒等式在关于重正化的证明中将起重要作用(见第八章)。

仿照(2.126)和(2.126)′,我们定义连接图的生成泛函 $Z[J,\xi,\bar{\xi},K,L]$ 如下:

$$Z[J,\xi,\bar{\xi},K,L] = -i\ln W[J,\xi,\bar{\xi},K,L] \quad (4.50)$$

在这里,无非是把(2.126)和(2.126)′的一种 J,扩充成为多种 J(具体说就是 $J,\xi,\bar{\xi},K,L$),相当于在(2.127)式后面讨论的有多种场的情况(不同的场有不同的 J)。所以,关于 $Z[J,\xi,\bar{\xi},K,L]$ 是连接图生成泛函的证明并不出现新的困难。有自发破缺时也同样不会出现新的困难。

然后,我们再仿照(2.143),定义 $1PI$ 顶角函数生成泛函 $\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]$ 如下:

$$\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L] = Z[J,\xi,\bar{\xi},K,L] - J_i\varphi_i - \bar{\xi}_\alpha u_\alpha - \bar{u}_\alpha\xi_\alpha \quad (4.51)$$

(这里用了简化符号,所以 $J_i\varphi_i,\bar{\xi}_\alpha u_\alpha,\bar{u}_\alpha\xi_\alpha$ 都意味着已作了 d_x^4 积分)。当然这个定义也是不完全的,必须再定义 $\varphi_i,u_\alpha,\bar{u}_\alpha$ 如下:

$$\frac{\delta Z}{\delta J_i} = \varphi_i,\ \frac{\delta Z}{\delta\xi_\alpha} = -\bar{u}_\alpha,\ \frac{\delta Z}{\delta\bar{\xi}_\alpha} = u_\alpha \quad (4.52)$$

这个情况和(2.143),(2.144),(2.145)类似,所以有

$$\varphi_i(x)\Big|_{J=\xi=\bar{\xi}=0} = v_i \qquad \bar{u}_\alpha\Big|_{J=\xi=\bar{\xi}=0} = 0 \qquad u_\alpha\Big|_{J=\xi=\bar{\xi}=0} = 0 \quad (4.53)$$

有了(4.52)的定义，$\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]$作为 φ,u,u 以及 K,L 的泛函的含义就清楚了。即在(4.51)的右方利用(4.52)把 $J_i,\xi_\alpha,\bar{\xi}_\alpha$ 消去，从而使右方成为 $\varphi,u,\bar{u},K,L$ 的泛函。

根据(4.51)和(4.52)还得到

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}=-J_i,\frac{\delta\Gamma}{\delta u_\alpha}=\bar{\xi}_\alpha,\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_\alpha}=-\xi_\alpha \tag{4.54}$$

证明：

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}=\frac{\delta Z}{\delta J_k}\frac{\delta J_k}{\delta\varphi_i}-J_i-\frac{\delta J_k}{\delta\varphi_i}\varphi_k$$

$$=\varphi_k\frac{\delta J_k}{\delta\varphi_i}-J_i-\varphi_k\frac{\delta J_k}{\delta\varphi_i}=-J_i$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta u_\alpha}=\frac{\delta\bar{\xi}_\beta}{\delta u_\alpha}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\xi}_\beta}+\bar{\xi}_\alpha-\frac{\delta\bar{\xi}_\beta}{\delta u_\alpha}u_\beta$$

$$=\frac{\delta\bar{\xi}_\beta}{\delta u_\alpha}u_\beta+\bar{\xi}_\alpha-\frac{\delta\bar{\xi}_\beta}{\delta u_\alpha}u_\beta=\bar{\xi}_\alpha$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_\alpha}=\frac{\delta\xi_\beta}{\delta\bar{u}_\alpha}\frac{\delta Z}{\delta\xi_\beta}-\xi_\alpha+\frac{\delta\xi_\beta}{\delta\bar{u}_\alpha}\bar{u}_\beta$$

$$=-\frac{\delta\xi_\beta}{\delta\bar{u}_\alpha}\bar{u}_\beta-\xi_\alpha+\frac{\delta\xi_\beta}{\delta\bar{u}_\alpha}\bar{u}_\beta=-\xi_\alpha$$

注意两点：

1. $\xi_\alpha,\bar{u}_\alpha$ 都是反对易数，所以$\frac{\delta\xi_\beta}{\delta\bar{u}_\alpha}$与$\frac{\delta Z}{\delta\xi_\beta}$是可对易的：

$$\frac{\delta\xi_\beta}{\delta\bar{u}_\alpha}\frac{\delta Z}{\delta\xi_\beta}=\frac{\delta Z}{\delta\xi_\beta}\frac{\delta\xi_\beta}{\delta\bar{u}_\alpha}$$

2. 在$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}$中其实还有$\frac{\delta\bar{\xi}_\alpha}{\delta\varphi_i}\frac{\delta Z}{\delta\bar{\xi}_\alpha}-\frac{\delta\bar{\xi}_\alpha}{\delta\varphi_i}u_\alpha=0,\frac{\delta\xi_\alpha}{\delta\varphi_i}\frac{\delta Z}{\delta\xi_\alpha}-\bar{u}_\alpha\frac{\delta\xi_\alpha}{\delta\varphi_i}=0$。这里利用了(4.52)和反对易关系。特别是(4.52)的$\frac{\delta}{\delta\xi_\alpha},\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}_\alpha}$都是定义为从左边作用上去的，所以微商都写成如上的次序，而不是$\frac{\delta Z}{\delta\bar{\xi}_\alpha}\frac{\delta\bar{\xi}_\alpha}{\delta\varphi_i}$和$\frac{\delta Z}{\delta\xi_\alpha}\frac{\delta\xi_\alpha}{\delta\varphi_i}$。

3. 在$\frac{\delta\Gamma}{\delta u_\alpha}$和$\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_\alpha}$中有类似情况，并注意$\frac{\delta\xi_\beta}{\delta u_\alpha}\frac{\delta Z}{\delta\xi_\beta}=\frac{\delta\xi_\beta}{\delta u_\alpha}(-\bar{u}_\alpha)=-\bar{u}_\alpha\frac{\delta\xi_\beta}{\delta u_\alpha}$，也是可对易的。等等。　　证毕。

关于$\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]$是 $1PI$ 顶角生成泛函的证明见§8-4，§8-5，§8-6。这里暂且不讲。

现在我们就可以把(4.54)代入(4.46)和(4.49)，并除以 $W[J,\xi,\bar{\xi},K,L]$，利用(4.50)的定义，立刻得到

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i}+\frac{\delta\Gamma}{\delta u_\alpha}\frac{\delta\Gamma}{\delta L_\alpha}-\underset{\sim}{\xi}C^\alpha[\varphi]\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_\alpha}=0 \tag{4.55}$$

$$-F_i^\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta K_i} - \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{u}_\alpha} = 0 \tag{4.56}$$

还可以简化一下，定义：

$$\tilde{\Gamma}[\varphi,u,\bar{u},K,L] = \Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L] + \frac{\xi}{2}(C^a[\varphi])^2 \tag{4.57}$$

则

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta u_\alpha} = \frac{\delta\Gamma}{\delta u_\alpha}, \qquad \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta L_\alpha} = \frac{\delta\Gamma}{\delta L_\alpha}, \qquad \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta \bar{u}_\alpha} = \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{u}_\alpha},$$

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\varphi_i} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + \xi C^a[\varphi]F_i^\alpha \qquad \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_i} = \frac{\delta\Gamma}{\delta K_i}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_i} &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i} + \xi C^a[\varphi]F_i^\alpha\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i}\\ &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i} - \xi C^a[\varphi]\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_\alpha}\end{aligned}$$

所以(4.55)，(4.56)写成

$$\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_i} + \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta L_\alpha} = 0 \tag{4.58}$$

$$-F_i^\alpha\frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta K_i} - \frac{\delta\tilde{\Gamma}}{\delta\bar{u}_\alpha} = 0 \tag{4.59}$$

(4.58)又常常简写成

$$\tilde{\Gamma} * \tilde{\Gamma} = 0 \tag{4.60}$$

所有这些关于 Γ 或 $\tilde{\Gamma}$ 的泛函微分形式的式子，都叫做 Slavnov 恒等式。第八章要用到它们。

顺便说一下，$S[\varphi,u,\bar{u},K,L]$也满足 Slavnov 恒等式：

根据 $S[\varphi,u,\bar{u},K,L]$的 B. R. S. 不变性，应有

$$\delta\varphi_i\frac{\delta S}{\delta\varphi_i} + \delta u_\alpha\frac{\delta S}{\delta u_\alpha} + \delta\bar{u}_\alpha\frac{\delta S}{\delta\bar{u}_\alpha} = 0$$

把(4.34)代入，得到

$$(\Delta_i + gt_{ij}^\alpha\varphi_j)u_\alpha\delta\lambda\frac{\delta S}{\delta\varphi_i} - \frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma\delta\lambda\frac{\delta S}{\delta u_\alpha} + \xi F_i^\alpha\varphi_i\delta\lambda\frac{\delta S}{\delta\bar{u}_\alpha} = 0$$

由于 $\delta\lambda$ 的反对易性：

$$-\delta\lambda(\Delta_i + gt_{ij}^\alpha\varphi_j)u_\alpha\frac{\delta S}{\delta\varphi_i} - \delta\lambda\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma\frac{\delta S}{\delta u_\alpha} + \delta\lambda\xi F_i^\alpha\varphi_i\frac{\delta S}{\delta\bar{u}_\alpha} = 0$$

再根据(4.40)，有

$$-\frac{\delta S}{\delta K_i}\frac{\delta S}{\delta\varphi_i} - \frac{\delta S}{\delta L_\alpha}\frac{\delta S}{\delta u_\alpha} + \xi F_i^\alpha\varphi_i\frac{\delta S}{\delta\bar{u}_\alpha} = 0 \tag{4.61}$$

还有(自(4.40),(4.33),(4.36)):

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{u}_\alpha} = -F_i^\alpha(\Delta^\beta + g t_{ij}^\beta \varphi_j) u_\beta = -F_i \frac{\delta S}{\delta K_i}$$

所以:

$$-F_i \frac{\delta S}{\delta K_i} - \frac{\delta S}{\delta \bar{u}_\alpha} = 0 \tag{4.62}$$

(4.61)与(4.62)很相像于(4.55),(4.56)。仿照(4.57),定义:

$$\tilde{S}[\varphi,u,\bar{u},K,L] = S[\varphi,u,\bar{u},K,L] + \frac{\xi}{2}(C^a[\varphi])^2 \tag{4.63}$$

则和$\tilde{\Gamma}$的情况一样,可导出:

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta \varphi_i}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_i} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta L_\alpha} = 0 \tag{4.64}$$

$$-F_i^\alpha \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_i} - \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \bar{u}_\alpha} = 0 \tag{4.65}$$

(4.64)又可简写成

$$\tilde{S} * \tilde{S} = 0 \tag{4.66}$$

在第八章将证明,S是Γ的最低次近似,所以得到$\tilde{S}$和$\tilde{\Gamma}$满足相同的Slavnov恒等式是很自然的。在第八章中,我们把(4.58)和(4.64)中的K_i,φ_i对换,也把L_α,u_α对换。我们注意到K_i,φ_i可对易,L_α,u_α也可对易。

F-P荷

为了在第八章中讨论重正化问题时的方便,我们规定F-P荷如下:

u——F-P荷+1,　K——F-P荷-1

$\bar{u}$——F-P荷-1,　L——F-P荷-2

于是整个$S[\varphi,u,\bar{u},K,L]$是F-P荷中性的,从而保证微扰论结果是F-P荷守恒的。

§4-5　W-T恒等式的一个应用——$\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}$与$\gamma_{\rho\sigma}^{abc}$之间的关系

在这一节里,为了便于进行微扰论的讨论,我们将写出详细指标。W-T恒等式中则写出全部指标。

我们采用费曼规范。$a,b,c,\cdots$是群指标;$\mu,\nu,\cdots$是时空指标。

先把B.R.S.变换的全部指标写出来,于是B.R.S.变换写成:

$$\delta A_\mu^a(x) = (-\partial_\mu \delta^4(x-y)\delta_{ab} + g f_{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(y-z)A_\mu^c(z))u_b(y)\delta\lambda$$

$$\delta u_a(x) = -\frac{g}{2} f_{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)u_b(y)u_c(z)\delta\lambda$$

$$\delta \bar{u}_a(x) = \partial_\mu \delta^4(x-y)A_\mu^a(y)\delta\lambda \tag{4.67}$$

这里重复出现的y,z意味着积分求和。因为取的是费曼规范,所以

$$C^a(x) = \partial_\mu \delta^4(x-y)\delta_{ab}\delta_{\mu\nu}A_\nu^b(y) = \partial_\mu A_\mu^a(x)$$

$$F_i^a = \partial_\mu \delta^4(x-y)\delta_{ab}\delta_{\mu\nu}\text{①}(\text{取}\ \xi = 1) \tag{4.68}$$

所以,前一节的

$$\int d(\varphi)d(u)d(\bar{u})\left(-J_i\frac{\delta S}{\delta K_i} + \bar{\xi}_a\frac{\delta S}{\delta L_a} + F_i^a\varphi_i\xi_a\right) \cdot e^{i|S[A,u,\bar{u},K,L]+J_i\varphi_i+\bar{\xi}_a u_a+\bar{u}_a\xi_a|} = 0 \tag{4.69}$$

现在具体写成$\left(\text{取}\frac{\delta}{\delta K_i},\frac{\delta}{\delta L_a}\text{导数后,令}\ K_i=0,L_a=0\right)$:

$$\int d(\varphi)d(u)d(\bar{u}) \cdot \Big\{-J_\mu^a(x)(-\partial_\mu\delta^4(x-y)\delta_{ab}$$
$$+ g f_{abc}\delta^4(x-y)\delta^4((y-z)A_\mu^c(z))u_b(y)$$
$$+ \bar{\xi}_a(x)\left(-\frac{g}{2}f_{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(y-z)u_b(y)u_c(z)\right)$$
$$+ (\partial_\mu\delta^4(x-y))A_\mu^a(y)\xi_a(x)\Big\} \cdot e^{i|S[A,u,\bar{u}]+J_i\varphi_i+\bar{\xi}_a u_a+\bar{u}_a\xi_a|} = 0 \tag{4.70}$$

它就是(4.47)式。对它求$\frac{\delta}{\delta\xi_a(w)}$泛函导数,然后令$\xi_a=\bar{\xi}_a=0$,得到:

$$\int d(\varphi)d(u)d(\bar{u}) \cdot \{-iJ_\mu^a(x)(-\partial_\mu\delta^4(x-y)\delta_{ab}$$
$$+ g f_{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(y-z)A_\mu^c(z))u_b(y)\bar{u}_d(w)$$
$$+ (\partial_\mu\delta^4(x-y))A_\mu^d(y)\delta^4(x-w)\}$$
$$\cdot e^{i|S[A,u,\bar{u}]+J_i\varphi_i|} = 0 \tag{4.71}$$

它就是(4.48)式。再对它求$\frac{\delta}{\delta J_a^e(u)}$泛函导数②,得到:

$$\int d(\varphi)d(u)d(\bar{u}) \cdot \{-i[-\partial_\alpha\delta^4(u-y)\delta_{ea}$$
$$+ g f_{ebc}\delta^4(u-y)\delta^4(y-z)A_\alpha^c(z)]u_b(y)\bar{u}_d(w)$$
$$+ J_\mu^a(x)[-\partial_\mu\delta^4(x-y)\delta_{ab} + g f_{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(y-z)$$
$$\cdot A_\mu^c(z)]A_\alpha^e(u)u_b(y)\bar{u}_d(w) + \partial_\nu\delta^4(w-y)A_\nu^d(y)iA_\alpha^e(u)\}$$
$$\cdot e^{i|S[A,u,\bar{u}]+J_i\varphi_i|} = 0 \tag{4.72}$$

再对(4.72)求一次$\frac{\delta}{\delta J_\beta^f(v)}$泛函导数,把重复出现的$y$、$z$积分,然后取$J=0$,得到

$$\int d(A)d(u)d(\bar{u}) \cdot \{i\delta_{eb} \cdot iA_\beta^f(v)(\partial_\alpha u_b(u))\bar{u}_d(w)$$
$$- ig f_{ebc}A_\alpha^c(v)iA_\beta^f(u)u_b(u)\bar{u}_d(w)$$
$$- \delta_{fb}(\partial_\beta u_b(v))\bar{u}_d(w)A_\alpha^e(u)$$

---

① a 代表 μ,x,a;i 代表 ν,y,b,$F_i^a A_i = (\partial_\mu\delta^4(x-y))\delta_{ab}\delta_{\mu\nu}A_\nu^b(y) = \partial_\mu A_\mu^a(x)$。

② 注意 $J_a^e(u)$ 中的 u 与 F-P 场的 u 不是一回事。

$$+g f_{\beta bc}A_{\beta}^{c}(v)A_{\alpha}^{e}(u)u_{b}(v)\bar{u}_{d}(w)$$

$$+(\partial_{\nu}A_{\nu}^{d}(w))iA_{\alpha}^{e}(u)iA_{\beta}^{f}(v)\}\cdot e^{iS[A,u,\bar{u}]}=0$$

整理一下,指标替换如下:

$$\nu\to\mu,\quad w\to x,\quad d\to a$$

$$\alpha\to\nu,\quad u\to y, e\to b.\quad b\to i$$

$$\beta\to\lambda,\quad v\to z,\quad f\to c.\quad c\to k$$

$$\int d(A)d(u)d(\bar{u})\cdot\{-A_{\lambda}^{c}(z)(\partial_{\nu}u_{b}(y))\bar{u}_{a}(x)$$

$$+g f_{bik}A_{\nu}^{k}(y)A_{\lambda}^{c}(z)u_{i}(y)\bar{u}_{a}(x)-A_{\nu}^{b}(y)(\partial_{\lambda}u_{c}(z))\bar{u}_{a}(x)$$

$$+g f_{cik}A_{\lambda}^{k}(z)A_{\nu}^{b}(y)u_{i}(z)\bar{u}_{a}(x)$$

$$-(\partial_{\mu}A_{\mu}^{a}(x))A_{\nu}^{b}(y)A_{\lambda}^{c}(z)\}e^{iS[A,u,\bar{u}]}=0 \tag{4.73}$$

再用 $W[J=0]=\int d(A)d(u)d(\bar{u})e^{iS[A,u,\bar{u}]}$ 来除(4.73),取 $\frac{\partial}{\partial y_{\nu}}$ 导数,对 ν 求和,则根据(2.118)有:

$$\frac{\partial}{\partial y_{\nu}}<0\left|-\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}T(A_{\mu}^{a}(x)A_{\nu}^{b}(y)A_{\lambda}^{c}(z))\right.$$

$$-T\left(A_{\lambda}^{c}(z)\frac{\partial u_{b}(y)}{\partial y_{\nu}}\bar{u}_{a}(x)\right)$$

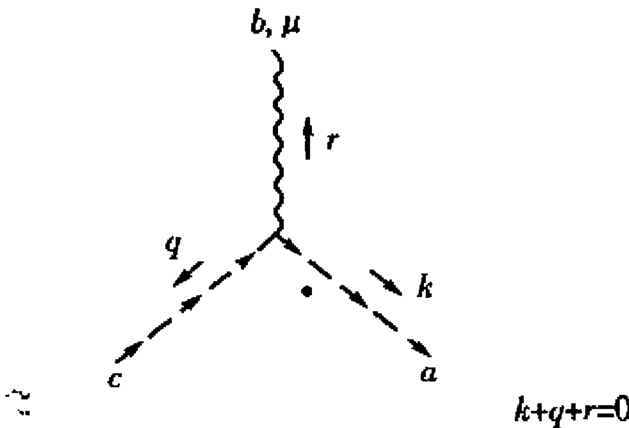
$$+g f_{bik}T(A_{\nu}^{k}(y)A_{\lambda}^{c}(z)u_{i}(y)\bar{u}_{a}(x))$$

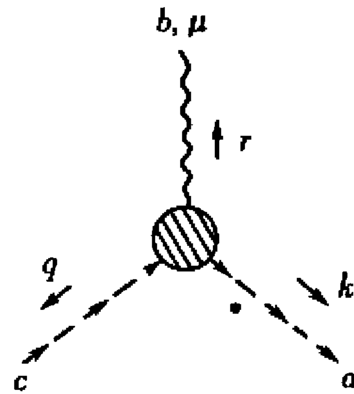
$$-T\left(A_{\nu}^{b}(y)\frac{\partial u_{c}(z)}{\partial z_{\lambda}}\bar{u}_{a}(x)\right)$$

$$+g f_{cik}T(A_{\lambda}^{k}(z)A_{\nu}^{b}(y)u_{i}(z)\bar{u}_{a}(x))\,|0>_{去起伏}=0 \tag{4.74}$$

现在我们就把这些项的低次图的贡献求出来,但顶角取微扰修正过的顶角,如图:

$\underline{\gamma_{\lambda\mu}^{acb}:}$ 无微扰修正 有微扰修正





$k+q+r=0$

图 4.1a 图 4.1b

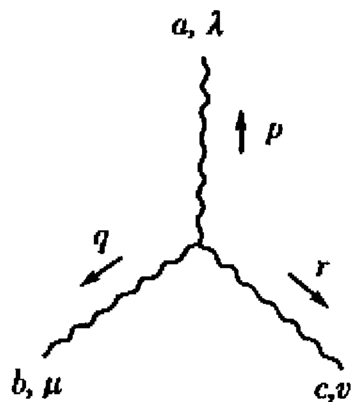
自(4.7) $-g f_{abc}k_{\mu}=g f_{acb}k_{\mu}$

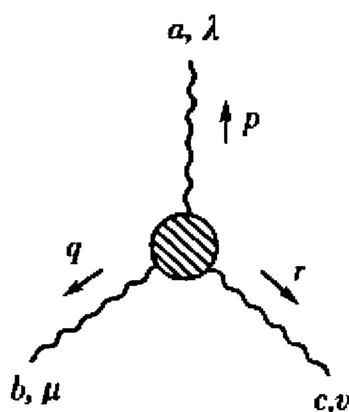
最低次:$i\gamma_{\lambda\mu}^{acb}=g f_{acb}\delta_{\lambda\mu}$

$i\gamma_{\mu}^{acb}(k,q;r)$

$=ik_{\lambda}\gamma_{\lambda\mu}^{acb}(k,q;r)$

$\underline{\Gamma^{abc}_{\lambda\mu\nu}:}$ 无微扰修正 有微扰修正





p+q+r=0

图 4.2a 图 4.2b

自(4.5)

$$g f_{abc}[(p-g)_\nu \delta_{\lambda\mu} + (q-r)_\lambda \delta_{\mu\nu} + (r-p)_\mu \delta_{\nu\lambda}] \qquad i\Gamma^{abc}_{\lambda\mu\nu}(p,q,r)$$

(4.74)各项的贡献是(动量表象):

第一项:在$\frac{\partial}{\partial y_\nu}$作用之前,

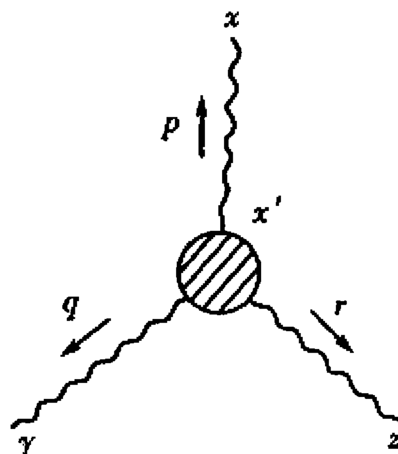


图 4.3

$$-(ip_\mu)(-i)\delta_{aa'}\frac{\left(\delta_{\mu\mu'}-\frac{p_\mu p_{\mu'}}{p^2}\right)+\frac{p_\mu p_{\mu'}}{p^2}}{p^2}$$

$$\cdot(-i)\delta_{bb'}\frac{\left(\delta_{\nu\nu'}-\frac{q_\nu q_{\nu'}}{q^2}\right)+\frac{q_\nu q_{\nu'}}{q^2}}{q^2}$$

$$\cdot(-i)\delta_{cc'}\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)+\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{\gamma^2}}{r^2} i\Gamma^{a'b'c'}_{\mu'\nu'\lambda'}(p,q,r)$$

$$=\frac{p_\mu}{p^2}\cdot\frac{\left(\delta_{\nu\nu'}-\frac{q_\nu q_{\nu'}}{q^2}\right)-\frac{q_\nu q_{\nu'}}{q^2}}{q^2}$$

$$\cdot\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)+\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}}{r^2}\cdot i\Gamma^{abc}_{\mu\nu'\lambda'}(p,q,r)$$

再求$\frac{\partial}{\partial y_\nu}$微商,出现因子 iq_ν(注意 q 进入 y,p 进入 x):

$$\rightarrow -\frac{p_\mu}{p^2}\cdot\frac{q_\nu}{q^2}\cdot\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)+\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}}{r^2}\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}{}'(p,q,r) \tag{4.75}$$

由于 *Lorentz* 不变性,*Bose* 对称性(例如 $a\mu p$ 与 $b\nu q$ 对换不变),以及$\overline{A^aA^b}$传播子中有 δ^{ab}和第十章的(10.84),下图

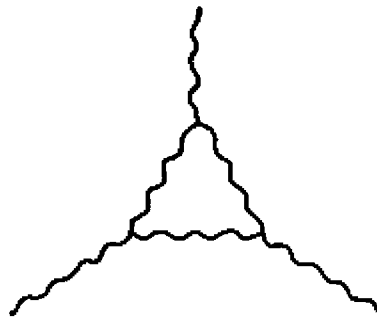


图 4.4

以及更高次图都保留f_{abc}因子，而且，当$p,q,r\to 0$时：

$$\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda'}(p,q,r)\sim f_{abc}[(p-q)_{\lambda'}\delta_{\mu\nu}+(q-r)_{\mu}\delta_{\nu\lambda'}+(r-p)_{\nu}\delta_{\lambda'\mu}]$$
$$+O(p,q,r\text{ 二次})$$

$$\therefore\quad p_\mu q_\nu r_{\lambda'}\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda'}(p,q,r)\sim O(p,q,r\text{ 五次})$$

于是，p,q,r很小时，(4.75)是：

$$-\frac{p_\mu}{p^2}\cdot\frac{q_\nu}{q^2}\cdot\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)}{r^2}\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda'}(p,q,r)+\text{可略去的微小项}\qquad(4.75)'$$

$\dfrac{\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}}{r^2}$叫做传播子的横向部分，$\dfrac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^4}$叫做传播子的纵向部分。当$p,q,r\to 0$时，纵向部分在(4.75)'中的贡献可忽略。

第二项：在$\dfrac{\partial}{\partial y_\nu}$作用之前，

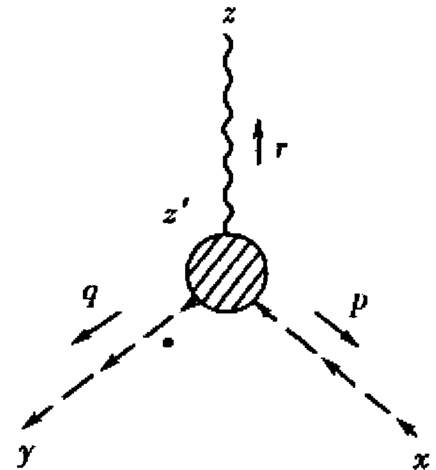


图 4.5

$$-(-i)\delta_{cc'}\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)+\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}}{r^2}$$
$$\cdot(-i)\frac{\delta_{bb'}}{q^2}(iq_\nu)\cdot(-i)\frac{\delta_{aa'}}{p^2}i\gamma^{b'a'c'}_{\lambda'}(q,p;r)$$
$$=\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda \gamma_{\lambda'}}{r^2}\right)+\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}}{r^2}\cdot\frac{q_\nu}{q^2}\cdot\frac{1}{p^2}i\gamma^{bac}_{\lambda'}(q,p;r)$$

再求$\dfrac{\partial}{\partial y_\nu}$微商，出现因子$iq_\nu$：

$$\to-\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)+\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}}{r^2}\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\gamma^{bac}_{\lambda'}(q,p;r)\qquad(4.76)$$

为了初步看一看高次图的抵消，我们现在着重考察一下y线，取最低次自能的链式和：

一圈图贡献的因子：

$$f_{bik}q_\sigma\left\{g\int(-i)\frac{\left[\left(\delta_{\sigma\tau}-\frac{k_\sigma k_\tau}{k^2}\right)+\frac{k_\sigma k_\tau}{k^2}\right]}{k^2}\cdot\frac{-i}{(q-k)^2}\cdot g(q-k)_\tau d^4k\right\}f_{ib'k}\frac{-i}{q^2}$$

$$= f_{bik} f_{ib'k} \cdot q_\sigma \{ g^2 q_\sigma i \prod^0 \} \frac{-i}{q^2} = -\delta_{bb'} C_2(G) g^2 \prod^0 \tag{4.77}$$

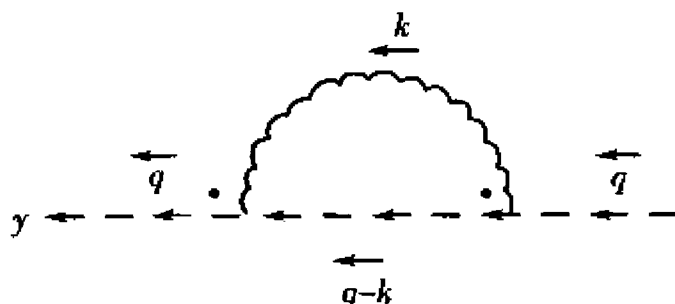


图 4.6

二圈图贡献的因子显然是：

$$(-\delta_{bb'}) C_2(G) g^2 \prod^0 (-\delta_{b'b''}) C_2(G) g^2 \prod^0 \tag{4.78}$$

把这些链的贡献与(4.76)加在一起，就得到

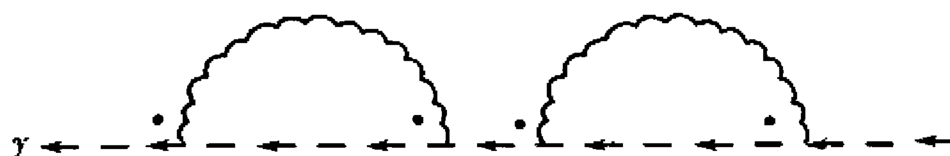


图 4.7

$$-\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'} - \frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right) + \frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}}{r^2} \cdot \frac{1}{p^2}(1 + (-C_2(G) g^2 \prod^0) + (-C_2(G) g^2 \prod^0)^2 + \cdots) \cdot \gamma_{\lambda'}^{bac}(q, p; r) \tag{4.79}$$

说明两点：

1. 由 Lorentz 协变性的考虑，$\{积分\} = g^2 q_\sigma i \prod^0$，$i\prod^0$ 是标量。

2. $f_{aif} f_{bik} = \delta_{ab} C_2(G)$。（第十章(10.73)），将以此作为 $C_2(G)$ 的定义。$C_2(G)$ 是一个与规范群 G 有关的常数。

第三项：在$\frac{\partial}{\partial y_\nu}$作用之前，

$$g f_{bik}(-i)\delta_{kc} \frac{\left(\delta_{\lambda\nu} - \frac{r_\lambda r_\nu}{r^2}\right) + \frac{r_\lambda r_\nu}{r^2}}{r^2} \cdot (-i) \frac{\delta_{ia}}{p^2}$$

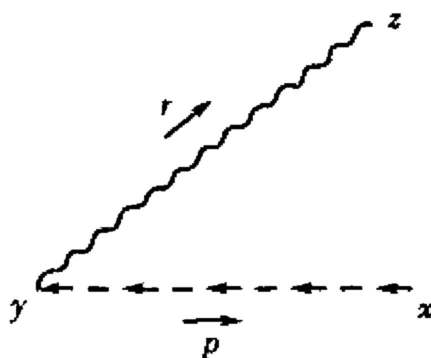


图 4.8

再对$\frac{\partial}{\partial y_\nu}$求一次微商，出现因子 $-ir_\nu - ip_\nu = iq_\nu$（$r$ 和 p 都是离开 y 点）：

$$\to -ig\, f_{bac} q_\nu \frac{\left(\delta_{\lambda\nu} - \frac{r_\lambda r_\nu}{r^2}\right) + \frac{r_\lambda r_\nu}{r^2}}{r^2} \cdot \frac{1}{p^2}$$

但是在没有微扰修正时，$\gamma_\nu^{bac}(q,p;r) = -ig\, f_{bac} q_\nu$，所以在有修正时，如图 4.9，

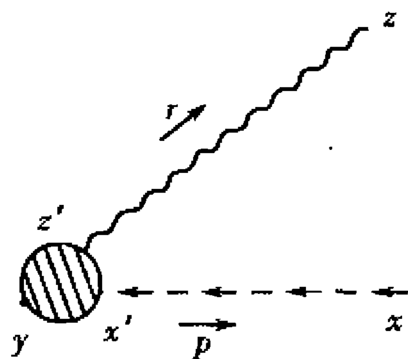


图 4.9

上式应改成(ν 换成 λ')：

$$\to \frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'} - \frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right) + \frac{r_\lambda r_\lambda{}'}{r^2}}{r^2} \cdot \frac{1}{p^2} r_{\lambda'}^{bac}(q,p;r) \tag{4.80}$$

与第二项的贡献(4.76)式正好反号。

为了与(4.79)对比，也把与 y 有关的链式和求出来。

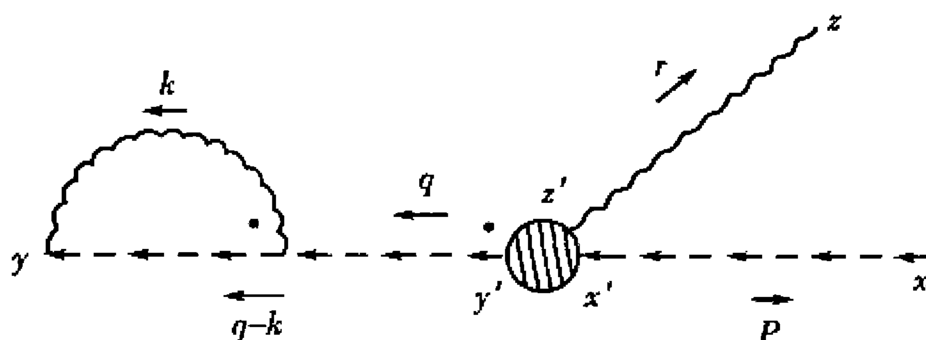


图 4.10

一圈图贡献的因子与(4.77)相同。

二圈图贡献的因子与(4.78)相同。

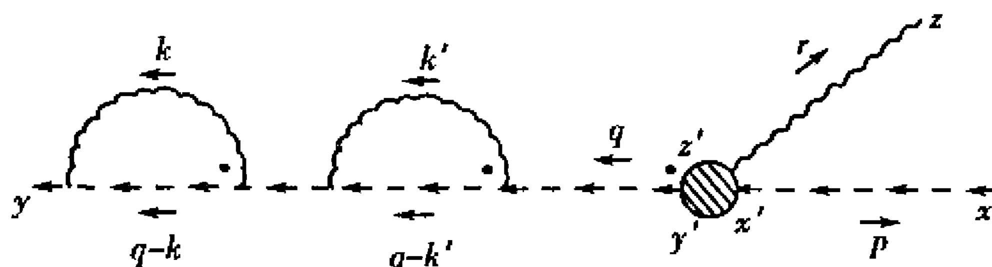


图 4.11

所以把这些链的贡献与(4.80)加在一起，得到

$$\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'} - \frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right) + \frac{r_\lambda r_\lambda{}'}{r^2}}{r^2} \cdot \frac{1}{p^2}(1 + (-C_2(G) g^2 \Pi^0)$$

$$+ (-C_2(G) g^2 \Pi^0)^2 + \cdots) \cdot \gamma_{\lambda'}^{bac}(q,p;r) \tag{4.81}$$

(4.81)与(4.79)正好抵消。也就是说，第二项与第三项的贡献正好抵消，在考虑了微扰

修正后，也正好抵消（一般情况下，Π^0 应换成 Π^*，Π^* 是所有的不可约的 Π 之和）。

第四项：在 $\frac{\partial}{\partial y_\nu}$ 作用之前，

$$-(-i)\delta_{bb'}\frac{\left(\delta_{\nu\nu'}-\frac{q_\nu q_{\nu'}}{q^2}\right)+\frac{q_\nu q_{\nu'}}{q^2}}{q^2}\cdot(-i)\frac{\delta_{cc'}}{r^2}(ir_\lambda)$$

$$\cdot(-i)\frac{\delta_{aa'}}{p^2}\cdot i\gamma_{\nu'}^{c'a'b'}(r,p;q)$$

$$=\frac{\left(\delta_{\nu\nu'}-\frac{q_\nu q_{\nu'}}{q^2}\right)+\frac{q_\nu q_{\nu'}}{q^2}}{q^2}\cdot\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\cdot\frac{1}{p^2}\cdot i\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q)$$

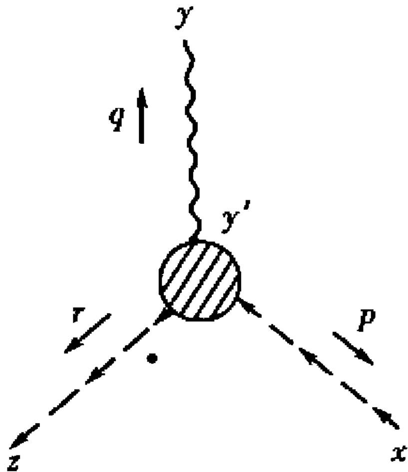


图 4.12

再求 $\frac{\partial}{\partial y_\nu}$ 微商，出现因子 iq_ν：

$$\rightarrow-\frac{q_\nu{}'}{q^2}\cdot\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q)\tag{4.82}$$

在 z 线上加链式和，得到一圈图、二圈图的贡献和第二项的情况相仿，也是乘上

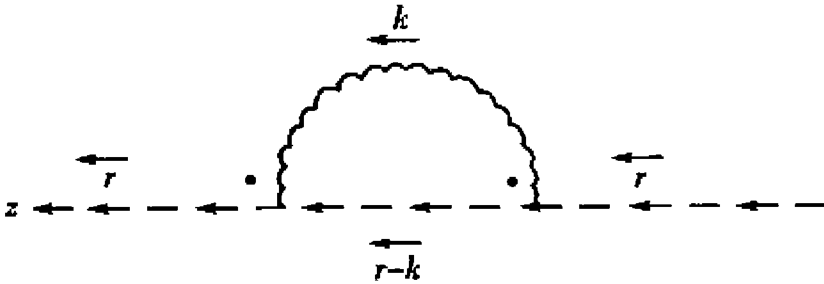


图 4.13



图 4.14

$(-C_2(G)g^2\Pi^0)$、$(-C_2(G)g^2\Pi^0)^2$、…等因子。所以把这些链的贡献与(4.82)加在一起，就得到：

$$-\frac{q_\nu{}'}{q^2}\cdot\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\cdot\frac{1}{p^2}(1+(-C_2(G)g^2\prod{}^0)$$

$$+(-C_2(G)g^2\prod{}^0)^2+\cdots)\cdot\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q) \tag{4.83}$$

第五项：在$\frac{\partial}{\partial y_\nu}$作用之前：

$$g f_{cik}(-i)\delta_{kb}\frac{\left(\delta_{\lambda\nu}-\frac{q_\lambda q_\nu}{q^2}\right)+\frac{q_\lambda q_\nu}{q^2}}{q^2}\cdot(-i)\frac{\delta_{ia}}{p^2}$$

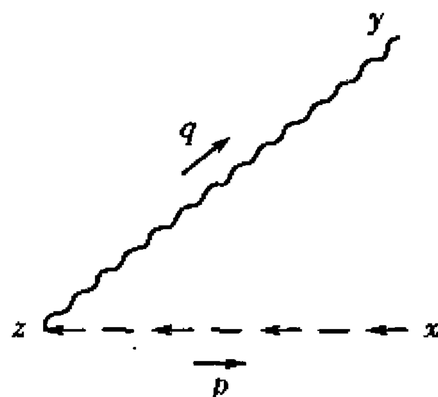


图　4.15

再求$\frac{\partial}{\partial y_\nu}$求一次微商，则出现因子 iq_ν：

$$\to -ig f_{cik}\delta_{kb}\frac{q_\lambda}{q^2}\frac{\delta_{ia}}{p^2}=-ig f_{cab}\delta_{\lambda\nu'}\frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\frac{1}{p^2}$$

与第三项相仿，在有微扰修正时，上式应改成：

$$\to\frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\gamma_{\lambda\nu'}^{cab}(r,p;q)$$

$$=\frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\delta_{\lambda\rho}\cdot\frac{1}{p^2}\cdot\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q) \tag{4.84}$$

（检验：这里的 $\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q)$ 与(4.80)的 $\gamma_{\lambda'}^{bac}(q,p;r)$ 除下指标不对应外，正好是 $r\rightleftarrows q$，$c\rightleftarrows b$，相当于 y，z 对调。与图 4.16 和图 4.9 的情况一致）。

再把与 z 有关的链式和求出来。我们现在要的是完整的式子而不只是一个因子。

一圈图的贡献：

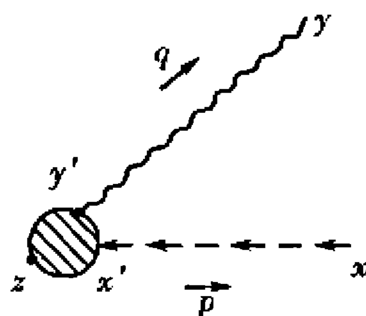


图　4.16

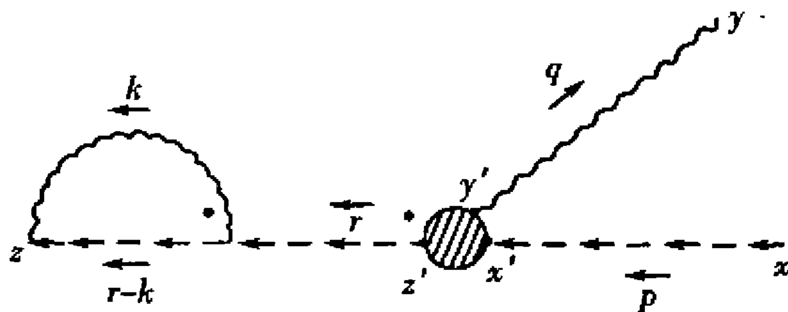


图　4.17

$$f_{cik}\left\{g\int(-i)\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{k_\lambda k_{\lambda'}}{k^2}\right)+\frac{k_\lambda k_{\lambda'}}{k^2}}{k^2}\cdot\frac{-i}{(r-k)^2}\right.$$

$$\cdot g(r-k)_{\lambda'}\mathrm{d}^4k \Bigg\} \cdot f_{ic'k}\frac{-i}{r^2}$$

$$\cdot i\gamma_{\nu'}^{c'ab}(r,p;q)(-i)\frac{\left(\delta_{\lambda'\nu}-\frac{q_{\nu'}q_{\nu}}{q^2}\right)+\frac{q_{\nu'}q_{\nu}}{q^2}}{q^2}\cdot(iq_{\nu})\cdot\frac{-i}{p^2}$$

$$=-\delta_{cc'}C_2(G)\{g^2r_\lambda i\Pi^0\}\cdot\frac{-i}{r^2}\frac{q_{\lambda'}}{q^2}\frac{1}{p^2}\gamma_{\nu'}^{c'ab}(r,p;q)$$

$$=\frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\cdot\frac{1}{p^2}(-C_2(G)g^2\Pi^0)\cdot\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q) \tag{4.85}$$

二圈图的贡献则无非是再加一个圈因子：

$$\frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\cdot\frac{1}{p^2}(-C_2(G)g^2\Pi^0)^2\cdot\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q) \tag{4.86}$$

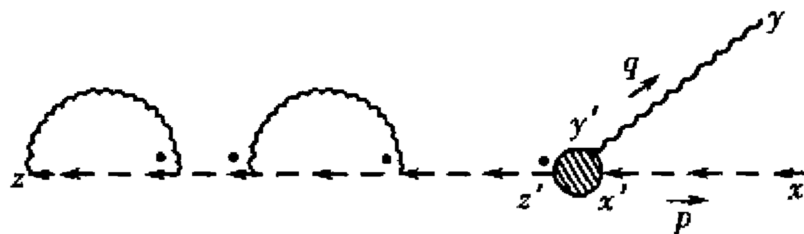


图 4.18

把链的贡献与(4.84)加在一起，得到

$$\frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\delta_{\lambda\rho}\cdot\frac{1}{p^2}\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q)$$

$$+\frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\cdot\frac{1}{p^2}((-C_2(G)g^2\Pi^0)$$

$$+(-C_2(G)g^2\Pi^0)^2+\cdots)\cdot\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q) \tag{4.87}$$

(4.87)的链贡献部分与(4.83)的链贡献部分正好抵消，而且一般情况下(Π^0 换成Π^*)也都是正好抵消的。所以第四项与第五项之和是

$$\frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\frac{1}{p^2}\left(\delta_{\lambda\rho}-\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\right)\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q) \tag{4.88}$$

把五个项((4.75)′,(4.79),(4.81),(4.83),(4.87))加到一起，代入 $W-T$ 恒等式(4.74)，当 p,q,r 很小时，就有

$$-\frac{p_\mu}{p^2}\cdot\frac{q_\nu}{q^2}\cdot\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)}{r^2}\Gamma_{\mu\nu\lambda'}^{abc}(p,q,r)$$

$$+\frac{q_\nu{}'}{q^2}\cdot\frac{1}{p^2}\left(\delta_{\lambda\rho}-\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\right)\gamma_{\rho\nu'}^{cab}(r,p;q)=0 \tag{4.89}$$

这里传播子取的是自由传播子，顶角则写成一般形式。其实，Π^0 和Π^*都是发散积分，需要重正化；传播子则要考虑微扰修正，也需要重正化。第五章将以重正化的观点再来讨论(4.89)式。我们将看到，由 $W-T$ 恒等式给出的 $\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}$ 与 $\gamma_{\rho\nu}^{cab}$间的关系(4.89)，可以保证重正化的耦合常数 g(AAA 顶角的耦合常数)和 g_F($\bar{u}Au$ 顶角的耦合常数)相等。

这里对(4.89)作一个最低次的检验。把Γ和γ取作最低次的,即取

$$\gamma_{\rho\nu'}^{cab} \doteq -ig f_{cab}\delta_{\rho\nu'}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{abc} \doteq -ig f_{abc}[(p-q)_\nu\delta_{\lambda\mu}+(q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu}+(r-q)_\mu\delta_{\nu\lambda}]$$

(4.89)第一行:

$$-\frac{p_\mu}{p^2}\cdot\frac{q_\nu}{q^2}\cdot\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)+\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}}{r^2}(-i)g f_{abc}\cdot[(p-q)_{\lambda'}\delta_{\mu\nu}$$

$$+(q-r)_\mu\delta_{\nu\lambda'}+(r-p)_\nu\delta_{\lambda'\mu}]=i\frac{f_{abc}}{p^2q^2}\left(q_\lambda-\frac{(q\cdot r)r_\lambda}{r^2}\right)g$$

(4.89)第二行:

$$\frac{q_\nu'}{q^2}\frac{1}{p^2}\left(\delta_{\lambda\rho}-\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\right)(-i)g f_{cab}\delta_{\rho\nu'}g=-i\frac{f_{abc}}{p^2q^2}\left(q_\lambda-\frac{(q\cdot r)r_\lambda}{r^2}\right)g$$

所以两行加起来得零,说明 $W-T$ 恒等式(4.74),(4.89)在最低次确是成立的。

参考文献

1 D. Lurié, Particles and Fieds, Interscience Publishers, Wiley, 1968.

2 J. D. Bjorken, S. D. Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw - Hill, 1965.

3 C. Itzykson, J. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw - Hill, 1980.

4 G. Costa, M. Tonin, Riv. Nuovo Cimento 5(1975)29.

5 B. W. Lee, J. Zinn - Jnstin, Phys. Rev. D5(1972)3121.

6 B. W. Lee, "Methods in Field Theory", edited by R. Balian and J. Zinn - Justin, 1976.

第五章　发散的减除和重正化

微扰论的核心问题是重正化问题，重正化的要点是发散的减除和把减除手续与乘法重正化的重正化常数 Z_i 联系起来。这一章的目的就是用一些具体的例子来说明这一点。

§5－1　发散的减除

先来看与发散的减除有关的一些定义和例子：

假定有一个费曼积分

$$F_\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int d^4 k_1 \cdots d^4 k_L I_\Gamma \tag{5.1}$$

（ε 是传播子中的微小量），Γ 代表某一个费曼图，$k_1, \cdots k_L$ 是独立的积分变量（内部动量）。其中

$$I_\Gamma = \prod_{ab,\sigma} \Delta^{ab,\sigma} \prod_a P_a \tag{5.2}$$

Γ 有 n 个顶点。a, b 代表顶点，取值 $1, 2, \cdots, n$。ab, σ 代表连接 ab 两点的第 σ 条传播子线，$\Delta^{ab,\sigma}$ 就是这条线的传播子函数。P_a 是只与顶点 a 有关的因子，包含耦合常数，$i, f_{\alpha\beta\gamma}$，k_μ 等。

F_Γ 如果是发散的，则用 J_Γ 代表其有限部分：

$$J_\Gamma = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int d^4 k_1 \cdots d^4 k_L R_\Gamma \tag{5.3}$$

R_Γ 如何定？这就涉及发散的减除问题。

以下给出一些定义。

1*PI* 图形（或正规图形）：把其中的任何一条内线割断后不能断开成为两个不连接图的图形（在§2－5 中我们已经引入 1*PI* 图的概念，这里再补充一个确切的定义）。

原始发散图：最简单的发散图，只要把它的一条内线断开，就变成收敛的图。

表观发散度：计数幂次所给出的发散度，用 $D(\Gamma)$ 代表：

$$D(\Gamma) = \sum_i n_i d_i + 2I_B + 3I_F - 4\left(\sum_i n_i - 1\right) \tag{5.4}$$

其中 n_i 是 i 类型顶点的个数，

d_i 是 i 类型顶点中微商次数，

I_B 是内部玻色子线数目。玻色子线的紫外行为 $\sim \frac{1}{k^2} d^4 k$。在有些情况，玻色子线在紫外区域比 $\sim \frac{1}{k^2} d^4 k$ 发散得更快，这种理论是不可重正化的。例如在带质量 μ 的矢量玻色子场的情况（见(3.18)），玻色子线比 $\sim \frac{1}{k^2} d^4 k$ 发散得更快；在第九章讨论的么正规范中，玻色子线也比 $\sim \frac{1}{k^2} d^4 k$ 发散得更快。两者都是不能重正化的。这本书里不讨论这些

情况。

I_F 是内部费米子线数目。费米子线的紫外行为 $\sim \frac{1}{k}\mathrm{d}^4k$。

每一个顶点有一个 $\delta^4(\sum k)$，提供(-4)幂次。但最后要留下一个 δ 函数。它在(5.1)中不积分，代表能量动量守恒。

然后，我们再取：

b_i 表示连接着 i 类型顶点的玻色子线数目。

E_B 是总的外部玻色子线数目，

则有

$$E_B + 2I_B = \sum_i n_i b_i$$

f_i 表示连接着 i 类型顶点的费米子线数目，

E_F 是总的外部费米子线数目，

则有

$$E_F + 2I_F = \sum_i n_i f_i$$

代入(5.4)得

$$D(\Gamma) = \sum_i n_i\left(d_i + b_i + \frac{3}{2}f_i - 4\right) - E_B - \frac{3}{2}E_F + 4 \tag{5.5}$$

再定义 i 类型顶点的 δ_i 如下：

$$\delta_i = d_i + b_i + \frac{3}{2}f_i - 4$$

则(5.5)又可写成

$$D(\Gamma) = \sum_i n_i\delta_i - E_B - \frac{3}{2}E_F + 4 \tag{5.7}$$

由此可见，只有在 $\delta_i \leqslant 0$ 时，$D(\Gamma)$才不会随 n_i 而不断增加。所以，必须每一种类型的顶点的 δ_i 都满足

$$\delta_i = d_i + b_i + \frac{3}{2}f_i - 4 \leqslant 0 \tag{5.8}$$

方才会有有限个原始发散图形，方才能够重正化。

从(5.8)看到，在一个可重正化的理论中，一个顶点至多有四条玻色子线，或至多有两条费米子线。

在 $\delta_i \leqslant 0$ 的情况下，自(5.7)又有

$$D(\Gamma) \leqslant 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F \tag{5.9}$$

对于一个发散图形，表观发散度应是 $D(\Gamma) \geqslant 0$。可见如果 $\delta_i = 0$，则发散图形外线数目必定是

$$E_B + \frac{3}{2}E_F \leqslant 4 \tag{5.10}$$

在规范理论中，所有的相互作用顶点都是 $\delta_i = 0$(质量项不归入 $\mathscr{L}_i$)，所以(5.9)简化为

$$D(\Gamma) = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F \tag{5.9$'$}$$

于是规范理论发散图形的外线不外以下几种情况：

（ⅰ）四条玻色子外线

（ⅱ）三条玻色子外线

（ⅲ）两条玻色子外线

（ⅳ）一条玻色子外线，两条费米子外线

（ⅴ）两条费米子外线

在计数动量幂次时，$F-P$ 场应归入玻色场，它的传播子的紫外行为 $\sim \frac{1}{k^2}\mathrm{d}^4k$。

去发散的手续

我们采取的是逐级去发散的手续（BPHZ 方法）。

首先，对于原始发散图形 Γ，作如下讨论。定义 t^{Γ}：

$$J_{\Gamma} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int \mathrm{d}^4k_1\cdots\mathrm{d}^4k_L(1-t^{\Gamma})I_{\Gamma} \tag{5.11}$$

与(5.3)对比：

$$R_{\Gamma} = (1-t^{\Gamma})I_{\Gamma} \tag{5.12}$$

此处 t^{Γ} 是抵消去发散的一种手续。后面我们将专门讨论维数正常化消去发散的手续。现在，作为一个例子，我们先讨论一下 Taylor 展开消去发散的办法。假设

$$I_{\Gamma} = f(P_1,\cdots,P_{E-1}) \tag{5.13}$$

P_i 是 Γ 图形外线的动量，E 是总共外线数目（$E=E_B+F_F$）。由于 δ 函数保证能量动量守恒，所以只有 $E-1$ 个独立的外线动量。

设 I_{Γ} 积分的表观发散度为 $D(\Gamma)=d$，则可取

$$t^{\Gamma}I_{\Gamma} = t^{\Gamma}f(P_1,\cdots,P_{E-1}) = f(0,0,\cdots,0)+\cdots+\frac{1}{d!}\sum_{i_1,\cdots,i_d=1}^{E-1}(P_{i_1})_{\lambda}(P_{i_2})_{\mu}\cdots(P_{i_d})_{\nu} \cdot \left.\frac{\partial^d f}{(\partial P_{i_1})_{\lambda}(\partial P_{i_2})_{\mu}\cdots(\partial P_{i_d})_{\nu}}\right|_{P=0} \tag{5.14}$$

由于 Γ 的外线的 P_i 必定在 Γ 内部传播子中出现，而且出现时总是表现为同内部动量 k_i 线性相加的形式，所以，每对 P 微商一次，函数 f 中的 k 的幂次就也下降一次。现在 I_{Γ} 的表观发散度 $D(\Gamma)=d\geqslant 0$，所以(5.14)右方代入(5.11)的积分后，可见 $t^{\Gamma}I_{\Gamma}$ 的各项的表观发散度都是 $\geqslant 0$。

再把 f 作 Taylor 展开：

$$f(P_1,\cdots,P_{E-1}) = f(0,\cdots,0)+\cdots+\frac{1}{d!}\sum_{i_1,\cdots,i_d=1}^{E-1}(P_{i_1})_{\lambda}(P_{i_2})_{\mu}\cdots(P_{i_d})_{\nu} \cdot \left.\frac{\partial^d f}{(\partial P_{i_1})_{\lambda}(\partial P_{i_2})_{\mu}\cdots(\partial P_{i_d})_{\nu}}\right|_{P=0}+\bar{f}(P_1,\cdots,P_{E-1}) \tag{5.15}$$

由于 $\bar{f}$ 中 k 的幂次进一步下降，所以 $\bar{f}$ 的表观发散度 <0。对于原始发散图，把

$$R_{\Gamma} = (1-t^{\Gamma})I_{\Gamma} = \bar{f}(P_1,\cdots,P_{E-1}) \tag{5.16}$$

代入(5.11)，就会是不发散的。

一点讨论：

(5.14)是取 $P_i=0$ 为减除点。也可以取其他的减除点。不同的减除点得到的 $\bar{f}$ 不相同，但只相差一个后面将讨论的有限重正化。

其次，对于有交缠无穷大的图形 Γ，作如下讨论。

我们取量子电动力学中的一个含有交缠无穷大的电子自能图（见图 5.1）为例：与此图相对应的积分是（式中略去了电子质量，$\hat{P}=\gamma_2 P_2, \hat{R}=\gamma_2 k_2, ec$）：

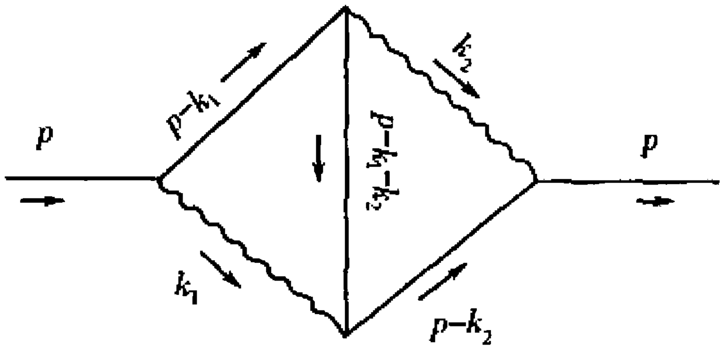


图 5.1

$$\sim \int d^4k_1 d^4k_2 \frac{-i}{k_1^2}\frac{-i}{k_2^2}\gamma_\mu \frac{-1}{\hat{P}-\hat{k}_1}\gamma_\nu \frac{-1}{\hat{P}-\hat{k}_1-\hat{k}_2}\gamma_\mu \frac{-1}{\hat{P}-\hat{k}_2}\gamma_\nu$$

它的表观发散度是 1。但是，如果按(5.15)把它展开，就会发现 $\bar{f}$ 仍有发散项。原因是 $\bar{f}$ 含有对 P 微商二次的各项。其中一项是对 $\frac{1}{\hat{P}-\hat{k}_1}$ 因子微商二次，虽然降低了 k_1 积分的幂次，去掉了 k_1 积分的发散，但没有降低 k_2 积分的幂次，没有去掉 k_2 积分的发散。同理，对 $\frac{1}{\hat{P}-\hat{k}_2}$ 微商二次的项也是去掉了 k_2 积分的发散，而没有去掉 k_1 积分的发散。

对于含有原始发散子图的发散图形，都有同样的问题。例如：



图 5.2

5.1 图和 5.2 图都不是原始发散图，所以(5.14)，(5.15)这种消去发散的办法对于并非原始发散的发散图形 Γ 是不够的。为此，我们必须更仔细地考察一下并非原始发散的、一般的发散图形。

以下再给出一些定义。

重正化部分：表观发散的 1*PI* 图形。

令 γ_1,γ_2 代表两个 1*PI* 子图，又可定义：

$\gamma_1\cap\gamma_2=\phi$：$\gamma_1$ 和 γ_2 没有共同的顶点，也没有共同的传播子线。

$\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}$：Γ 中一组互不相交的子图。

约化图 $\Gamma/\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}$：把 Γ 中的每一个子图 γ_i 缩成一点，并在这一点上用 1 代表这个子图。

现在就可以来规定 R_Γ。

1. 若 Γ 不是一个重正化部分（即 Γ 不发散），则

$$R_\Gamma=\bar{R}_\Gamma, t^\Gamma=0 \tag{5.17}$$

2. 若 Γ 是一个重正化部分（Γ 发散）则

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma)\overline{R}_\Gamma \tag{5.18}$$

其中

$$\overline{R}_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}} I_{\Gamma/\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}} \prod_{\tau=1}^{c} O_{\gamma_\tau} \tag{5.19}$$

$$O_{\gamma_i} = -t^{\gamma_i}\overline{R}_{\gamma_i} \qquad (\gamma_i \text{ 都小于 } \Gamma) \tag{5.20}$$

说明：

1. $\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}$ 是对 Γ 中所有可能的 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}$ 的组成方式求和，但 $\gamma_i \neq \Gamma$（即不包括 $\gamma_i = \Gamma$），而且在同一个 $\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}$ 中，$\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 互不相交（$\gamma_i \cap \gamma_j = \phi$，从而也排除了 $\gamma_i \supset \gamma_j, \gamma_i \subset \gamma_j$）。

2. t^{γ_i} 意味着减除，把 $\overline{R}_{\gamma_i}$ 中的发散部分减除掉。

3. 这样规定的 $\overline{R}_\gamma, \overline{R}_\Gamma$ 有递归的含意。在微扰论中，$\overline{R}_\gamma$ 的微扰次数比 $\overline{R}_\Gamma$ 低，减除就是从最低次到高次，逐次进行。

4. 具体来说，$\overline{R}_{\gamma_i}$ 代表 γ_i 图已减除了它内部子图的发散，只剩下它的骨架发散（整体发散）。而(5.20)，(5.19)则进一步除去了各个 γ_i 的骨架发散（整体发散），即减除了 Γ 的全部子图的发散，只剩下了 Γ 的骨架发散（整体发散）。(5.18)则又进一步连 Γ 的骨架发散也减除了（见后面 Weinberg 定理的说明）。

举三个例子：

例 1. Γ 是一个原始发散图，没有 $\neq \Gamma$ 的子图，所以 $\sum_{\{\gamma_1\cdots,\gamma_c\}} = 0, \overline{R}_\Gamma = I_\Gamma$。自(5.18)有

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma)I_\Gamma \tag{5.21}$$

例 2. Γ 是量子电动力学中的电子的一个自能图（见图 5.3），其中 γ_1, γ_2 子图为重正化部分（有发散）。

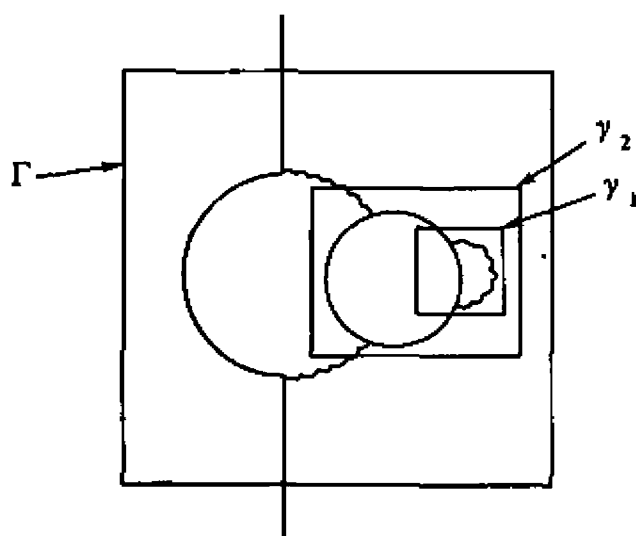


图 5.3

$$\overline{R}_\Gamma = I_\Gamma + I_{\Gamma/\{\gamma_2\}} O_{\gamma_2} + I_{\Gamma/\{\gamma_1\}} O_{\gamma_1}$$

$$O_{\gamma_1} = -t^{\gamma_1} I_{\gamma_1}$$

$$\begin{aligned} O_{\gamma_2} &= -t^{\gamma_2}\overline{R}_{\gamma_2} \\ &= -t^{\gamma_2}[I_{\gamma_2} + I_{\gamma_2/\{\gamma_1\}} O_{\gamma_1}] \\ &= -t^{\gamma_2}[I_{\gamma_2} + I_{\gamma_2/\{\gamma_1\}}(-t^{\gamma_1})I_{\gamma_1}] \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{R}_\Gamma = I_\Gamma - I_{\Gamma/\{\gamma_2\}} t^{\gamma_2}[I_{\gamma_2} + I_{\gamma_2/\{\gamma_1\}}(-t^{\gamma_1})I_{\gamma_1}]$$

$$-I_{\Gamma/\{\gamma_1\}}t^{\gamma_1}I_{\gamma_1}$$

$$=I_\Gamma-t^{\gamma_2}I_\Gamma+t^{\gamma_2}t^{\gamma_1}I_\Gamma-t^{\gamma_1}I_\Gamma$$

$$=(1-t^{\gamma_2})(1-t^{\gamma_1})I_\Gamma$$

$$R_\Gamma=(1-t^\Gamma)\overline{R}_\Gamma=(1-t^\Gamma)(1-t^{\gamma_2})(1-t^{\gamma_1})I_\Gamma \tag{5.22}$$

这里 Γ 包括 γ_2，γ_2 包括 γ_1，所以次序必须是 $\Gamma t^{\gamma_2}t^{\gamma_1}$。另外，我们注意到

$$I_\Gamma = I_{\Gamma/\{\gamma_2\}}I_{\gamma_2} = I_{\Gamma/\{\gamma_2\}}I_{\gamma_2/\{\gamma_1\}}I_{\gamma_1} \tag{5.23}$$

例 3. Γ 是 φ^4 耦合理论中的一个 φ 自能图，其中 $\gamma_{1_a},\gamma_{1_b},\gamma_{1_c},\gamma_1,\gamma_{2_a},\gamma_{2_b},\gamma_{2_c}$ 都是发散子图（重正化部分）。图 5.4 中没有画出 γ_{1c} 和 γ_{2c}，它们分别是 a，c 线和 A，C 线做成的圈。

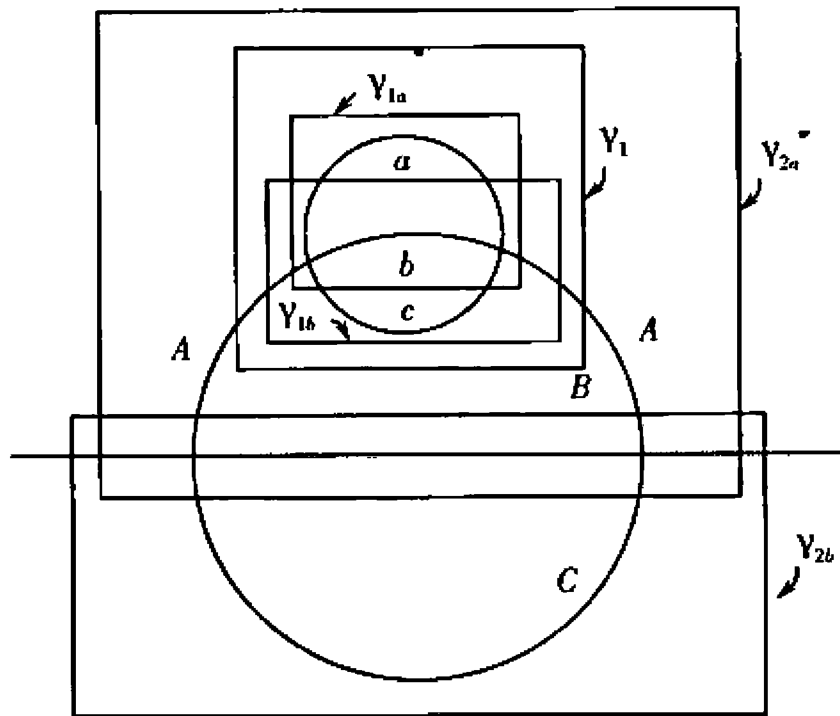


图 5.4

$$\begin{aligned}\overline{R}_\Gamma=&I_\Gamma+I_{\Gamma/\{\gamma_{1a}\}}O_{\gamma_{1a}}+I_{\Gamma/\{\gamma_{1b}\}}O_{\gamma_{1b}}+I_{\Gamma/\{\gamma_{1c}\}}O_{\gamma_{1c}}\\&+I_{\Gamma/\{\gamma_1\}}O_{\gamma_1}+I_{\Gamma/\{\gamma_{2b},\gamma_{1a}\}}O_{\gamma_{2b}}O_{\gamma_{1a}}+I_{\Gamma/\{\gamma_{2b},\gamma_{1b}\}}O_{\gamma_{2b}}O_{\gamma_{1b}}\\&+I_{\Gamma/\{\gamma_{2b},\gamma_{1c}\}}O_{\gamma_{2b}}O_{\gamma_{1c}}+I_{\Gamma/\{\gamma_{2b},\gamma_1\}}O_{\gamma_{2b}}O_{\gamma_1}\\&+I_{\Gamma/\{\gamma_{2a}\}}O_{\gamma_{2a}}+I_{\Gamma/\{\gamma_{2b}\}}O_{\gamma_{2b}}+I_{\Gamma/\{\gamma_{2c}\}}O_{\gamma_{2c}}\end{aligned} \tag{5.24}$$

其中

$$O_{\gamma_{1a}} = -t^{\gamma_{1a}}I_{\gamma_{1a}}$$

$$O_{\gamma_{1b}} = -t^{\gamma_{1b}}I_{\gamma_{1b}}$$

$$O_{\gamma_{1c}} = -t^{\gamma_{1c}}I_{\gamma_{1c}}$$

$$\begin{aligned}O_{\gamma_1} =& -t^{\gamma_1}\overline{R}_{\gamma_1}\\=&-t^{\gamma_1}\{I_{\gamma_1}+I_{\gamma_1/\{\gamma_{1a}\}}(-t^{\gamma_{1a}})I_{\gamma_{1a}}\\&+I_{\gamma_1/\{\gamma_{1b}\}}(-t^{\gamma_{1b}})I_{\gamma_{1b}}\\&+I_{\gamma_1/\{\gamma_{1c}\}}(-t^{\gamma_{1c}})I_{\gamma_{1c}}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}O_{\gamma_{2a}} =& -t^{\gamma_{2a}}\overline{R}_{\gamma_{2a}}\\=&-t^{\gamma_{2a}}\{I_{\gamma_{2a}}+I_{\gamma_{2a}/\{\gamma_1\}}O_{\gamma_1}+I_{\gamma_{2a}/\{\gamma_{1a}\}}O_{\gamma_{1a}}\\&+I_{\gamma_{2a}/\{\gamma_{1b}\}}O_{\gamma_{1b}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \qquad\qquad\qquad + I_{\gamma_{2a}/\{\gamma_{1c}\}} O_{\gamma_{1c}} \} \\
& = -t^{\gamma_{2a}} \{ I_{\gamma_{2a}} - I_{\gamma_{2a}/\{\gamma_1\}} t^{\gamma_1} [I_{\gamma_1} + I_{\gamma_1/\{\gamma_{1a}\}} (-t^{\gamma_{1a}}) I_{\gamma_{1a}} \\
& \qquad\qquad\qquad + I_{\gamma_1/\{\gamma_{1b}\}} (-t^{\gamma_{1b}}) I_{\gamma_{1b}} \\
& \qquad\qquad\qquad + I_{\gamma_1/\{\gamma_{1c}\}} (-t^{\gamma_{1c}}) I_{\gamma_{1c}}] \\
& \qquad - I_{\gamma_{2a}/\{\gamma_{1a}\}} t^{\gamma_{1a}} I_{\gamma_{1a}} \\
& \qquad - I_{\gamma_{2a}/\{\gamma_{1b}\}} t^{\gamma_{1b}} I_{\gamma_{1b}} \\
& \qquad - I_{\gamma_{2a}/\{\gamma_{1c}\}} t^{\gamma_{1c}} I_{\gamma_{1c}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
O_{\gamma_{2b}} &= -t^{\gamma_{2b}} \overline{R}_{\gamma_{2b}} = -t^{\gamma_{2b}} I_{\gamma_{2b}} \\
O_{\gamma_{2c}} &= -t^{\gamma_{2c}} \overline{R}_{\gamma_{2c}} \\
&= -t^{\gamma_{2c}} \{ I_{\gamma_{2c}} - I_{\gamma_{2c}/\{\gamma_1\}} t^{\gamma_1} [I_{\gamma_1} + I_{\gamma_1/\{\gamma_{1a}\}} (-t^{\gamma_{1a}}) I_{\gamma_{1a}} \\
& \qquad\qquad\qquad + I_{\gamma_1/\{\gamma_{1b}\}} (-t^{\gamma_{1b}}) I_{\gamma_{1b}} \\
& \qquad\qquad\qquad + I_{\gamma_1/\{\gamma_{1c}\}} (-t^{\gamma_{1c}}) I_{\gamma_{1c}}] \\
& \qquad - I_{\gamma_{2c}/\{\gamma_{1a}\}} t^{\gamma_{1a}} I_{\gamma_{1a}} \\
& \qquad - I_{\gamma_{2c}/\{\gamma_{1b}\}} t^{\gamma_{1b}} I_{\gamma_{1b}} \\
& \qquad - I_{\gamma_{2c}/\{\gamma_{1c}\}} t^{\gamma_{1c}} I_{\gamma_{1c}} \}
\end{aligned}
$$

代入(5.24)得到

$$
\begin{aligned}
\overline{R}_\Gamma &= \{ (1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) - t^{\gamma_1} (1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) \\
& \quad - t^{\gamma_{2b}} (- t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) + t^{\gamma_{2b}} t^{\gamma_1} (1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) \\
& \quad - t^{\gamma_{2a}} (1 - t^{\gamma_1} [1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}] - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) \\
& \quad - t^{\gamma_{2b}} \\
& \quad - t^{\gamma_{2c}} (1 - t^{\gamma_1} [1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}] - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) \} I_\Gamma \\
&= \{ (1 - t^{\gamma_1}) (1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) \\
& \quad - t^{\gamma_{2b}} (1 - t^{\gamma_1}) (1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) \\
& \quad - t^{\gamma_{2a}} (1 - t^{\gamma_1}) (1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) \\
& \quad - t^{\gamma_{2c}} (1 - t^{\gamma_1}) (1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) \} I_\Gamma \\
&= (1 - t^{\gamma_{2a}} - t^{\gamma_{2b}} - t^{\gamma_{2c}}) (1 - t^{\gamma_1}) (1 - t^{\gamma_{1a}} - t^{\gamma_{1b}} - t^{\gamma_{1c}}) I_\Gamma
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

$$
R_\Gamma = (1 - t^\Gamma) \overline{R}_\Gamma \tag{5.26}
$$

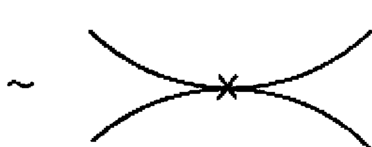
可见(5.19),(5.20)确是从低次到高次,逐次减除。

再把有关的图列出如下:

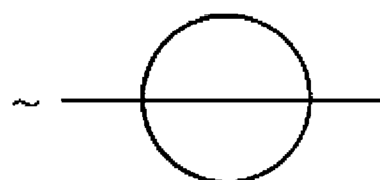
$I_{\gamma_{1a}}, I_{\gamma_{1b}}, I_{\gamma_{1c}}$



$t^{\gamma_{1a}} I_{\gamma_{1a}}, t^{\gamma_{1b}} I_{\gamma_{1b}}, t^{\gamma_{1c}} I_{\gamma_{1c}}$



I_{γ_1}



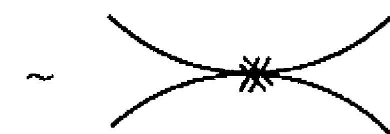
$t^{\gamma_1} \overline{R}_{\gamma_1}$



$I_{\gamma_{2a}}, I_{\gamma_{2c}}$



$t^{\gamma_{2a}} R_{\gamma_{2a}}, t^{\gamma_{2c}} R_{\gamma_{2c}}$



$I_{\Gamma/\{\gamma_{1a}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{1a}}$ $\sim$ c　　$I_{\Gamma/\{\gamma_{1b}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{1b}}$ $\sim$ a　　$I_{\Gamma/\{\gamma_{1c}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{1c}}$ $\sim$ b

$I_{\Gamma/\{\gamma_{1}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{1}}$ $\sim$　　$I_{\Gamma/\{\gamma_{2b},\gamma_{1a}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{2b}}\mathrm{O}_{\gamma_{1a}}$ $\sim$ c A A　　$I_{\Gamma/\{\gamma_{2b},\gamma_{1b}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{2b}}\mathrm{O}_{\gamma_{1b}}$ $\sim$ a A A

$I_{\Gamma/\{\gamma_{2b},\gamma_{1c}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{2b}}\mathrm{O}_{\gamma_{1c}}$ $\sim$ b A A　　$I_{\Gamma/\{\gamma_{2b},\gamma_{1}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{2b}}\mathrm{O}_{\gamma_{1}}$ $\sim$ A A　　$I_{\Gamma/\{\gamma_{2a}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{2a}}$ $\sim$ C

$I_{\Gamma/\{2b\}}\mathrm{O}_{\gamma_{2b}}$ $\sim$ A A　　$I_{\Gamma/\{\gamma_{2c}\}}\mathrm{O}_{\gamma_{2c}}$ $\sim$ B

图　5.5

为了说明 $I_{\gamma_{1a}}, I_{\gamma_{1b}}, I_{\gamma_{1c}}$ 是发散子图，我们把费曼图 γ_1 的积分写出来：

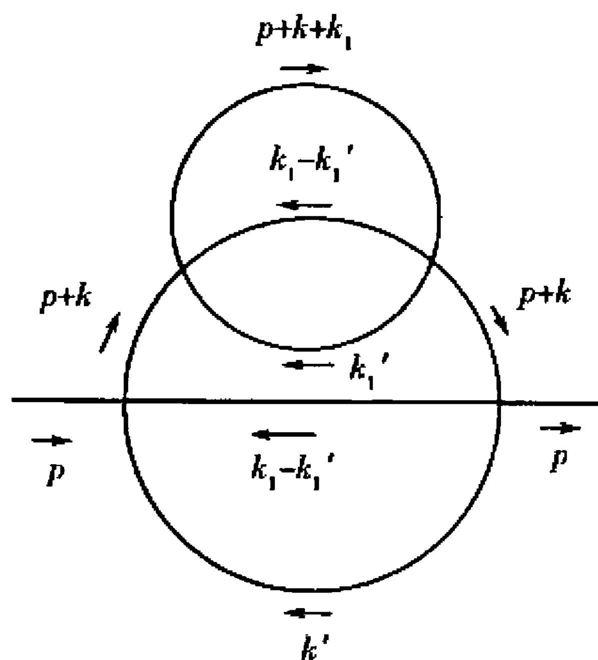


图　5.6

$$\int \frac{1}{(p+k+k_1)^2+m^2}\cdot\frac{1}{(k_1-k_1')^2+m^2}\cdot\frac{1}{k_1'^2+m^2}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}^4k_1' \tag{5.27}$$

显然其中有三种发散：

1. $$\int \frac{1}{(p+k+k_1)^2+m^2}\cdot\frac{1}{(k_1-k_1')^2+m^2}\mathrm{d}^4k_1 \sim I_{\gamma_{1a}} \tag{5.28}$$

2. $$\int \frac{1}{(k_1-k_1')^2+m^2}\cdot\frac{1}{k_1'^2+m^2}\mathrm{d}^4k_1' \sim I_{\gamma_{1b}} \tag{5.29}$$

3. 把(5.27)作变数变换

$$k_1-k_1'\to k_a,\qquad k_1'\to k_1-k_a$$

把(5.27)写成

$$\int \frac{1}{(p+k+k_1)^2+m^2}\cdot\frac{1}{k_a^1+m^2}\cdot\frac{1}{(k_1-k_a)^2+m^2}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_a \tag{5.30}$$

则有

$$\int \frac{1}{(p+k+k_1)^2+m^2}\cdot\frac{1}{(k_1-k_a)^2+m^2}\mathrm{d}^4k_1 \sim I_{\gamma_{1c}} \tag{5.31}$$

关于如何消去发散，方法有各种各样。前面讲过的 Taylor 展开消去发散的方法是较早采用的一种。但这种方法实际上是无穷大减去无穷大，在数学上并不可取。还有一种方法叫做 Pauli-Villars 方法。这种方法是先取一些质量参数，把发散积分改换成不发散积分。这就叫做正常化。然后再令这些质量参数→∞，则可看到正常化了的不发散的积分又分成两个部分，一个部分不随质量参数而变，另一部分则随着质量参数的无限增大而趋于∞。只需把后一部分减除掉，则剩下的部分在质量参数→∞后仍是不发散的，这就达到了消去发散的目的。然而在规范场理论中，Pauli-Villars 方法所引入的质量参数是要破坏规范不变性的，所以也是不可取的。目前已知的唯一不破坏规范不变的正常化方法是第六章、第七章将要介绍的维数正常化方法。第七章还将讨论如何用维数正常化方法消去图 5.4 的 γ_1 中的发散，以及不出现有害极点的问题。

§5-2　Zimmerman 定理和 Weinberg 定理

上节(5.18)，(5.19)，(5.20)的减除是按微扰的次数，由低次到高次逐步写出。试问能不能不是一步一步地写出来，而是一次写成？

定义：$\gamma_1\subseteq\gamma_2$，$\gamma_1\supseteq\gamma_2$，$\gamma_1\cap\gamma_2=\phi$ 都是 γ_1 和 γ_2 非交缠的情况。如果这三种情况都不是，就说 γ_1 和 γ_2 交缠：

$$\gamma_1 \mathrm{O} \gamma_2$$

定义：Γ 林是一系列图的集合，满足如下条件：

1. Γ 林 U 中的元素都是 Γ 中的重正化部分(有发散)。

2. U 中的任两个元素都是非交缠的(包括 $\gamma_i\subseteq\gamma_j$，$\gamma_i\supseteq\gamma_j$，$\gamma_i\cap\gamma_j=\phi$ 的情况)。

3. U 也可以是空集，即没有元素。

定义：包括 Γ 的 Γ 林叫做满林，用 T 表示。

定义：不包括 Γ 的 Γ 林叫做正常林，用 U 表示。

每一个 U 加上一个 $\{\Gamma\}$ 元素，就成为一个满林 T。$T=U\cup\{\Gamma\}$。所以，对应于每一个 U，都有一个满林 T。T 和 U 是 1:1 对应的。例如，设 U 是空集，$U=\phi$，则对应的 $T=\{\Gamma\}$。

定理
$$O_\gamma=-t^\gamma\overline{R}_\gamma=-t^\gamma\sum_U^{\text{正常}}\prod_{\lambda\in U}(-t^\lambda)I_\gamma \tag{5.32}$$

或
$$O_\gamma=\sum_T^{\text{满}}\prod_{\lambda\in T}(-t^\lambda)I_\gamma \tag{5.33}$$

说明一下：

1. $\sum\limits_U^{\text{正常}}$ 是对所有的正常林求和（包括 $U=\phi$），$\sum\limits_T^{\text{满}}$ 是对所有的满林求和。

2. 在连乘积 $\prod\limits_{\lambda\in U}(-t^\lambda)$ 和 $\prod\limits_{\lambda\in T}(-t^\lambda)$ 中，若 $\lambda\subset\sigma$，则次序是 $(-t^\sigma)(-t^\lambda)$；若 $\lambda\cap\sigma=\phi$，则
$$t^\lambda t^\sigma=t^\sigma t^\lambda$$
与次序无关（因为 $\lambda\cap\sigma=\phi$ 时，t^σ 和 t^λ 分别作用于互相独立的子图上）。

3. (5.32) 与 (5.33) 等价，原因是 T 和 U 是 1:1 对应的，每项 $-t^\gamma\prod\limits_{\lambda\in U_i}(-t^\lambda)I_\gamma$（$U_i$ 中所有的 t^λ 连乘）都可写成 $\prod\limits_{\lambda\in T_i}(-t^\lambda)I_\gamma$（$T_i$ 中所有的 t^γ 连乘）。

4. (5.32) 中 $\sum\limits_U^{\text{正常}}$ 包括空集 $U=\phi$，它的贡献定义为：
$$\prod_{\lambda\in U=\phi}(-t^\lambda)=1 \tag{5.34}$$

定理的证明如下：

证明：

我们定义
$$\tilde{O}_\gamma=-t^\gamma\sum_U^{\text{正常}}\prod_{\lambda\in U}(-t^\lambda)I_\gamma \tag{5.35}$$

或
$$\tilde{O}_\gamma=\sum_T^{\text{满}}\prod_{\lambda\in T}(-t^\lambda)I_\gamma \tag{5.36}$$

目的是证明 $\tilde{O}_\gamma$ 就是 $\tilde{O}_\gamma=-t^\gamma\overline{R}_\gamma$（与 (5.32)，(5.33) 对照），

这里如果 γ 的树林 U 不是空林，就必定会含有若干个最大元素 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_c$，它们互不交缠，而且都小于 γ。

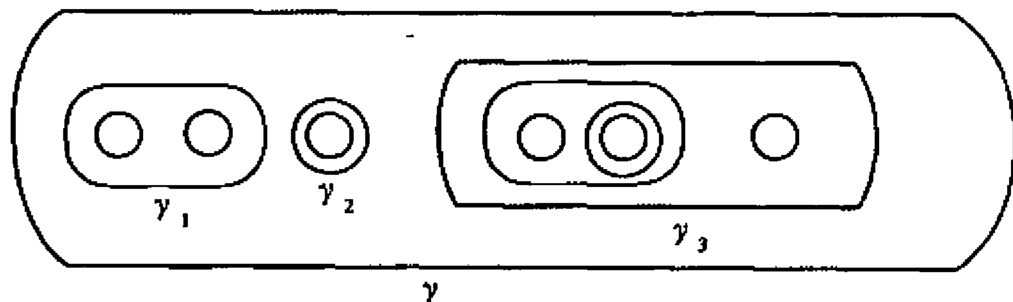


图 5.7

在 U（不是空林）给定时，对于每一个最大元素 γ_i 有一个满林 T_i，它是一些 $\gamma(\subseteq\gamma_i)$ 元素（包括 γ_i 在内）的集合，具体有哪些 γ 元素则由给定的 U 可以看出。满林 T_i 中的各个 γ 也是非交缠的。这种 T_i 是一种只含有一个最大元素 (γ_i) 的"林"，又可称为一棵"树"。而 γ 的树林 U（正常林），则是 $T_1,T_2,\cdots,T_c$ 这些棵"树"的并集：
$$U=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_c \tag{5.37}$$

现在,既然已经把林 U 分成了一棵一棵的树,(5.35)就写成:

$$\tilde{O}_\gamma = -t^\gamma I_\gamma - t^\gamma \sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}} \sum_U^{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}\max} \prod_{\lambda\in T_1}(-t^\lambda)\prod_{\lambda\in T_2}(-t^\lambda)\cdots\prod_{\lambda\in T_c}(-t^\lambda)I_\gamma \quad (5.38)$$

说明一下:

1. (5.35)的 $\sum_U^{\text{正常}}$ 中包括空林,按照(5.34)的定义,空林的贡献就是(5.38)右方的第一项。

2. 因为 $\sum_U^{\text{正常}}$ 包括所有的正常林,所以 $\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}$ 中的 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 可以在 γ 中任意取,只要不是空的,互相不交缠,而且 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 都 $\subset\gamma$。

3. $\sum_U^{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}\max}$ 就是对各种可能的 U 林求和,不过有一个条件,就是这些 U 林都正好以 $\gamma_1,\cdots,\gamma_c$ 作为其最大元素。

4. $\prod_{\lambda\in T_i}$ 中的 T_i 是以 γ_i 为最大元素的单棵的"树"。

以前面例 2 的图为例, $\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}$ 有两项,一是 $\{\gamma_2\}$ 项,一是 $\{\gamma_1\}$ 项,所以

$$\begin{aligned}
\tilde{O}_\gamma &= -t^\Gamma I_\Gamma - t^\Gamma \sum_U^{\{\gamma_2\}\max}\prod_{\lambda\in\gamma_2}(-t^\lambda)I^\Gamma - t^\Gamma\sum_U^{\{\gamma_1\}\max}\prod_{\lambda\in\gamma_1}(-t^\lambda)I_\Gamma \\
&= -t^\Gamma I_\Gamma - t^\Gamma(-t^{\gamma_2}+t^{\gamma_2}t^{\gamma_1})I_\Gamma - t^\Gamma(-t^{\gamma_1})I_\Gamma \\
&= -t^\Gamma(1-t^{\gamma_2})(1-t^{\gamma_1})I_\Gamma = -t^\Gamma\overline{R}_\Gamma \\
&\quad \therefore R_\Gamma = (1-t^\Gamma)\overline{R}_\Gamma = (1-t^\Gamma)(1-t^{\gamma_2})(1-t^{\gamma_1})I_\Gamma
\end{aligned}$$

与(5.22)一致。

现在,T_i 既是以 γ_i 为最大元素的树,就可以把(5.38)中的 $\sum_U^{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}\max}$ 换成对 T_i 求和(即对最大元素为 γ_i 的各个 T_i 求和)。为此,可把 I_γ 写成:

$$I_\gamma = I_{\gamma/\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}I_{\gamma_1}\cdots I_{\gamma_c} \quad (5.39)$$

而(5.38)写成

$$\tilde{O}_\gamma = -t^\gamma I_\gamma - t^\gamma\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}I_{\gamma/\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}\cdot\sum_{T_1}^{\gamma_1\text{满}}\prod_{\lambda\in T_1}(-t^\lambda)I_{\gamma_1}\cdots\sum_{T_c}^{\gamma_c\text{满}}\prod_{\lambda\in T_c}(-t^\lambda)I_{\gamma_c} \quad (5.40)$$

再利用(5.36)式,则有

$$\tilde{O}_\gamma = -t^\gamma I_\gamma - t^\gamma\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}I_{\gamma/\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}\tilde{O}_{\gamma_1}\cdots\tilde{O}_{\gamma_c} \quad (5.41)$$

显出从低次微扰到高次微扰的逐级减除的递归形式。

然而(5.32),(5.33)中的 O_γ 正好是我们要找的应该具有如下逐级减除递归形式的骨架发散积分函数:

$$O_\gamma = -t^\gamma I_\gamma - t^\gamma\sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}I_{\gamma/\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}}O\gamma_1\cdots O\gamma_c \quad (5.42)$$

(5.42)与(5.41)具有相同的递归形式,而且,原始的发散图是共同的,即原始的 I_γ 是共同的,所以递归的出发点是共同的,从而

$O_\gamma = \tilde{O}_\gamma$，于是(5.32)，(5.33)成立。证毕

$\overline{R}_\Gamma$ 又可写成(对比(5.40)和 $O_\gamma = -t^\gamma \overline{R}_\gamma$)：

$$\begin{aligned}
\overline{R}_\Gamma &= I_\Gamma + \sum_{\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}} I_{\Gamma/\{\gamma_1,\cdots,\gamma_c\}} \prod_{\tau=1}^{c} \left(\sum_{T_\tau}^{\gamma_\tau满} \prod_{\lambda\in T_\tau} (-t^\lambda) I_{\gamma_\tau} \right) \\
&= I_\Gamma + \sum_{U}^{不含空集} \prod_{\lambda\in U} (-t^\lambda) I_\Gamma (U 不含 \Gamma) \\
&= \sum_{U}^{正常} \prod_{\lambda\in U} (-t^\lambda) I_\Gamma (U 包括空集,但不含 \Gamma)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

R_Γ 又可写成(自(5.43))：

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma)\overline{R}_\Gamma = \sum_{U}^{全部} \prod_{\lambda\in U} (-t^\lambda) I_\Gamma \tag{5.44}$$

($\sum_{U}^{全部}$ 包括满集、正常集、空集，或者说，U 包括满林、正常林、空林)

说明一下：

1. 若 Γ 不是一个重正化部分(即子图都缩成一点后，就成了树图，没有新的与 Γ 对应的骨架发散)，则所有的 Γ 林都是正常林：

$$R_\Gamma = \overline{R}_\Gamma = \sum_{U}^{正常} \prod_{\lambda\in U} (-t^\lambda) I_\Gamma = \sum_{U}^{全部} \prod_{\lambda\in U} (-t^\lambda) I_\Gamma$$

2. 若 Γ 是一个重正化部分(有与 Γ 对应的骨架发散)，则

$$\begin{aligned}
R_\Gamma &= (1 - t^\Gamma)\overline{R}_\Gamma = \sum_{U}^{正常} \prod_{\lambda\in U} (-t^\lambda) I_\Gamma - t^\Gamma \sum_{U}^{正常} \prod_{\lambda\in U} (-t^\lambda) I_\Gamma \\
&= \sum_{U}^{全部} \prod_{\lambda\in U} (-t^\lambda) I_\Gamma
\end{aligned}$$

所以，R_Γ 一般可以写成(5.44)，而不必写成(5.18)，(5.19)，(5.20)的递归形式。$\sum_{U}^{全部}$ 包括满集、正常集、空集(满林、正常林、空林)。

现在再回到图 5.1 的含有交缠无穷大的电子自能图。

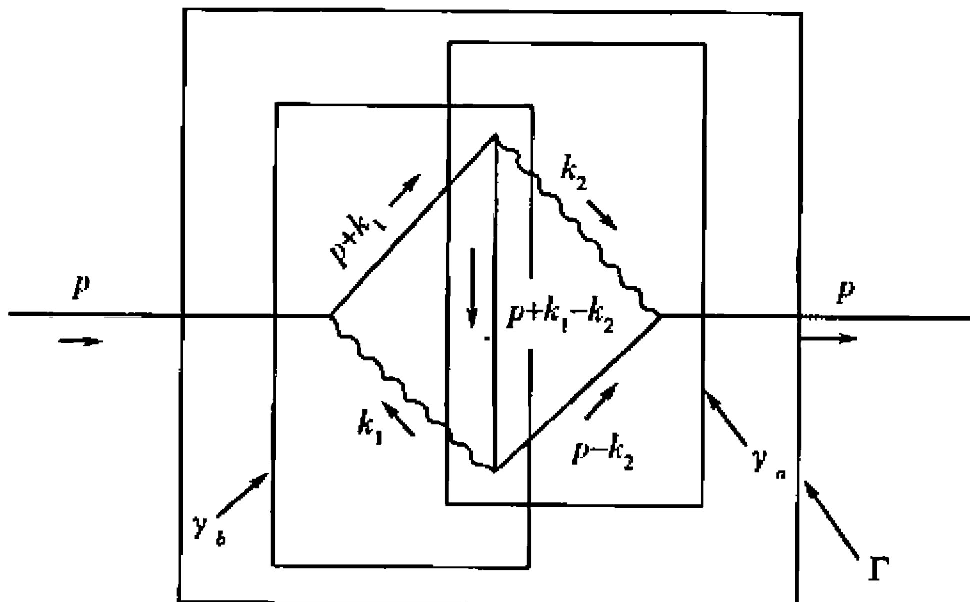


图 5.8

根据(5.43)，$\overline{R}_\Gamma$ 应该是

$$\overline{R}_\Gamma = I_\Gamma + \prod_{\lambda \subset \gamma_a}(-t^\lambda)I_\Gamma + \prod_{\lambda \subset \gamma_b}(-t^\lambda)I_\Gamma = I_\Gamma - t^{\gamma_a}I_\Gamma - t^{\gamma_b}I_\Gamma = (1 - t^{\gamma_a} - t^{\gamma_b})I_\Gamma$$

$$\therefore \qquad R_\Gamma = (1 - t^\Gamma)(1 + t^{\gamma_a} - t^{\gamma_b})I_\Gamma$$

这样就回答了图5.1提出的如何去掉交缠无穷大的问题。对于图5.1这个具体例子，可以先去掉两个交缠顶角图 γ_a、γ_b 的发散(见图5.8)，然后再去掉 Γ 的整体(骨架)发散。

去掉顶角发散的减除项必须保证规范不变性。例如在费米子电动力学中，要满足 Ward 等式，以及 $Z_1 = Z_2$。在第八章我们将说明维数正常化给出的减除项不破坏一般规范理论的规范不变性。

Weinberg 定理

以上我们给出了逐级把发散去掉的规则。可是，为什么按这个规则逐级去发散后，得到的 R_Γ 给出的积分 J_Γ 为有限呢(见(5.3)式)？我们用 Weinberg 定理来回答这个问题。

Weinberg 定理是说：

如果满足

1. Γ 图的整体的 $D(\Gamma) < 0$，

2. 每个可能的子图 γ 的 $D(\gamma) < 0$，则 Γ 的 Feynman 积分是收敛的。

现在举如下的一个两顶点 Γ 的例子(图5.9)：

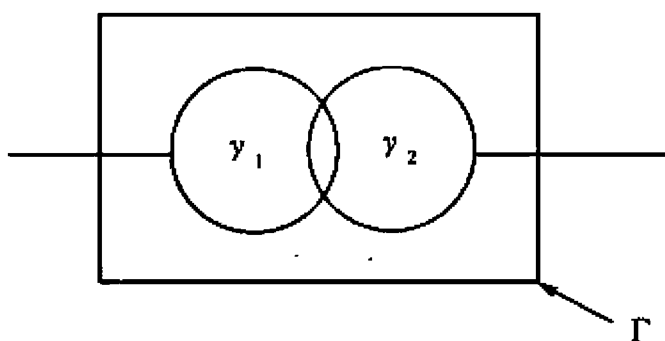


图 5.9

如果 γ_1, γ_2 的发散已经用某种办法减除过，成为收敛的，则减除后 $D(\gamma_1) < 0, D(\gamma_2) < 0$。于是，讨论 Γ 的收敛问题时就不必再去顾虑 γ_1 和 γ_2 的发散，只要看 $D(\Gamma)$ 就够了(由于 Weinberg 定理)：

若 $D(\Gamma) \geq 0$，就须在 Γ 这一级再作减除；

若 $D(\Gamma) < 0$，就无须再在这一级作减除。

从 Weinberg 定理看到，如果用 Taylor 展开法来减除，则 t^{γ_1}(或 t^{γ_2})只需微分到 $D(\gamma_1)$(或 $D(\gamma_2)$)次，t^Γ 只需微分到 $D(\Gamma)$ 次，就能保证收敛。方便的是，$D(\Gamma)$ 与 γ_1、γ_2 子图的有无和有多少个无关，只与外线数目有关。

Γ 如果是更大的图中的一个子图，也可以依此类推，先作 $D(\Gamma)$ 次微分的减除，使 Γ 收敛，…，然后再把这更大的图按其表观发散度作减除。从而可见，前面一节给出的递归的减除办法，确是可保证整个连接图的收敛。

这里不准备给出 Weinberg 定理的证明，只准备用带有交缠无穷大的例子来说明一下证明的基本思路(非交缠的情况比较简单，不必再专门讨论)。

仍以图5.8的交缠无穷大的 Γ 图为例，并着重考察 $k \to \infty$ 时的行为：

积分 $\sim \frac{1}{p+k_1} \cdot \frac{1}{p+k_1-k_2} \cdot \frac{1}{p-k_2} \cdot \frac{1}{k_1^2} \cdot \frac{1}{k_2^2} \mathrm{d}^4 k_1 \mathrm{d}^4 k_2$

把 k_1, k_2 分成几个区域(图 5.10 中用 k_1, k_2 两维来代表 k_1^4, k_2^4 八维空间):

k_1 小的区域,积分 $\sim \int_{有限} \mathrm{d}^4 k_1 \int \frac{\mathrm{d}^4 k_2}{k_2^4}, D = 0$

k_2 小的区域,积分 $\sim \int_{有限} \mathrm{d}^4 k_2 \int \frac{\mathrm{d} k_1}{k_1^4}, D = 0$

$k_1 - k_2$ 小的区域,积分 $\sim \int_{有限} \mathrm{d}^4 (k_1 - k_2) \int \frac{\mathrm{d}^4 k_1}{k_1^6}, D = -2$

k_1, k_2 都不小,积分 $\sim \int \frac{\mathrm{d}^4 k_1 \mathrm{d}^4 k_2}{k_1, k_2 \text{ 七次幂}}, D = 1$

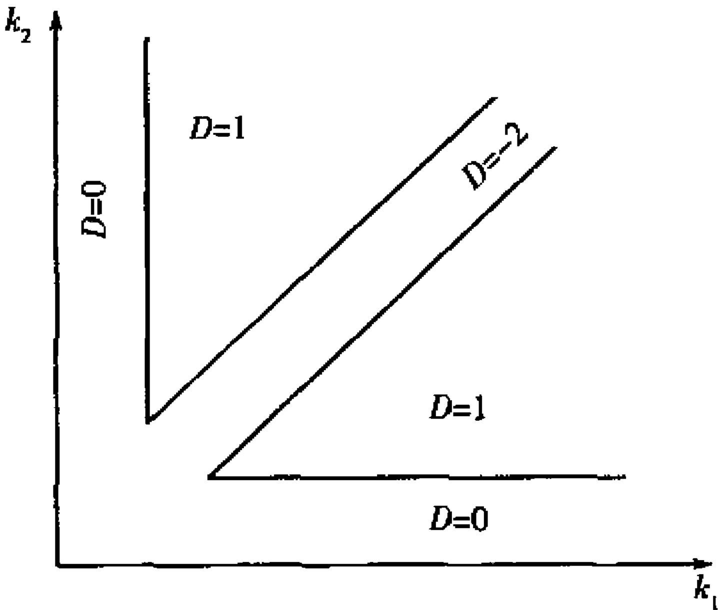


图 5.10

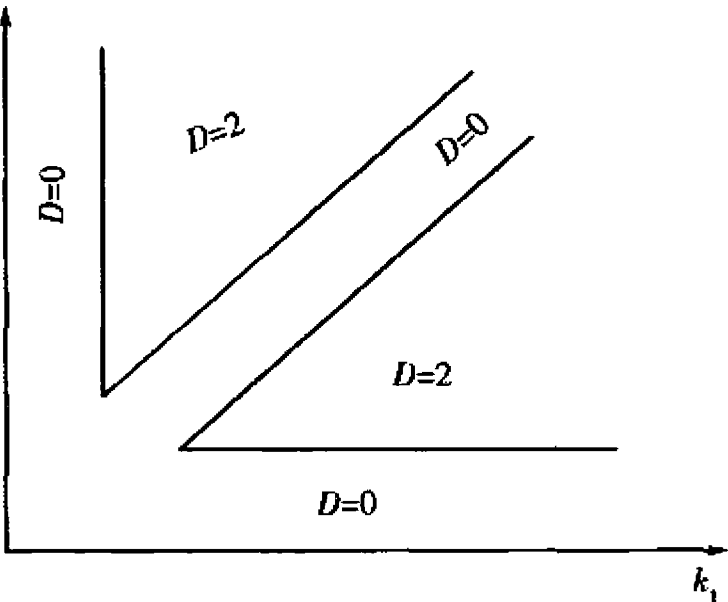


图 5.11

图 5.10 中两个 $D=0$ 的区域分别与 γ_a, γ_b 的发散有关,只需把 γ_a, γ_b 的发散减除掉,就可以消去两个 $D=0$ 区域的发散。这对应于 Weinberg 定理的第二个条件。推广到更一般的情况,积分变量有 m 个:$k_1, k_2, \cdots, k_m$。可用 m 维的空间来代表 $k_1^4, k_2^4, \cdots, k_m^4$ 的 $4m$ 维空间。于是,子图的发散总是和某一个方向的(例如 k_1 方向,k_2 方向,…,以及其他的方向,如 $k_i \pm k_j = 0$ 方向,$k_a \pm k_b \pm k_c = 0$ 方向等)无限长的柱形区域中的积分有关(柱的半径有限)。在这种情况,Weinberg 定理的第二个条件就是要求减除掉这些无限长的柱形区域中的积分的发散。

然后,剩下的是 $D = D(\Gamma)$ 区域,这个区域中积分的发散度是 $D(\Gamma)$。例如在图 5.10 中,$D = D(\Gamma)$ 区域就是 $D=1$ 区域。在这个区域中,只需数一下幂次,就可以知道整体(骨架)发散在用 Taylor 展开减除方式时要微分几次(这时,整体(骨架)发散已归结为某一个 $d^4 k_i$ 积分的发散),与 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ 等子图的 $D(\gamma_i)$ 不相干。这对应于 Weinberg 定理的第一个条件。

所以,满足了第一、第二条件,各个区域的积分的发散就都消去了,终于得到不发散的结果,这就是 Weinberg 定理的实质性内容。

从上面的讨论可以看到,Weinberg 定理只要求把各个积分区域的发散去掉,但对于如何去掉则并没有什么限制。所以 Weinberg 定理对于我们将要采用的维数正常化的去发

散办法也是适用的。

在图 5.10 中，$D=-2$ 区域是不发散的。与此对照，图 5.4 的 γ_1 的情况有所不同（见(5.27)和图 5.11）：

$$\text{积分} \sim \frac{1}{(p+k+k_1)^2}\cdot\frac{1}{(k_1-k_1')^2}\cdot\frac{1}{(k_1')^2}\mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_1'$$

$$k_1\text{ 小的区域，积分} \sim \int_{\text{有限}}\mathrm{d}^4k_1\int\frac{\mathrm{d}^4k_1'}{k_1'^4},D=0$$

$$k_1'\text{ 小的区域，积分} \sim \int_{\text{有限}}\mathrm{d}^4k_1'\int\frac{\mathrm{d}^4k_1}{k_1^4},D=0$$

$$k_1-k_1'\text{ 小的区域，积分} \sim \int_{\text{有限}}\mathrm{d}^4(k_1-k_1')\int\frac{\mathrm{d}^4k_1}{k_1^4},D=0$$

$$k_1,k_1'\text{ 都不小，积分} \sim \int\frac{\mathrm{d}^4k_1\mathrm{d}^4k_1'}{k_1,k_1'\text{ 六次幂}},D=2$$

可看到图 5.11 与图 5.10 不同，这里有三个方向是 $D=0$，分别与 $\gamma_{1a},\gamma_{1b},\gamma_{1c}$ 的发散有关。所以需要把 $\gamma_{1a},\gamma_{1b},\gamma_{1c}$ 的发散都消去，才能把三个 $D=0$ 区域的发散去掉，才能满足 Weinberg 定理的第二个条件。

§5-3 抵消项与加法重正化

上一节讨论了发散的减除，但减除的方式决不能是随心所欲的。现在我们就要在 S 矩阵理论的框架里，把抵消项合理地引入，使得发散的减除成为 S 矩阵理论里面的一个合乎逻辑的组成部分。

我们来看定域场微扰论的 S 矩阵元，它无非是

$$\langle a\mid T\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2)\cdots\mathscr{L}_I(x_n)\mid b\rangle \tag{5.45}$$

一类的编时乘积矩阵元的线性和，其中 $\mathscr{L}_I(x)$ 是相互作用拉氏量。

但是，在 $x_i=x_j$ 时，编时乘积

$$T\mathscr{L}_I(x_i)\mathscr{L}_I(x_j)\qquad(x_i=x_j)$$

是没有确定的定义的，有一定的任意性。

那么，怎样表达出这个任意性呢？我们知道，广义函数论中有一条定理：

定理：

$$\text{如果}\quad f(x)\begin{cases}=0 & \text{当 } x\neq 0\\ \neq 0 & \text{当 } x=0\end{cases} \tag{5.46}$$

则 $f(x)$ 一定可写成

$$f(x)=a_0\delta(x)+a_1\delta'(x)+a_2\delta''(x)+\cdots+a_k\delta^k(x) \tag{5.47}$$

其中 k 是有限的正整数，$\delta^k(x)$ 是 $\delta(x)$ 的 k 次微商。

由此可见，$T\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2)\cdots\mathscr{L}_I(x_n)$ 的不确定性可表达为（这里把上述定理推广到有多个变数的情况）：

$$\Lambda_n(x_1,\cdots,x_n)=z\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x_i}\cdots\right)\delta^4(x_1-x_2)\delta^4(x_1-x_3)\cdots\delta^4(x_1-x_n) \tag{5.48}$$

这里的$z\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x_i}\cdots\right)$代表$\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j},\cdots$的一个多项式。由于$\delta(x)$的 Fourier 变换是常数，$\delta'(x)$的 Fourier 变换是$p,\cdots,\delta^k(x)$的 Fourier 变换是$p^k$，所以$\Lambda_n(x_1,\cdots,x_n)$的 Fourier 变换是$p_1,\cdots,p_n$的多项式（这来自上述广义函数定理，$k$是有限正整数）。

恰好，前节讲的 Taylor 展开减除发散的方法是减除$p_1,\cdots,p_n$的多项式。后面要讲的维数正常化的减除发散的方法也是减除$p_1,\cdots,p_n$的多项式（见第七章的排除有害极点的讨论）。所以，可以把发散的出现看作是上述不确定性的表现。只要在拉氏量中引入(5.48)形式的抵消项（这是上述不确定性所允许的），就可以一方面把不确定的东西确定下来，一方面抵消发散，得到有限的不发散的结果。

量子电动力学的例子

以下我们用量子电动力学的例子说明如何写出抵消项和抵消项如何抵消发散。

一般量子场论书中都讨论过，$\frac{\hbar}{2}$自旋粒子的量子电动力学有三种原始发散图，与此相应，1*PI* 发散图也有三类：

1. 图 5.12：$D=0$，只需减除p的 0 次项。与(5.48)对照，n级微扰应有如下抵消项：

$$iB_n\bar{\psi}(x_j)\hat{A}(x_k)\psi(x_j)\delta^4(x_1-x_i)\delta^4(x_1-x_k)\delta^4(x_1-x_j)\cdots\delta_4(x_1-x_n) \quad (5\ 49)$$

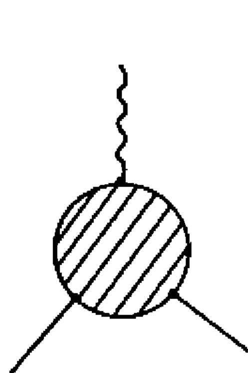


图 5.12



图 5.13

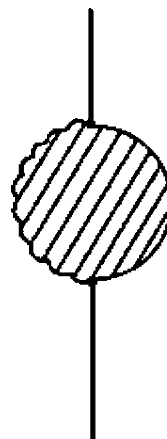


图 5.14

2. 图 5.13：$D=2$，要减除p的 0 次项，2 次项，所以与(5.48)对照，n级微扰应有如下抵消项（由于协变性，出不了p一次项，所以没有一次微商项）：

$$A_\mu(x_i)\left(\left\{C_n\delta_{\mu\nu}+D_n\frac{\partial}{\partial(x_i)_\mu}\frac{\partial}{\partial(x_j)_\nu}+E_n\delta_{\mu\nu}\frac{\partial}{(\partial x_i)_\sigma}\frac{\partial}{(\partial x_j)_\sigma}\right\}\right.$$

$$\left.\cdot\,\delta^4(x_1-x_i)\delta^4(x_1-x_j)\cdots\delta^4(x_1-x_n)\right)A_\nu(x_j) \quad (5.50)$$

3. 图 5.14：$D=1$，要减除p的 0 次项，1 次项。与(5.48)对照，n级微扰应有如下抵消项：

$$\bar{\psi}(x_i)\left(\left\{F_n+G_n\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\partial}}{\partial x_i}-\frac{\hat{\partial}}{\partial x_j}\right)\right\}\delta^4(x_1-x_i)\delta^4(x_1-x_j)\cdots\delta^4(x_1-x_n)\right)\psi(x_j)$$

(5.51)

可以把$\mathscr{L}_I(x)$加上抵消项，重新定义$\mathscr{L}_I^{重正}(x)$如下：

$$\mathscr{L}_I^{重正}(x)=\mathscr{L}_I(x)+\sum_{n\geqslant 2}\int\Lambda_n(x,x_1,\cdots,x_{n-1})\,dx_1\cdots dx_{n-1} \quad (5.52)$$

这里 Λ_n 就是上述 $n=2, n=3, n=\cdots$ 各级微扰抵消项之和，只是 Λ_n 已对 $x, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 对称化。于是得到(5.17)～(5.20)，(5.43)，(5.44)的减除。为了说明这点，可以这样来看：

在 $S = T\exp\left(i\int \mathscr{L}_I(x)\mathrm{d}^4x\right)$ 的展开中，n 次积分

$$\int S_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n$$

中的 $S_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是

$$S_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = i^n T(\mathscr{L}_I(x_1)\cdots\mathscr{L}_I(x_n))$$

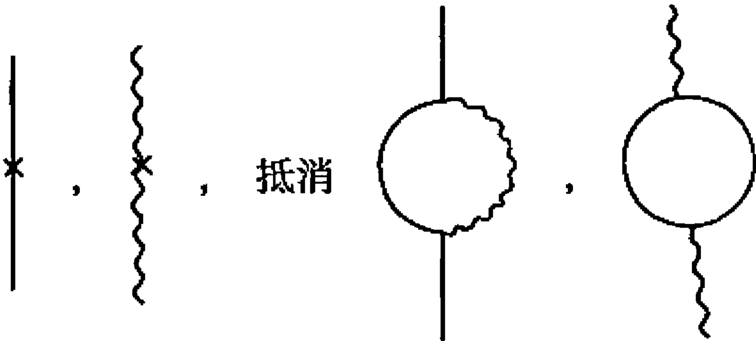
现在，把 $\mathscr{L}_I(x)$ 换成 $\mathscr{L}_I^{重正}(x)$，重新定义

$$S^{重正} = T_{\mathrm{EXP}}\left(i\int \mathscr{L}_I^{重正}(x)\mathrm{d}^4x\right) \tag{5.53}$$

在 $S^{重正}$ 的展开中，$S_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就要依次换成(图中“×”代表抵消单圈发散，“#”抵消双圈发散)

$$\frac{1}{2!}S_2^{重正}(x_1, x_2) = \frac{i^2}{2!}T(\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2)) + i\Lambda_2(x_1, x_2) \tag{5.54}$$

——$\Lambda_2(x_1, x_2)$ 提供



$$\frac{1}{3!}S_3^{重正}(x_1, x_2, x_3) = \frac{i^3}{3!}T(\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2)\mathscr{L}_I(x_3))$$
$$+\frac{i^2}{2!}T(\mathscr{L}_I(x_1)\Lambda_2(x_2, x_3)) + 轮换项 + i\Lambda_3(x_1, x_2, x_3) \tag{5.55}$$

——$T(\mathscr{L}_I(x_1)\Lambda_2(x_2, x_3))$ + 轮换项提供



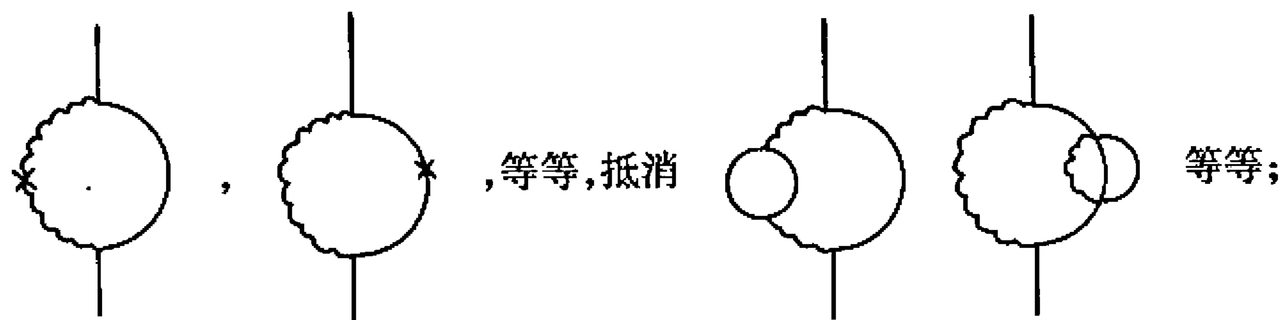
——$\Lambda_3(x_1, x_2, x_3)$ 提供



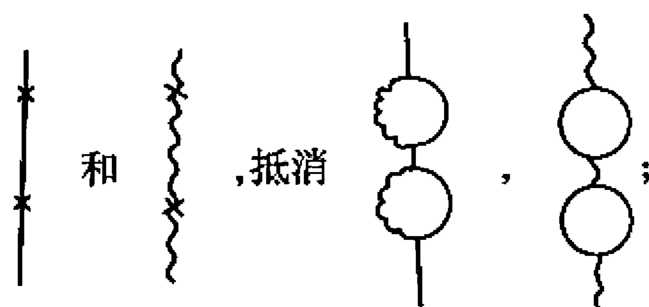
$$\frac{1}{4!}S_4^{重正}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{i^4}{4!}T(\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_1(x_2)\mathscr{L}_I(x_3)\mathscr{L}_I(x_4))$$

$$+\frac{i^3}{3!}T(\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2)\Lambda_2(x_3,x_4))+\text{轮换项}$$
$$+\frac{i^2}{2!}T(\Lambda_2(x_1,x_2)\Lambda_2(x_3,x_4))+\text{轮换项}$$
$$+\frac{i^2}{2!}T(\mathscr{L}_I(x_1)\Lambda_3(x_2,x_3,x_4))+\text{轮换项}$$
$$+i\Lambda_4(x_1,x_2,x_3,x_4) \tag{5.56}$$

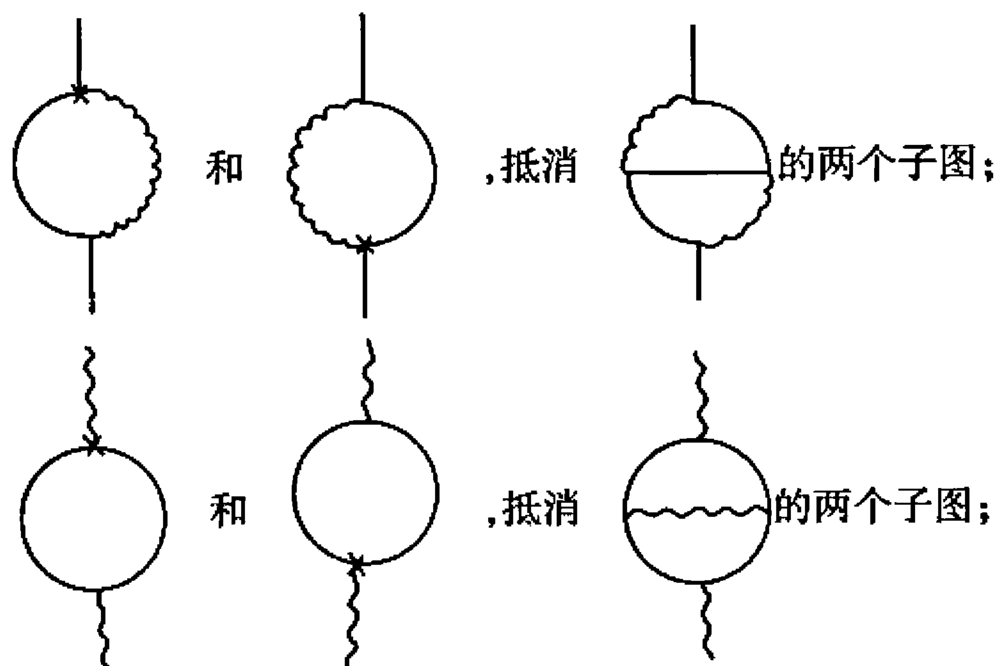
——$T(\mathscr{L}_I(x_1)\mathscr{L}_I(x_2)\Lambda_2(x_3,x_4))$ + 轮换项提供

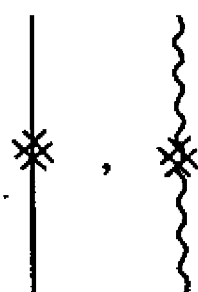


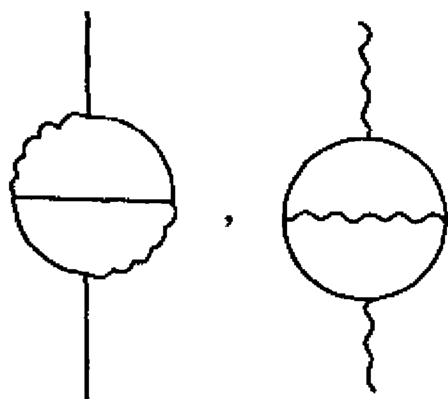
——$T(\Lambda_2(x_1,x_2)\Lambda_2(x_3,x_4))$ + 转换项提供



——$T(\mathscr{L}_I(x_1)\Lambda_3(x_2,x_3,x_4))$ + 轮换项提供



——$\Lambda_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$提供  ,抵消

 的整体(骨架)发散

随着微扰次数的升高，$\Lambda_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$，$\Lambda_6(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$，…又依次抵消5次、6次图的整体(骨架)发散。

由此看到，经过(5.52)的$\mathscr{L}_I^{重正}(x)$的重新定义，S矩阵元中的发散可以恰好消去。而且消去的方式和(5.17)~(5.20)，(5.43)，(5.44)的方式一样，也是$\Lambda_2(x_1,x_2)$先消去低次的发散，然后$\Lambda_3(x_1,x_2,x_3)$，$\Lambda_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$，$\Lambda_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$，…逐次一级一级消去高次图的发散。高次图的发散包括高次图的骨架发散以及高次顶角图的原始发散，后者例如



图 5.15

现在再回到(5.52)。把(5.49)，(5.50)，(5.51)代入(5.52)并且积分，δ 函数都消去。整理后得到(注意以下的讨论都用协变规范)：

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathscr{L}_I^{重正}(x) = & ie(Z_1-1)\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) \\
& -(Z_2-1)\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}+m\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)+Z_2\delta m\bar{\psi}(x)\psi(x) \\
& -(Z_3-1)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}-\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right)
\end{aligned} \tag{5.57}
$$

其中 $\delta m = m - m_0$。

把(5.57)与(5.49)，(5.50)，(5.51)对比，看到：

1. $-(Z_2-1)m+Z_2\delta m = -Z_2m_0+m$ 相当于(5.51)中 F_n 的求和。

2. $-(Z_2-1)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu}$相当于(5.51)中的微分项 $\bar{\psi}(x_i)G_n\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\partial}}{\partial x_i}-\frac{\hat{\partial}}{\partial x_j}\right)\cdot\psi(x_j)\delta^4(x_1-x_i)\cdots$的求和。

3. (Z_1-1)相当于(5.49)中的 B_n 求和。由于规范不变性，有 Ward 等式，$Z_1=Z_2$。关于重正化与规范不变性的关系，在第八章有较详细的讨论。

4. 最后，$(Z_3-1)\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)^2\right)$相当于(5.50)对 n 求和，而且 C_n 求和的结果为零，D_n 的求和与 E_n 的求和大小相等，正负相反。

显然上述1,2,3都是简单的对应,4则增加了限制,这种限制也是从规范不变性来的,说明如下:

根据(3.86)~(3.88)的讨论,$W[j=0]$可以写成(取 $\hbar=c=1$):

$$W[j=0]=\int d(A_\mu)d(\bar{\psi})d(\psi)\,\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|\prod_{x,a}\delta(C^a[A]-h^a-\varepsilon^a)e^{i\int d^4x\mathscr{L}(x)} \tag{5.58}$$

由于规范不变性,(5.58)右方积分的结果与 ε^a 和 h^a 无关。ε^a,h^a 是 x 的任意函数。

于是,仿照(3.89)~(3.91),乘上 $e^{-i\int 1/2(\varepsilon^a(x))^2d^4x}$,再乘上 $d(\varepsilon^a(x))$ 作泛函积分,则自(5.58)又得到(只可能相差一个无关紧要的常数因子):

$$\begin{aligned}W[j=0]&=\int d(A_\mu)d(\bar{\psi})d(\psi)\\&\quad\cdot\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|e^{i\int d^4x(\mathscr{L}(x)-1/2(C^a[A])^2+C^a[A]h^a-1/2(h^a)^2)}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1\cdots dx_n\left(C^a\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right]h^a-\frac{1}{2}(h^a)^2\right)_{x_1}\\&\quad\cdots\left(C^a\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right]h^a-\frac{1}{2}(h^a)^2\right)_{x_n}\cdot\int d(A_\mu)d(\bar{\psi})d(\psi)\\&\quad\cdot\mathrm{Det}\left|\frac{\delta C^a}{\delta\theta^b}\right|e^{i\int d^4x(\mathscr{L}(x)-1/2(C^a[A])^2+j_\mu A_\mu+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta)}\Big|_{j=\eta=\bar{\eta}=0}\end{aligned} \tag{5.59}$$

既然(5.59)的积分结果与 h^a 无关,所以(5.59)右方的展开中除 $n=0$ 一项外,其余各项(都含有 h^a)都应该是0。这是规范不变性使得(5.58)和(5.59)与 h^a 无关的必然后果。

我们取最有普遍性的协变规范 ξ 规范(见(2.66)),

$$C^a[A]h^a=\xi^{1/2}\partial_\mu A_\mu^a h^a \tag{5.60}$$

由于现在讨论的是量子电动力学,不需要 a 指标,所以以下把 a 指标略去。

再来看(5.59)的右方。把 $\mathrm{Det}\left|\frac{\delta c^a}{\delta\theta^b}\right|$ 搬到指数上去,引入F-P场;把 $\mathscr{L}_I(x)$ 从 $\mathscr{L}(x)$ 中分出来,作微扰展开;把 $d(A_\mu)d(\bar{\psi})d(\psi)$ 积分积出,右方指数上出现传播子。于是一切都和以前计算微扰的方法一样。

由于(5.60)取的是 ξ 规范,所以

$$C\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]=\xi^{1/2}\partial_{x_\mu}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu(x)}\right) \tag{5.61}$$

于是:

1. h 一次项 $C\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(x)}\right]h(x)$ 作用在 $W[j]$ 上出现 j,从而随 $j=0$ 而也等于0。

2. h 二次项的最低次微扰部分是(去真空起伏):

$$\begin{aligned}&i\int d^4x\left(-\frac{1}{2}h(x)h(x)\right)+\frac{i^2}{2}\int d^4xd^4y(\xi^{1/2}\partial_\mu A_\mu(x))(\xi^{1/2}\partial_\nu A_\nu(y))h(x)h(y)\\&=\frac{-i}{2}\int d^4xh(x)\cdot h(x)+\frac{i^2}{2}\int d^4xd^4y\xi k_\mu k_\nu\frac{e^{ik(x-y)}}{(2\pi)^4}d^4k\left\{\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}\right.\right.\\&\quad\left.\left.-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\right\}h(x)h(y)=\frac{-i}{2}\int d^4xh(x)h(x)+\frac{i^2}{2}\int d^4xd^4y\xi\frac{e^{ik(x-y)}}{(2\pi)^4}\end{aligned}$$

$$\cdot\, \mathrm{d}^4k \frac{-i}{k^2}\left(k^2 - \frac{\xi-1}{\xi}k^2\right)h(x)h(y) = \frac{-i}{2}\int \mathrm{d}^4x h(x)h(x) + \frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x h(x)h(x)$$

$$= 0$$

也等于0。

3. h 二次项的其余部分都是高次图的贡献，如图：

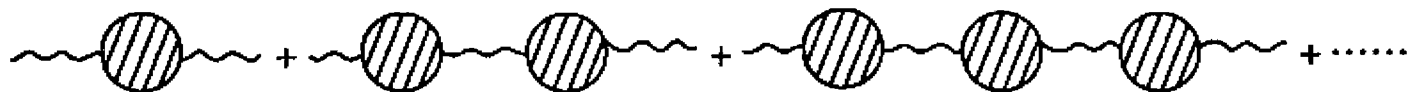


图 5.16

要求

$$0 = \frac{i^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\left(\xi^{1/2}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\xi^{1/2}\frac{\partial}{\partial y_\nu}D'(x-y)\right)h(x)h(y)$$

$D'(x-y)$ 用图 5.16 来代表

$$= \frac{i^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\cdot\xi\cdot\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)k_\mu k_\nu}\left(\delta_{\mu\sigma} - \frac{\xi-1}{\xi}\frac{k_\mu k_\sigma}{k^2}\right)$$

$$\Pi_{\sigma\tau}(k)\left(\delta_{\tau\nu} - \frac{\xi-1}{\xi}\frac{k_\tau k_\nu}{k^2}\right)\cdot h(x)h(y)$$

($\Pi_{\sigma\tau}(k)$ 包括 + + + …)

$$= \frac{i^2}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\xi\left(\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)}\frac{k_\sigma}{\xi}\Pi_{\sigma\tau}(k)\frac{k_\tau}{\xi}\right)h(x)h(y) \tag{5.62}$$

然而 $h(x)$ 是 x 的一个任意函数，所以要求

$$k_\sigma\Pi_{\sigma\tau}(k)k_\tau = 0 \tag{5.63}$$

由于协变性，$\pi_{\sigma\tau}(k)$ 应取如下形式：

$$\Pi_{\sigma\tau}(k) = A(k^2)\delta_{\sigma\tau}k^2 + B(k^2)k_\sigma k_\tau \tag{5.64}$$

代入(5.63)，立刻解出

$$A(k^2) = -B(k^2) \tag{5.65}$$

所以(5.64)简化为

$$\Pi_{\sigma\tau}(k) = (\delta_{\sigma\tau}k^2 - k_\sigma k_\tau)\Pi(k) \tag{5.66}$$

这 $\pi(k^2)$ 包括圈图的发散部分（对数发散），换到 x 表象，就可看到(5.57)中最后一行（与(5.50)对应的部分）作为抵消项应取$\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)^2\right)$形式。正如前述，这是规范不变性的结果。

§5-4　加法重正化与乘法重正化的等价例一——量子电动力学

$$\mathscr{L}(x) = ie\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) - \left((\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}\right)^2\right)\quad (\hat{A} = \gamma_\mu A_\mu) \tag{5.67}$$

把(5.67)与(5.57)加到一起,定义 $\mathscr{L}^0(x)$:

$$\mathscr{L}^0(x) = \mathscr{L}(x) + \Delta\mathscr{L}_I^{\text{重正}}(x) = ieZ_1\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) - Z_2\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} + m_0\bar{\psi}(x)\psi(x)\right) - \frac{1}{2}Z_3\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right) \tag{5.68}$$

再定义

$$\psi^0 = Z_2^{1/2}\psi, \bar{\psi}^0 = Z_2^{1/2}\bar{\psi}, A_\mu^0 = Z_3^{1/2}A_\mu \tag{5.69}$$

则

$$\mathscr{L}^0(x) = ieZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}\bar{\psi}^0(x)\hat{A}^0(x)\psi^0(x) - \left(\bar{\psi}^0(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi^0(x)}{\partial x_\mu} + m_0\bar{\psi}^0(x)\psi^0(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu^0(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu^0(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu^0(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right) \tag{5.70}$$

又定义

$$e_0 = eZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2} \tag{5.71}$$

则

$$\mathscr{L}^0(x) = ie_0\bar{\psi}^0(x)\hat{A}^0(x)\psi^0(x) - \left(\bar{\psi}^0(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi^0(x)}{\partial x_\mu} + m_0\bar{\psi}^0(x)\psi^0(x)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu^0(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu^0(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu^0(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right) \tag{5.72}$$

对比(5.68)和(5.72),已经初步看到,(5.68)的加法重正化与(5.72)乘上 Z 的乘法重正化等价。

以下就来证明量子电动力学的乘法重正化中的三个重要关系式(横代表横向):

$$\left.\begin{aligned} S_F'(p,m_0,e_0) &= Z_2\,\underline{S}_F'(p,m,e) \\ D_{F\mu\nu}'^{\text{横}}(k,m_0,e_0) &= Z_3\,\underline{D}_{F\mu\nu}'^{\text{横}}(k,m,e) \\ \Gamma_\mu(p,q,m_0,e_0) &= \frac{1}{Z_1}\underline{\Gamma}_\mu(p,q,m,e) \end{aligned}\right\} \tag{5.73}$$

其中 $S_F'(p,m_0,e_0)$,$D_{F\mu\nu}'^{\text{横}}(k,m_0,e_0)$和 $\Gamma_\mu(p,q,m_0,e_0)$是用(我们采用了 ξ 规范)

$$W^{\text{无减除}}[j] = \int d(A_\mu^0)d(\bar{\psi}_\mu^0)d(\psi_\mu^0)\cdot \exp i\left[\int\mathscr{L}(A^0,\psi^0,\bar{\psi}^0,m_0,e_0) - \frac{\xi_0}{2}(\partial_\mu A_\mu^0)^2 + j_\mu^0A_\mu^0 + \bar{\eta}^0\psi^0 + \bar{\psi}^0\eta^0\right] \tag{5.74}$$

算出来的未经减除的、发散的完全传播函数和完全顶角函数(因是量子电动力学,不必引入 $F-P$ 场)。而$\underline{S}_F'(p,m,e)$,$\underline{D}_{\mu\nu}'^{\text{横}}(k,m,e)$和$\underline{\Gamma}_\mu(p,q,m,e)$则是用(根据(5.68)~(5.72))

$$W[j] = \int d(A_\mu)d(\bar{\psi})d(\psi)\cdot \exp i\left[\int\mathscr{L}(A,\psi,\bar{\psi},m,e) + \Delta\mathscr{L}_I^{\text{重正}}(x) - \frac{\xi}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2 + j_\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right] \tag{5.75}$$

$$\xi_0 = Z_3^{-1}\xi,\quad j_\mu^0 = Z_3^{-1/2} j_\mu,$$
$$\overline{\eta}^0 = Z_2^{-1/2}\overline{\eta},\quad \eta^0 = Z_2^{-1/2}\eta \tag{5.76}$$

计算出来的经过减除的、到 n 圈为止不发散的完全传播函数和完全顶角函数。注意：m 和 e 是重正化的、物理的质量和电荷，是不发散的；而 m_0 和 e_0 则是发散的，称为裸的质量和电荷。裸是没有屏蔽的意思。

(5.73)的证明　证明分四步

1. 先写出 S_F', D_F', Γ_μ（用(5.74)）：

(ⅰ) $$S_F'(p,m_0,e_0) = \frac{-1}{\hat{p}-im_0} + \frac{-1}{\hat{p}-im_0}(-\Sigma')\frac{-1}{\hat{p}-im_0} + \cdots$$
$$= \frac{-1}{\hat{p}-im_0}\left(1-\frac{\Sigma'}{\hat{p}-im_0}\right)^{-1} = \frac{-1}{\hat{p}-im_0-\Sigma'(p,m_0,e_0)} \tag{5.77}$$

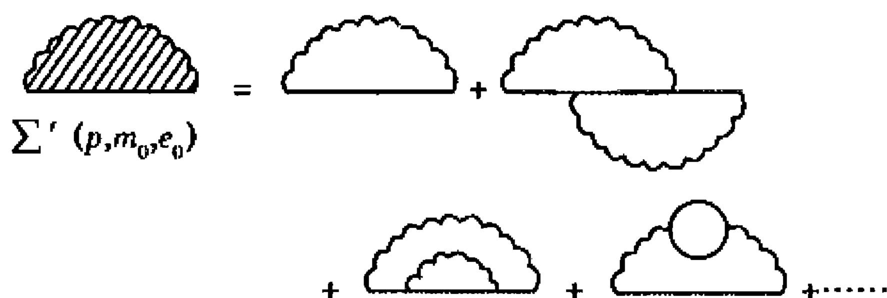


图　5.17

(ⅱ) $$D'_{F\mu\nu}(k,m_0,e_0) = D_{F\mu\nu}(k) + D_{F\mu\sigma}(k,\xi_0)(i\Pi'_{\sigma\rho})D'_{F\rho\nu}(k,m_0,e_0)$$

其中 $D_{F\mu\nu}(k,\xi_0) = \frac{-i}{k^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$，因为我们采用 ξ_0 规范（$\xi_0 = 1$ 是费曼规范，$\xi_0 = \infty$ 是朗道规范）。

另外，由于(5.66)，$\Pi'_{\mu\nu}$写成

$$\Pi'_{\mu\nu}(k,m_0,e_0) = (\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)\Pi'(k,m_0,e_0)$$

现在要解出 $D'_{F\mu\nu}$，令

$$D'_{F\mu\nu}(k,m_0,e_0) = A(k,m_0,e_0)\delta_{\mu\nu} + B(k,m_0,e_0)k_\mu k_\nu$$

代入，可解得

$$A(k,m_0,e_0) = \frac{-i}{k^2}\frac{1}{1-\Pi'(k,m_0,e_0)}$$

$$B(k,m_0,e_0) = \frac{i}{-k^2}\left(-\frac{1}{k^2}\right)\frac{1}{1-\Pi'(k,m_0,e_0)} - \frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi^0}\frac{1}{k^2}$$

所以

$$D'_{F\mu\nu}(k,m_0,e_0) = \frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{1-\Pi'(k,m_0,e_0)} - \frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{5.78}$$

由此看到，横波部分有重正化；纵波部分在 $D_{F\mu\nu}$ 和 $D'_{F\mu\nu}$ 都是 $-\frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$，所以**纵波部分不重正化**。原因在于

$$-\frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\cdot\Pi'_{\sigma\rho} = 0$$

$\Pi'_{\mu\nu}\ (k, m_0, e_0)$

图 5.18

注意这里的Π'是各种 1PI 图之和，和 5.16 图的链式和不同。前面（ⅰ）的Σ'也是各种 1PI 图之和。

（ⅲ）$\Gamma_\mu(p,q,m_0,e_0) = \gamma_\mu + \Lambda'_\mu(p,q,m_0,e_0)$ （5.79）

在(5.79)式中，$\Lambda'_\mu(p,q,m_0,e_0)$也是各种 1$PI$ 图之和：

e_0 e_0 e_0 e_0 e_0 e_0

$\Lambda_\mu(p,q,m_0,e_0)$

e_0 e_0 e_0 e_0 e_0 e_0

图 5.19

图中上面一个顶点没有 e_0 因子。

2. 再写出两个电荷顶点之间的传播子以及没有圈图修正的顶点函数（不过现在用的是(5.75)，即(5.67)的 $\mathscr{L}(x)$，再加上(5.57)的抵消项 $\Delta\mathscr{L}_I^{重正}(x)$，但不考虑圈图贡献。"重正"标记就是指明是用 $\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}^{重正}$算的，没有圈图）：

（i）两电荷顶点之间的费米子线

$$S_F^{重正}(p) = \frac{-1}{\hat{p}-im} + \frac{-1}{\hat{p}-im}(iZ_2\delta m - i(Z_2-1)(i\hat{p}+m))\frac{-1}{\hat{p}-im} + \cdots$$

$$= \frac{-1}{\hat{p}-im}\left(1 + \frac{iZ_2\delta m + (Z_2-1)(\hat{p}-im)}{\hat{p}-im}\right)^{-1} = \frac{1}{Z_2}\cdot\frac{-1}{\hat{p}-im_0} \tag{5.80}$$

（ii）两电荷顶点之间的光子线

$$D_{F\mu\nu}^{重正}(k) = D_{F\mu\nu}(k,\xi) + D_{F\mu\nu}(k,\xi)(-i(k^2\delta_{\sigma\rho} - k_\sigma k_\rho)(Z_3-1))D_{F\mu\nu}^{重正}(k)$$

其中 $D_{F\mu\nu}(k,\xi) = \frac{-i}{k^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$，因为我们用的是(5.75)，取的是重正化了的 ξ。

和(5.78)相仿，立刻解出

$$D_{F\mu\nu}^{重正}(k) = \frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{Z_3} - \frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{5.81}$$

同样看到纵波部分不受影响。

（iii）没有微扰修正的顶点函数：

$$Z_1 e\gamma_\mu \tag{5.82}$$

3. 1PI 图形的乘法重正化。

有两种写法来写 S 矩阵元。

第一种，从(5.74)出发来写 S 矩阵元。

有关的自由传播子和顶点是：

$$S_F(p)=\frac{-1}{\hat{p}-im_0}$$

$$D_{F\mu\nu}(k,\xi_0)=\frac{-i}{k^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)+\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$$

顶点：　　$e_0\gamma_\mu$

第二种，从(5.75)出发来写 S 矩阵元。

有关的自由传播子和顶点是：

$$S_F^{重正}(p)=\frac{1}{Z_2}\frac{-1}{\hat{p}-im_0}$$

$$D_{F\mu\gamma}^{重正}(k)=\frac{-i}{k^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{Z^3}+\frac{1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$$

$$=\frac{1}{Z_3}\frac{-i}{k^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)+\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]$$

顶点：　　$Z_1e\gamma_\mu$

(见(5.80)，(5.81)，(5.82)和利用 $\xi=Z_3\xi_0$)

在第二种写法中，如果把传播子中 Z_2 的和 Z_3 分摊移交给传播子两端的顶点，则第一，第二两种写法的传播子部分将会是完全一样的，只是顶点不同，一个是 e_0(第一种写法)，另一个是 $Z_1e(Z_2^{-1/2})^2(Z_3^{-1/2})$(第二种写法，$Z_2$、$Z_3$ 分摊移交给顶点以后)。但如果采用(5.71)的定义，$e_0=eZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}$，则两种写法包括顶点都是相同的了。当然，这里说的是每个顶点有两条费米子线，一条光子线的情况。若是有的顶点不是有两条费米子线，一条光子线，则两种写法就会有所不同。见下面的几个 $1PI$ 图：

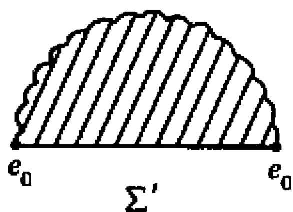


图 5.20

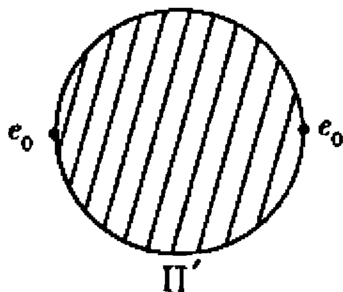


图 5.21

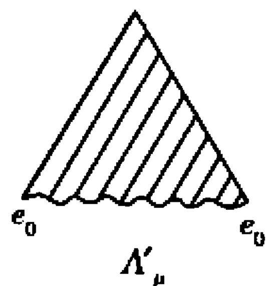


图 5.22

(i)图 5.20：两顶点各缺一条费米子线，所以第二种做法只比第一种做法少了两个 $Z_2^{-1/2}$ 因子。乘上两个 $Z_2^{-1/2}$ 因子，两种做法就相等。

$$Z_2^{-1}\Sigma^{重正}(p,m,e)=\Sigma'(p,m_0,e_0) \tag{5.83}$$

(ii)图 5.21：两顶点各缺一条光子线，所以第二种做法只比第一种做法少了两个 $Z_3^{-1/2}$ 因子。乘上两个 $Z_3^{-1/2}$ 因子，两种做法就相等了。

$$Z_3^{-1}\Pi^{重正}(p,m,e)=\Pi'(p,m_0,e_0) \tag{5.84}$$

(iii)图 5.22：两顶点各缺一条费米子线，一个顶点缺一条光子线和一个电荷。乘上两个 $Z_2^{-1/2}$，一个 $Z_3^{-1/2}$，和乘上相应的电荷，两种做法就相等了。

$$Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}e\Lambda_\mu^{重正}(p,q,m,e)=e_0\Lambda_\mu'(p,q,m_0,e_0)$$

或写成

$$\Lambda_\mu^{重正}(p,q,m,e) = Z_1\Lambda_\mu'(p,q,m_0,e_0) \tag{5.85}$$

4. 完全传播函数和完全顶角函数(用(5.75))

$$\begin{aligned}(\text{i})\,\underline{S}_F'(p,m,e) &= \frac{1}{Z_2}\frac{-1}{\hat{p}-im_0}+\frac{1}{Z_2}\frac{-1}{\hat{p}-im_0}\left(-\Sigma^{重正}(p,m,e)\right)\\ &\quad \frac{1}{Z_2}\frac{-1}{\hat{p}-im_0}+\cdots=\frac{1}{Z_2}\frac{-1}{\hat{p}-im_0}\left(1-\frac{\Sigma^{重正}(p,m,e)}{Z_2(\hat{p}-im_0)}\right)^{-1}\\ &= \frac{-1}{Z_2(\hat{p}-im_0)-\Sigma^{重正}(p,m,e)} \quad (\text{利用}(5.83))\\ &= \frac{1}{Z_2}\frac{-1}{(\hat{p}-im_0)-\Sigma'(p,m_0,e_0)}=\frac{1}{Z_2}S_F'(p,m_0,e_0)\end{aligned} \tag{5.86}$$

这就证明了(5.73)的第一式(最后一步利用了(5.77))。

再证明(5.86)是不发散的。我们把$\Sigma^{重正}(p,m,e)$中的发散部分分出来(表观发散度$D=1$):

$$\begin{aligned}\Sigma^{重正}(p,m,e) &= Z_2 i\delta m + \sum_n f(n)(\hat{p}-im) + \Sigma^c(p,m,e)\\ &= iZ_2(m-m_0) + (Z_2-1)(\hat{p}-im) + \Sigma^c(p,m,e)\end{aligned}$$

其中取：$Z_2 - 1 = \sum_n f(n)$ ($f(n)$ 是发散的)

则(5.86)的分母是：

$$\begin{aligned}Z_2(\hat{p}-im_0) - \Sigma^{重正}(p,m,e) &= \left(1+\sum_n f(n)\right)\hat{p} - Z_2 im_0 - iZ_2(m-m_0) - \sum_n f(n)\hat{p}\\ &\quad + (Z_2-1)im - \Sigma^c(p,m,e) = \hat{p} - im - \Sigma^c(p,m,e)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \underline{S}_F'(p,m,e) = \frac{-1}{\hat{p}-im-\Sigma^c(p,m,e)} \tag{5.87}$$

已去发散,因 $\sum^c(p,m,e)$已是不发散的。

(ii)

$$\begin{aligned}\underline{D}_{F\mu\nu}'(k,m,e) &= \frac{1}{Z_3}\frac{-i}{k^2}\left[\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)+\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\\ &\quad + \frac{1}{Z_3}\frac{-i}{k^2}\left[\left(\delta_{\mu\sigma}-\frac{k_\mu k_\sigma}{k^2}\right)+\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\sigma}{k^2}\right]\\ &\quad \cdot\left\{i(\delta_{\sigma\rho}k^2-k_\sigma k_\rho)\prod^{重正}(k,m,e)\right\}\underline{D}_{F\rho\nu}'(k,m,e)\end{aligned}$$

这里用到了(5.81)的 $D_{F\mu\nu}^{重正}(k)$和(5.76)的 $\xi=Z_3\xi_0$ · 和(5.78)相仿,可以解出

$$Z_3\,\underline{D}_{F\mu\nu}'(k,m,e) = \frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\prod^{重正'}(k,m,e)}{Z_3}}-\frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

$$\begin{aligned}\underline{D}_{F\mu\nu}'(k,m,e) &= \frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{Z_3-\prod^{重正}(k,m,e)}-\frac{i}{k^2}\frac{1}{Z_3\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\ &\quad -\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{Z_3}\frac{1}{1-\prod'(k,m_0e_0)}-\frac{1}{Z_3}\frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\ &= \frac{1}{Z_3}D_{F\mu\nu}'(k,m_0,e_0)\end{aligned} \tag{5.88}$$

这就证明了((5.73)的第二式(最后一步利用了(5.78))。

再证明(5.88)是不发散的。我们把$\prod^{重正}(k,m,e)$中的发散部分分出来(对于Π', $D=0$):

$$\prod^{重正}(k,m,e) = \sum_n g(n) + \prod^c(k,m,e) = (Z_3 - 1) + \prod^c(k,m,e)$$

其中取: $Z_3 - 1 = \sum_n g(n)$ ($g(n)$ 是发散的)

则(5.88)的分母是:

$$Z_3 - \prod^{重正}(k,m,e) = 1 + \sum_n g(n) - \sum_n g(n) - \prod^c(k,m,e) = 1 - \prod^c(k,m,e)$$

$$\therefore \underline{D}'_{F\mu\nu}(k,m,e) = \frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{1-\prod^c(k,m,e)} - \frac{1}{\xi}\frac{i}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (5.89)$$

已去发散,因$\Pi^c(k,m,e)$和ξ都已是不发散的。

(iii)
$$\begin{aligned}\underline{\Gamma}_\mu(p,q,m,e) &= Z_1\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{重正}(p,q,m,e)\\ &= Z_1\gamma_\mu + Z_1\Lambda'_\mu(p,q,m_0,e_0)\\ &= Z_1\Gamma_\mu(p,q,m_0,e_0)\end{aligned} \quad (5.90)$$

这就证明了(5.73)的第三式。(这里利用了(5.82),(5.85),(5.79))。

再证明(5.90)是不发散的。我们把$\Lambda_\mu^{重正}(p,q,m,e)$中的发散部分分出来($D=0$):

$$\Lambda_\mu^{重正}(p,q,m,e) = -\sum_n h(n)\gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p,q,m,e) = (1-Z_1)\gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p,q,m,e)$$

其中取: $Z_1 - 1 = \sum_n h(n)$ ($h(n)$ 是发散的)

则有:

$$\begin{aligned}\underline{\Gamma}_\mu(p,q,m,e) &= Z_1\gamma_\mu + (1-Z_1)\gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p,q,m,e)\\ &= \gamma_\mu + \Lambda_\mu^c(p,q,m,e)\end{aligned} \quad (5.91)$$

可见不发散,因$\Lambda_\mu^c(p,q,m,e)$是不发散的。

这里特别要说明的是,减除必须是逐次进行的。比方说,假定已重正化到n圈,凡n圈的$1PI$图都已不发散,那么,$n+1$圈的$1PI$则又是发散的。Z_1,Z_2,Z_3中又要分别加上$h(n+1)$,$f(n+1)$,$g(n+1)$,以抵消新出现的发散。这新出现的发散必定是整体(骨架)发散,因为其中的子图的发散都早已在以前逐次减除中被减除掉。由此可看到,$h(i)$,$f(i)$,$g(i)$($i\leqslant n$)所抵消的全都是逐次减除中出现的各级$1PI$图的整体(骨架)发散。

顺便再说明一点:通常量子电动力学是按$e^2,e^4,e^6,\cdots$的幂次的次序进行逐次减除。但是在量子规范理论里,为了保持规范不变,则是按圈数增加的次序来进行逐圈减除。

去发散的物理的 S 矩阵元

我们可以一般地取如下的重正化(5.57):

$$\Delta\mathscr{L}_1^{重正}(x) = ie(Z_1-1)\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) - (Z_2-1)\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}(x)\psi(x)\right) + Z_2(m-m_0)\bar{\psi}(x)\psi(x) - (Z_3-1)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right) \quad (5.92)$$

与(5.67)的$\mathscr{L}(x)$配合,可得到((5.80),(5.81),(5.82)):

$$\left.\begin{aligned}&S_F^{\text{重正}}(p)=\frac{1}{Z_2}\frac{-1}{\hat{p}-im_0}\\&D_{F\mu\nu}^{\text{重正}}(k)=\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{Z_3}-\frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\&\text{顶角}:Z_1e\gamma_\mu\end{aligned}\right\}\tag{5.93}$$

(取ξ规范)。

由此又得到(见(5.77)~(5.91)):

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_2}S_F'(p,m_0,e_0)&=\frac{1}{Z_2}\frac{-1}{\hat{p}-im_0-\Sigma'(p,m_0,e_0)}\\&=\frac{-1}{Z_2(\hat{p}-im_0)-\Sigma^{\text{重正}}(p,m,e)}=\underline{S}_F'(p,m,e)\\\frac{1}{Z_3}D_{F\mu\nu}'(k,m_0,e_0)&=\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{Z_3}\frac{1}{1-\prod'(k,m_0,e_0)}-\frac{i}{k^2}\frac{1}{Z_3\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\&=\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{Z_3-\prod^{\text{重正}}(k,m,e)}-\frac{i}{k^2}\frac{1}{Z_3\xi_0}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\&=\underline{D}_{F\mu\nu}'(k,m,e)\\Z_1\Gamma_\mu(p,q,m_0,e_0)&=Z_1(\gamma_\mu+\Lambda_\mu'(p,q,m_0,e_0))\\&=Z_1\gamma_\mu+\Lambda_\mu^{\text{重正}}(p,q,m,e)=\overline{\Gamma}_\mu(p,q,m,e)\end{aligned}$$

讨论

1. 选择适当的δm,则$\Sigma^{\text{重正}}(p,m,e)$可展开为:

$$\Sigma^{\text{重正}}=Z_2i\delta m+\sum_n f(n)(\hat{p}-im)+\Sigma^c(p,m,e)$$

其中$\Sigma^c(p,m,e)=\mathscr{L}(\hat{p}-im)^2+\beta(\hat{p}-im)^3+\cdots$。由于$D=1$,这样的展开满足$\Sigma^c(p,m,e)$不发散的要求。

2. $\prod^{\text{重正}}(k,m,e)$可展开为:

$$\prod{}^{\text{重正}}=\sum_n g(n)+\prod{}^c(k,m,e)$$

其中$\prod^c(k,m,e)=\gamma k^2+\eta k^4+\cdots$。由于$D=0$,这样的展开满足$\prod^c(k,m,e)$不发散的要求。

3. $\Lambda_\mu^{\text{重正}}(p,q,m,e)$可展开为:

$$\Lambda_\mu^{\text{重正}}=-\sum_n h(n)\gamma_\mu+\Lambda_\mu^c(p,q,m,e)$$

其中$\Lambda_\mu^c(p,q,m,e)$含p,q至少一次。由于$D=0$,这样的展开满足$\Lambda_\mu^c(p,q,m,e)$不发散的要求。

4. 取

$$\left.\begin{aligned}Z_1&=1+\sum_n h(n)\\Z_2&=1+\sum_n f(n)\\Z_3&=1+\sum_n g(n)\end{aligned}\right\}\tag{5.94}$$

这样取的根据是：如果没有作微扰，则 $\sum_n h(n)$、$\sum_n f(n)$、$\sum_n g(n)$ 都应取作零；(5.92)式的 $\Delta\mathscr{L}_I^{重正}(x)$ 在没有微扰时也应等于零，$m=m_0$。这样就规定了(5.94)式中的三个1。

于是代入后得到

$$\frac{1}{Z_2}S'_F(p,m_0,e_0)=\frac{-1}{(\hat{p}-im)-\sum^c(p,m,e)}=\underline{S}'_F(p,m,e)$$

$$\frac{1}{Z_3}D'_{F\mu\nu}(k,m_0,e_0)=\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{1-\prod^c(k,m,e)}+\frac{1}{\xi}\frac{-i}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

$$=\underline{D}'_{F\mu\nu}(k,m,e)$$

$Z_1\Gamma_\mu(p,q,m_0,e_0)=\gamma_\mu+\Lambda^c_\mu(p,q,m,e)=\underline{\Gamma}_\mu(p,q,m,e)$都已是不发散的。

讨论

1. 如果没有作微扰，确是有

$$\underline{S}'_F(p,m,e)=\frac{-1}{\hat{p}-im}$$

$$\underline{D}'_{F\mu\nu}(k,m,e)=\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)-\frac{1}{\xi}\frac{i}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

$$\underline{\Gamma}_\mu(p,q,m,e)=\gamma_\mu$$

和自由传播子、自由顶点一样。

2. 如果 p,k 趋于质壳，即 $\hat{p}\to im,k^2\to 0$，则由于 $\sum^c(p,m,e)=O(\hat{p}-im)^2$，$\prod^c(k,m,e)=O(k^2)$（见上面小结），得到

$$\underline{S}'_F(p,m,e)\Rightarrow\frac{-1}{\hat{p}-im}$$

$$\underline{D}'_F(k,m,e)\Rightarrow\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)-\frac{1}{\xi}\frac{i}{k^2}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$$

现在来考察一个顶点和它周围的传播子（见图(5.23)），并把它们写出来：

$$e_0\Gamma_\mu(p,p-k,m_0,e_0)D'_{F\mu\nu}(k,m_0,e_0)\cdot S'_F(p,m_0,e_0)\cdot S'_F(p-k,m_0,e_0)$$

$$=eZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}\frac{\underline{\Gamma}_\mu(p,p-k,m,e)}{Z_1}\cdot Z_3\,\underline{D}'_{F\mu\nu}(k,m,e)\cdot Z_2\,\underline{S}'_F(p,m,e)\cdot Z_2\,\underline{S}'_F(p-k,m,e)$$

$$=e\underline{\Gamma}_\mu(p,p-k,m,e)Z_3^{1/2}\,\underline{D}'_{F\mu\nu}(k,m,e)Z_2^{1/2}\,\underline{S}'_F(p,m,e)Z_2^{1/2}\,\underline{S}'_F(p-k,m,e) \tag{5.95}$$

其中 $e,\underline{\Gamma}_\mu,\underline{S}'_F,\underline{S}'_F$ 都是不发散的。余下的两个 $Z_2^{1/2}$ 和一个 $Z_3^{1/2}$ 在物理的 S 矩阵元中必定与另外的两个 $Z_2^{1/2}$ 和一个 $Z_3^{1/2}$ 抵消。抵消的途径不外两条，一条是与相邻顶点的 $eZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}$ 中的有关因子抵消，一条是与外线提供的 $Z_2^{1/2}$，$Z_3^{-1/2}$ 抵消（参看第四章，用约化公式给出外线时，可看到外线中有 $Z_2^{-1/2}$，$Z_3^{-1/2}$ 因子）。所以总的来说，在物理的 S 矩阵元中，所有的 Z 都抵消，只剩下不发散的顶角及传播子的贡献，从而就得到了不发散的 S 矩阵元。这就是重正化的目的。

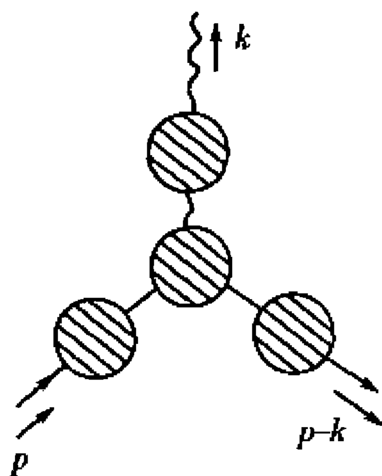


图 5.23

从(5.95)还看到，重正化就是把 Γ_μ、$D'_{F\mu\nu}$、S'_F 中的发散抽出来，放到 Z_1, Z_2, Z_3 中去，然后让 Z_1, Z_2, Z_3 和发散的 e_0 乘在一起，变成重正化的 e，同时让多余的 $Z_2^{1/2}, Z_3^{1/2}$ 与外线中的 $Z_2^{-1/2}, Z_3^{-1/2}$ 抵消。

顺便说一下，也可以把(5.94)改一改：

$$\left.\begin{aligned}\check{Z}_1 &= a + \sum_n h(n)\\ \check{Z}_2 &= b + \sum_n f(n)\\ \check{Z}_3 &= c_3 + \sum_n g(n)\end{aligned}\right\} \tag{5.96}$$

同时把(5.92)也改一改

$$\Delta \check{\mathscr{L}}_I^{\text{重正}}(x) = i(\check{e}\check{Z}_1 - e)\bar{\psi}(x)\hat{A}(x)\psi(x) - (\check{Z}_2 - 1)\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)$$

$$+ \check{Z}_2(m - \check{m}_0)\bar{\psi}(x)\psi(x) - (\check{Z}_3 - 1)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right) \tag{5.97}$$

就可得到(与(5.67)的 $\mathscr{L}(x)$ 配合，取 ξ 规范)：

$$\left.\begin{aligned}&\check{S}_F^{\text{重正}}(p) = \frac{1}{\check{Z}_2}\frac{-1}{p - i\check{m}_0}\\ &\check{D}_{F\mu\nu}^{\text{重正}}(k) = \frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{\check{Z}_3} - \frac{i}{k^2}\frac{1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\\ &\text{顶角}:\check{Z}_1\check{e}\gamma_\mu\end{aligned}\right\} \tag{5.98}$$

在用(5.98)做成的 S 矩阵元中，只要让

$$\left.\begin{aligned}\check{e}_0 &= \check{e}\check{Z}_1\check{Z}_2^{-1}\check{Z}_3^{-1/2} = e_0 = eZ_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}\\ \check{m}_0 &= m_0\end{aligned}\right\} \tag{5.99}$$

就会和用(5.93)做的形式相同。所不同的只是(5.93)的重正化电荷是 e，(5.98)的重正化电荷是 $\check{e}$，由(5.99)看到，$\check{e} \neq e$。但是，只要在(5.93)的情况下把物理的电荷取作 e；在(5.98)的情况下把物理的电荷取作 $\check{e}$，物理的结果就完全一样了(参看§6.2 例一的注)。

§5-5 加法重正化与乘法重正化的等价例二
——0 自旋粒子(φ^4 耦合)与费米子体系

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu} + \mu^2\varphi(x)\varphi(x)\right) + g\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\varphi(x) + h\varphi^4(x) - \left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} + M\bar{\psi}(x)\psi(x)\right) \tag{5.100}$$

$$\Delta\mathscr{L}_I^{\text{重正}}(x) = -(Z_3-1)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu} + \mu^2\varphi(x)\varphi(x)\right) + (Z_1-1)g\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\varphi(x) + (Z_4-1)h\varphi^4(x) + Z_2\delta M\bar{\psi}(x)\psi(x) + Z_3\frac{\delta\mu^2}{2}\varphi(x)\varphi(x) - (Z_2-1)\times\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} + M\bar{\psi}(x)\psi(x)\right) \tag{5.101}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta M &= M - M_0\\ \delta\mu_2 &= \mu^2 - \mu_0^2\end{aligned}\right\} \tag{5.102}$$

加到一起,定义 $\mathscr{L}^0(x)$:

$$\mathscr{L}^0(x) = \mathscr{L}(x) + \Delta\mathscr{L}_I^{\text{重正}}(x) = -Z_3\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_\nu} + \mu^2\varphi(x)\varphi(x)\right) + Z_1 g\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)\varphi(x) + Z_4 h\varphi^4(x) + Z_2(M-M_0)\bar{\psi}(x)\psi(x) + Z_3\frac{\mu^2-\mu_0^2}{2}\varphi(x)\varphi(x) - Z_2\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_\mu} + M\bar{\psi}(x)\psi(x)\right) \tag{5.103}$$

再定义

$$\psi^0 = Z_2^{1/2}\psi, \bar{\psi}^0 = Z_2^{1/2}\bar{\psi}, \varphi^0 = Z_3^{1/2}\varphi \tag{5.104}$$

则

$$\mathscr{L}^0(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^0(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi^0(x)}{\alpha x_\nu} + \mu_0^2\varphi^0(x)\varphi^0(x)\right) + Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}g\bar{\psi}^0(x)\Gamma\psi^0(x)\varphi^0(x) + Z_4Z_3^{-2}h\varphi^{04}(x) - \left(\bar{\psi}^0(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi^0(x)}{\partial x_\mu} + M_0\bar{\psi}^0(x)\psi^0(x)\right) \tag{5.105}$$

又定义

$$g_0 = Z_1Z_2^{-1}Z_3^{-1/2}g, h_0 = Z_4Z_3^{-2}h \tag{5.106}$$

则

$$\mathscr{L}^0(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi^0(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial\varphi^0(x)}{\partial x_\nu} + \mu_0^2\varphi^0(x)\varphi^0(x)\right) + g_0\bar{\psi}^0(x)\Gamma\psi^0(x)\varphi^0(x) + h_0\varphi^{04}(x) - \left(\bar{\psi}^0(x)\gamma_\mu\frac{\partial\psi^0(x)}{\partial x_\mu} + M_0\bar{\psi}^0(x)\psi^0(x)\right) \tag{5.107}$$

用和前一节完全相仿的方法，可证明

$$
\begin{aligned}
&Z_2\,\underline{G}'_F(\mu^2,M,g,h)=G'_F(\mu_0^2,M_0,g_0,h_0) &&(\text{费米传播子})\\
&Z_3\,\underline{\Delta}'_F(\mu^2,M,g,h)=\Delta'_F(\mu_0^2,M_0,g_0,h_0) &&(\varphi\ \text{传播子})\\
&\frac{1}{Z_1}\underline{\Gamma}(\mu^2,M,g,h)=\Gamma(\mu_0^2,M_0,g_0,h_0) &&(\bar{\psi}\Gamma\psi\varphi\ \text{顶角})\\
&\frac{1}{Z_4}\underline{\square}(\mu^2,M,g,h)=\Gamma(\mu_0^2,M_0,g_0,h_0) &&(\varphi^4\ \text{顶角})
\end{aligned}
\tag{5.108}
$$

关于 G_F 和 Γ 的证明和前面的 S_F,Γ_μ 一样，现在只需讨论 Δ_F 和□。

1. 关于 Δ_F:

$$
\begin{aligned}
\Delta_F^{\text{重正}}(k)&=\frac{-i}{k^2+\mu^2}+\frac{-i}{k^2+\mu^2}\left(-i(Z_3-1)(k^2+\mu^2)+iZ_3\delta\mu^2\right)\frac{-i}{k^2+\mu^2}+\cdots\\
&=\frac{-i}{k^2+\mu^2}\left(1+\frac{(Z_3-1)(k^2+\mu^2)-Z_3(\mu^2-\mu_0^2)}{k^2+\mu^2}\right)^{-1}=\frac{1}{Z_3}\,\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}
\end{aligned}
\tag{5.109}
$$

图(5.24)两顶点各缺一条 φ 线，所以用前述第二种做法只比第一种做法少了两个 $Z_3^{-1/2}$ 因子，乘上两个 $Z_3^{-1/2}$ 因子，两种做法就相等了：

$$
Z_3^{-1}\prod{}^{\text{重正}}(k,\mu^2,M,g,h)=\prod{}'(k,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0) \tag{5.110}
$$

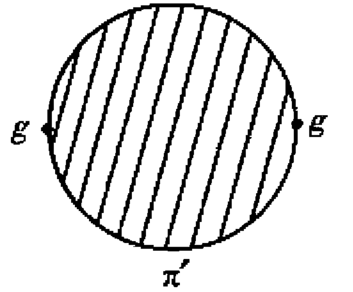


图 5.24

所以可以对比第一种做法得到的

$$
\begin{aligned}
\Delta'_F(k,\mu_0^2,m_0,g_0,h_0)&=\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}+\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}(i\prod{}')\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}+\cdots\\
&=\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}\left(1-\frac{\prod{}'}{k^2+\mu_0^2}\right)^{-1}=\frac{-i}{k^2+\mu_0^2-\prod{}'}
\end{aligned}
\tag{5.111}
$$

与第二种做法得到的

$$
\begin{aligned}
\underline{\Delta}'_F(k,u^2,M,g,h)&=\frac{1}{Z_3}\,\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}+\frac{1}{Z_3}\,\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}(i\prod{}^{\text{重正}})\frac{1}{Z_3}\,\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}+\cdots\\
&=\frac{1}{Z_3}\,\frac{-i}{k^2+\mu_0^2}\left(1-\frac{\prod{}^{\text{重正}}}{Z_3(k^2+\mu_0^2)}\right)^{-1}\\
&=\frac{-i}{Z_3(k^2+\mu_0^2)-\prod{}^{\text{重正}}(k,\mu^2,M,g,h)}\\
&=\frac{1}{Z_3}\,\frac{-i}{(k^2+\mu_0^2)-\prod{}'(k,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)}\\
&=\frac{1}{Z_3}\Delta'_F(k,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)
\end{aligned}
\tag{5.112}
$$

从而得到(5.108)的第二式。

再证明 $\underline{\Delta}'_F$ 是不发散的。我们把 $\prod^{\text{重正}}$ 的发散部分分出来($D=2$)，写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
\prod{}^{\text{重正}}(k,\mu,M,g,h)&=-Z_3\delta\mu^2+\sum_n f(n)(k^2+\mu^2)+\prod{}^c(k,\mu,M,g,h)\\
&=-Z_3(\mu^2-\mu_0^2)+(Z_3-1)(k^2+\mu^2)+\prod{}^c(k,\mu,M,g,h)\\
&=Z_3(k^2+\mu_0^2)-(k^2+\mu^2)+\prod{}^c(k,\mu,M,g,h)
\end{aligned}
$$

取 $Z_3=\left(1+\sum_n f(n)\right)$(见(5.94)的讨论)，则有

$$Z_3(k^2+\mu_0^2)-\prod{}^{\text{重正}}(k,\mu^2,M,g,h)=(k^2+\mu^2)-\prod{}^c(k,\mu,M,g,h) \tag{5.113}$$

所以自(5.112)

$$\underline{\Delta}_F'(k,\mu^2,M,g,h)=\frac{-i}{(k^2+\mu^2)-\prod^c(k,\mu,M,g,h)} \tag{5.114}$$

已去发散,因$\prod^c(k,\mu,M,g,h)$是不发散的。

2. 关于$\underline{\square}$:

图5.25一个顶点缺两条φ线,另一个顶点缺两条φ线和一个h,所以乘上四个$Z_3^{-1/2}$和相应的h或h_0,两种做法就相等了:

$$Z_3^{-2}h\bigcirc^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)=h_0\bigcirc'(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)$$

或写成

$$\bigcirc^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)=Z_4\bigcirc'(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0) \tag{5.115}$$

图5.26缺四条φ线和一个$h\left(\square^{\text{重正}}\sim\frac{(Z_1Z_2^{-1}g)^4}{h},\square'\sim\frac{(g_0)^4}{h_0}\right)$,所以也是乘上四个$Z_3^{-1/2}$和相应的$h$或$h_0$,两种做法就相等了:

$$Z_3^{-2}h\square^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)=h_0\square'(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)$$

从而得到

$$\square^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)=Z_4\square'(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0,) \tag{5.116}$$

合在一起:

$$\begin{aligned}h\underline{\square}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)&=Z_4h+h\bigcirc^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)\\&\quad+h\square^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)\\&=Z_4h+Z_4h\bigcirc'(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)\\&\quad+Z_4h\square'(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)\end{aligned} \tag{5.117}$$



图 5.25

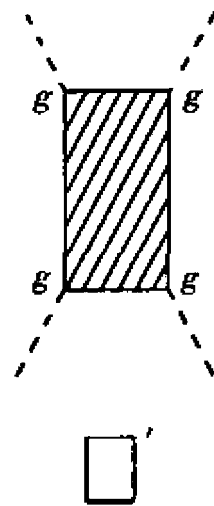


图 5.26

$$\begin{aligned}h_0\square(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)&=h_0+h_0\bigcirc'(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)\\&\quad+h_0\square'(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0)\end{aligned} \tag{5.117'}$$

$$\therefore\ \underline{\square}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)=Z_4\square(p,q,r,\mu_0^2,M_0,g_0,h_0) \tag{5.118}$$

这就是(5.108)的第四式。

再证明$\underline{\square}$是不发散的,由于$D=\bigcirc$,所以可把$\bigcirc^{\text{重正}}+\square^{\text{重正}}$展开成为

$$\bigcirc^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)+\square^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)$$

$$= - \sum_n h'(n) + \square^c(p,q,r,\mu^2,M,g,h)$$

$$= (1 - Z_4) + \square^c(p,q,r,\mu^2,M,g,h)$$

取 $Z_4 = (1 + \sum_n h'(n'))$(理由如(5.94)讨论),则有

$$\underline{\square}(p,q,r,\mu^2,M,g,h) = Z_4 + \bigcirc^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h) + \square^{\text{重正}}(p,q,r,\mu^2,M,g,h)$$

$$= 1 + \square^c(p,q,r,\mu^2,M,g,h) \tag{5.119}$$

已去发散,因$\square^c(p,q,r,\mu^2,M,g,h)$是收敛的。

补充说一句,这里的$\bigcirc^{\text{重正}}$其实包括两个图,即

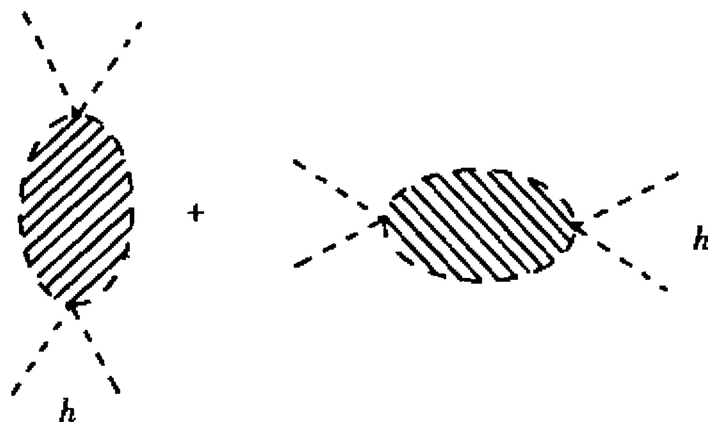


图 5.27

但并不产生新的困难。

§5-6 加法重正化与乘法重正化的等价例三——Y-M 场与 φ 场的体系

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi} + g\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi})^2$$

$$-\frac{1}{2}\mu^2\boldsymbol{\varphi}^2 - \frac{1}{4}\lambda(\boldsymbol{\varphi}^2)^2 \text{(黑体代表同位矢量)}$$

$$= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^2 - \frac{g}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)\cdot \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu$$

$$-\frac{g^2}{4}(\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)^2 - \frac{1}{2}[(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi})^2 + \mu^2\boldsymbol{\varphi}^2] - g\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}\cdot \mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi}$$

$$-\frac{g^2}{2}(\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi})^2 - \frac{1}{4}\lambda(\boldsymbol{\varphi}^2)^2 \tag{5.120}$$

这里

$$L^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},\quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad L^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[L^i, L^j] = i\varepsilon_{ijk}L^k \qquad \therefore\ -igL^j_{ab}A^j\varphi_b = g\mathbf{A}\times\boldsymbol{\varphi}$$

现在作为一个例子,仍取 ξ 规范,为了方便,可取 $\xi = 1$(设没有破缺)。

考虑 $\Delta\mathscr{L}_{\mathrm{I}}^{\text{重正}}(x)$的形式:和量子电动力学的情况一样,也可以证明 A^j_μ 的自能减除项应该具有和(5.66)一样的形式,所以 $\Delta\mathscr{L}_{\mathrm{I}}^{\text{重正}}(x)$中应含有

$$-(Z_3-1)\frac{1}{2}(\partial_\nu \mathbf{A}_\mu\cdot\partial_\nu \mathbf{A}_\mu-(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu)^2)\Rightarrow-(Z_3-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^2 \tag{5.121}$$

（经过部分积分）。

关于 φ 的自能项，由于 $D=2$，所以有两项（满足协变性，不能有 φ 的一次微商项）。就是说，$\Delta\mathscr{L}_{\text{I}}^{\text{重正}}(x)$ 中应含有

$$-\frac{1}{2}(Z_\varphi-1)[(\partial_\mu\varphi)^2+\mu^2\varphi^2]+\frac{Z_\varphi}{2}\delta\mu^2\varphi^2 \quad \delta\mu^2=\mu^2-\mu_0^2 \tag{5.122}$$

再看 3A 顶角 $-\frac{g}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)\cdot \mathbf{A}_\mu\times \mathbf{A}_\nu$，它要求有一个抵消项如下：

$$-(Z_1-1)\frac{g}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)\cdot \mathbf{A}_\mu\times \mathbf{A}_\nu \tag{5.123}$$

然后是 4φ 顶角 $-\frac{\lambda}{4}(\varphi^2)^2$，它要求有一个抵消项如下：

$$-(Z_4-1)\frac{\lambda}{4}(\varphi^2)^2 \tag{5.124}$$

于是，在 $\Delta\mathscr{L}(x)+\Delta\mathscr{L}_{\text{I}}^{\text{重正}}(x)$ 中，与(5.121)～(5.124)有关的四项应是

$$\begin{aligned}&-Z_3\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^2-Z_\varphi\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi)^2+\mu_0^2\varphi^2]\\&-Z_1\frac{g}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu)\cdot \mathbf{A}_\mu\times \mathbf{A}_\mu-Z_4\frac{\lambda}{4}(\varphi^2)^2\end{aligned} \tag{5.125}$$

现在定义

$$A_\mu^{i0}=Z_3^{1/2}A_\mu^i,\quad \varphi^{i0}=Z_\varphi^{1/2}\varphi^i \tag{5.126}$$

则(5.125)写成

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu^0-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu^0)^2-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi^0)^2-\mu_0^2\varphi^{02}]\\&+\frac{Z_1}{Z_3^{3/2}}\frac{g}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu^0-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu^0)\cdot \mathbf{A}_\mu^0\times \mathbf{A}_\nu^0-\frac{Z_4}{Z_\varphi^2}\frac{\lambda}{4}(\varphi^{02})^2\end{aligned} \tag{5.127}$$

再定义

$$g_0=\frac{Z_1}{Z_3^{3/2}}g,\qquad \lambda_0=\frac{Z_4}{Z_\varphi^2}\lambda \tag{5.128}$$

则(5.127)又写成：

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu^0-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu^0)^2-\frac{1}{2}[(\partial_\mu\varphi^0)^2-\mu_0^2\varphi^{02}]\\&+\frac{g_0}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu^0-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu^0)\cdot \mathbf{A}_\mu^0\times \mathbf{A}_\nu^0-\frac{\lambda_0}{4}(\varphi^{02})^2\end{aligned} \tag{5.129}$$

这样一来，(5.120)中的四个项就得到了重正化。问题是余下的三项应该怎样？关于这个问题以后将记明（第八章），如果 $\mathscr{L}(x)$ 是规范不变的，则 $\mathscr{L}^0(x)=\mathscr{L}(x)+\Delta\mathscr{L}_{\text{I}}^{\text{重正}}(x)$ 也是规范不变的。所以，根据(5.129)和规范不变性的约束，就可以确定(5.120)中另外三个项的重正化，并且给出

$$\mathscr{L}^0(x)=\mathscr{L}(x)+\Delta\mathscr{L}_{\text{I}}^{\text{重正}}(x)=-\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu^0-\partial_\nu \mathbf{A}_\mu^0+g_0\mathbf{A}_\nu^0\times \mathbf{A}_\nu^0)^2$$

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}^0 + g_0 \mathbf{A}_\mu^0 \times \boldsymbol{\varphi}^0)^2 - \frac{1}{2}\mu_0^2 \boldsymbol{\varphi}^{02} - \frac{1}{4}\lambda_0 (\boldsymbol{\varphi}^{02})^2 \tag{5.130}$$

而 $\Delta\mathscr{L}_1^{重正}(x)$ 则是：

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{L}_1^{重正}(x) = &-(Z_3-1)\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^2 - (Z_1-1)\frac{g}{2}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)\cdot \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu \\ &-\left(\frac{Z_1^2}{Z_3}-1\right)\frac{g^2}{4}(\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)^2 - (Z_\varphi - 1)\frac{1}{2}[(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}^2) + \mu^2 \boldsymbol{\varphi}^2] \\ &+\frac{1}{2}Z_\varphi(\mu^2 - \mu_0^2)\boldsymbol{\varphi}^2 - \left(\frac{Z_1 Z_\varphi}{Z_3}-1\right) g \partial_\mu \boldsymbol{\varphi}\cdot \mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi} \\ &-\left(\frac{Z_1^2 Z_\varphi}{Z_3^2}-1\right)\frac{g^2}{2}(\mathbf{A}_\mu \times \boldsymbol{\varphi})^2 - (Z_4-1)\frac{1}{4}\lambda(\boldsymbol{\varphi}^2)^2\end{aligned} \tag{5.131}$$

然后再考察 F－P 场。由于取的是费曼规范（$\xi=1$），所以根据（3.109）和（3.99）可得到

$$\mathscr{L}_{F-P}(x) = -\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x)\cdot\partial_\mu \mathbf{u}(x) - g(\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x))\cdot \mathbf{A}_\mu(x)\times \mathbf{u}(x) \tag{5.132}$$

考虑 $\Delta\mathscr{L}_{F-P}^{重正}(x)$ 的形式：首先是 $\bar{u}u$ 自能减除项。由于 $D=2$，所以 $\Delta\mathscr{L}_{F-P}^{重正}(x)$ 应含有如下抵消项：

$$-(\tilde{Z}_3-1)\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x)\cdot\partial_\mu \mathbf{u}(x) \tag{5.133}$$

但不会含有一次微商项（因为做不成协变形式），也不会含有常数项（因为 §4－5 的例子中已算过 $\bar{u}u$ 自能图，在动量表示中，它的贡献正比于能量动量平方和，与（5.133）相一致，并不含能量动量的常数项）。

其次是 $\bar{u}Au$ 顶角项 $g(\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x))\cdot \mathbf{A}_\mu(x)\times \mathbf{u}(x)$，它要求有一个抵消项如下：

$$-(\tilde{Z}_1-1)g(\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x))\cdot \mathbf{A}_\mu(x)\times \mathbf{u}(x) \tag{5.134}$$

总起来：

$$\Delta\mathscr{L}_{F-P}^{重正}(x) = -(\tilde{Z}_3-1)\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x)\cdot\partial_\mu \mathbf{u}(x) - (\tilde{Z}_1-1)g(\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x))\cdot \mathbf{A}_\mu(x)\times \mathbf{u}(x) \tag{5.135}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{F-P}^0(x) = \mathscr{L}_{F-P}(x) + \Delta\mathscr{L}_{F-P}^{重正}(x) = &-\tilde{Z}_3 \partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x)\cdot\partial_\mu \mathbf{u}(x) \\ &-\tilde{Z}_1 g(\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}(x))\cdot \mathbf{A}_\mu(x)\times \mathbf{u}(x)\end{aligned} \tag{5.136}$$

现在定义

$$\begin{gathered}\bar{u}^0(x) = \tilde{Z}_3^{1/2}\bar{u}(x),\ u^0(x) = \tilde{Z}_3^{1/2}u(x), \\ g_0' = \frac{\tilde{Z}_1}{Z_3^{1/2}\tilde{Z}_3}g\end{gathered} \tag{5.137}$$

则（5.136）又可写成

$$\mathscr{L}_{F-P}^0(x) = -\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}^0(x)\cdot\partial_\mu \boldsymbol{\mu}^0(x) - g_0'(\partial_\mu \bar{\mathbf{u}}^0(x))\cdot \mathbf{A}_\mu^0(x)\times \mathbf{u}^0(x) \tag{5.138}$$

对比 $\mathscr{L}_{eff}$ 和 $\mathscr{L}_{eff}^0$：

$$\mathscr{L}_{eff}(x) = \mathscr{L}(x) + \mathscr{L}_{F-P}(x) = -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu)^2$$

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu \boldsymbol{\varphi}+g\mathbf{A}_\mu\times\boldsymbol{\varphi})^2-\frac{1}{2}\mu^2\boldsymbol{\varphi}^2-\frac{1}{4}\lambda(\boldsymbol{\varphi}^2)^2$$

$$-\partial_\mu\bar{\mathbf{u}}\cdot\partial_\mu\mathbf{u}-g(\partial_\mu\bar{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{A}_\mu\times\mathbf{u} \tag{5.139}$$

$$\mathscr{L}^0_{eff}(x)=\mathscr{L}(x)+\Delta\mathscr{L}_1^{重正}(x)+\mathscr{L}_{F-P}(x)+\Delta\mathscr{L}_{F-P}^{重正}(x)$$

$$=-\frac{1}{4}(\partial_\mu\mathbf{A}^0_\nu-\partial_\nu\mathbf{A}^0_\mu+g_0\mathbf{A}^0_\mu\times\mathbf{A}^0_\nu)^2-\frac{1}{2}(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}^0+g_0\mathbf{A}^0_\mu\times\boldsymbol{\varphi}^0)^2$$

$$-\frac{1}{2}\mu_0^2\boldsymbol{\varphi}^{02}-\frac{1}{4}\lambda_0(\boldsymbol{\varphi}^{02})^2$$

$$-\partial_\mu\bar{\mathbf{u}}^0\cdot\partial_\mu\mathbf{u}^0-g'_0(\partial_\mu\bar{\mathbf{u}}^0)\cdot\mathbf{A}^0_\mu\times\mathbf{u}^0 \tag{5.140}$$

我们看到，在(5.139)中，只有一个耦合常数 g；而在(5.140)中却出现了两个耦合常数 g_0 和 g_0'。这在物理上当然是不合理的，因为重正化不应多出耦合常数来。所以必定是

$$g_0=g_0' \tag{5.141}$$

或自(5.128)，(5.137)，要求

$$\frac{Z_1}{Z_3}=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} \tag{5.142}$$

在第八章的关于重正化的一般性证明中，此关系式可以不费力地得到，因为在那个证明中，g_0 完全由(5.128)决定，不需要引入 $\tilde{Z}_1$。现在则用 W－T 恒等式来证明一下。

$\dfrac{Z_1}{Z_3}=\dfrac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}$的证明

取(4.89)，把传播子的高次修正也加进去（采用上述 $\mathscr{L}(x)+\mathscr{L}_{F-P}(x)+\Delta\mathscr{L}_1^{重正}(x)+\Delta\mathscr{L}_{F-P}^{重正}(x)$，并加上规范确定项，取 $\xi=1$），就得到($p,q_1,r\to0$ 时)：

$$-\frac{p_\mu}{p^2}\cdot\frac{q_\nu}{q^2}\cdot D'^{Tr cc'}_{\lambda\lambda'}(r,g_0,g'_0)\Gamma'^{abc'}_{\mu\nu\lambda'}(p,q,r;g_0,g'_0)$$

$$+\frac{q'_\nu}{q^2}\cdot\mathscr{G}^{aa'}(p,g_0,g'_0)\left(\delta_{\lambda\rho}-\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\right)\gamma'^{ca'b}_{\rho\nu}(r,p,q;g_0,g'_0)=0 \tag{5.143}$$

作一些说明：

1. 第一项的$\dfrac{p_\mu}{p^2}\cdot\dfrac{q_\nu}{q^2}$因子来自$\underline{D}'_{\mu\mu'}(p)$，$\underline{D}'_{\nu\nu'}(q)$的纵向部分（见(4.75)）。已知纵向部分是不重正化的，所以加上高次修正后，$\dfrac{p_\mu}{p^2}\cdot\dfrac{q_\nu}{q^2}$因子不变。

2. 第一项的 $D'^{Tr cc'}_{\lambda\lambda'}$ 是 $D'^{cc'}_{\lambda\lambda'}$ 的横向部分，因为 $p,q,r\to0$ 时，(4.75)曾指出 $D'^{cc'}_{\lambda\lambda'}$ 的纵波部分（它是不重正化的）的贡献可略去。第二项的 $\mathscr{G}^{aa'}$ 则是连接 x 的 F－P 传播子（见图4.5，图4.8，图4.9，图4.12）。



图 5.28

3. 第二项的$\left(\delta_{\lambda\rho}-\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\right)$，正如从(4.79)，(4.81)，(4.83)，(4.87)看到的那样，也是不同的图的贡献相消的结果。可以把§4－5中的图4.7加上高次修正，变成图5.28。结果无非是把Π^0换成Π^*（例如在(4.83)，(4.87)中，$1+(-C_2(G)g^2\Pi^0)+(-C_2(G)g^2\Pi^0)^2+\cdots$换成

$$1+(-C_2(G)g^2\Pi^*)+(-C_2(G)g^2\Pi^*)^2+\cdots$$

Π^*代表所有不可约的Π之和)。所以，加进高次修正后，仍是照样抵消，不改变$\left(\delta_{\lambda\rho}-\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\right)$因子。也就是说，这个因子不受高次修正的影响。

4. g_0，g'_0代表裸的耦合常数。第一个g_0是$A^0A^0A^0$的耦合常数，第二个g'_0是$u^0A^0u^0$的耦合常数。在这里我们接受了(5.141)，令$g_0'=g_0$。但这样一来就必须定义两个重正化的耦合常数，一个是

$$g=g_0Z_1^{-1}Z_3^{3/2};\tag{5.128$'$}$$

另一个是

$$g_F=g_0\tilde{Z}_1^{-1}\tilde{Z}_3Z_3^{1/2}\tag{5.137$'$}$$

于是求证$\frac{Z_3}{Z_1}=\frac{\tilde{Z}_3}{\tilde{Z}_1}$的问题就归结为求证$g_F=g$。

证明像§5－4那样，也分成几步：

1. 先写出D'，$\mathscr{G}'$，Γ，γ。也是用没有抵消项的$W^{\text{无减除}}[j]$（见(5.74)），只是其中把$\mathscr{L}$换成现在这个例子中的$\mathscr{L}+\mathscr{L}_{F-P}$。

(ⅰ)仿照(5.78)，有

$$D'^{Trab}_{\mu\nu}(r,g_0,g_0)=-i\delta_{ab}\frac{\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{r_\mu r_\nu}{r^2}\right)}{r^2}\cdot\frac{1}{1-\prod'(r,g_0,g_0)}\tag{5.144}$$



图5.29

$\Pi'\mu\upsilon(r)=(\delta_{\mu\nu}r^2-r_\mu r_\nu)\Pi'(r)$

图　5.29

(ⅱ)$$\mathscr{G}'^{ab}(p,g_0,g_0)=-i\frac{\delta_{ab}}{p^2}-i\frac{\delta_{ac}}{p^2}(i\delta_{cd}p^2\prod'_F(p,g_0,g_0))\left(-i\frac{\delta_{db}}{p^2}\right)-\cdots$$

$$=-i\frac{\delta_{ab}}{p^2}\frac{1}{1-\prod'_F(p,g_0,g_0)}\tag{5.145}$$

$p^2\Pi'_F(p)$

图 5.30

(iii) $\frac{1}{g_0}\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r;g_0,g_0) = -i\varepsilon^{abc}[(p-q)_\lambda\delta_{\mu\nu}+(q-r)_\mu\delta_{\nu\lambda}$

$$+(r-p)_\nu\delta_{\lambda\mu}]+\Lambda'^{abc}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r;g_0,g_0) \tag{5.146}$$

(对照4.26图 $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}$ 的定义,现在 $f_{abc}=\varepsilon^{abc}$)

$\Lambda'^{abc}_{\mu\nu\lambda}$

图 5.31

(iv) $\frac{1}{g_0}\gamma'^{cab'}_{\rho\nu'}(r,p;q;g_0,g_0) = -i\varepsilon^{cab'}\delta_{\rho\nu'}+\lambda'^{cab'}_{\rho\nu'}(r,p;q;g_0,g_0)$ (5.147)

(对照4.16图 $\gamma'^{acb}_{\lambda\mu}$ 的定义)

$\lambda'^{abc}_{\sigma\rho}$

图 5.32

2. 用有抵消项的 $W[j]$(见(5.75)),其中拉氏量取作 $\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}_I^{重正}+\mathscr{L}_{F-P}+\Delta\mathscr{L}_{F-P}^{重正}$,可以写出 $D^{重正}$,$\mathscr{G}^{重正}$和没有微扰修正的顶点如下:

(i) 仿照(5.81),有

$$D^{重正 Trab}_{\mu\nu}(r) = -\frac{i}{r^2}\delta_{ab}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{r_\mu r_\nu}{r^2}\right)\frac{1}{Z_3} \tag{5.148}$$

(ii) $\mathscr{G}^{重正ab}(p) = -i\frac{\delta_{ab}}{p^2}-i\frac{\delta_{ac}}{p^2}(-i\delta_{cd}(\tilde{Z}_3-1)p^2)\left(-i\frac{\delta_{db}}{p^2}\right)-\cdots$

$$= -i\frac{\delta_{ab}}{p^2}(1+\tilde{Z}_3-1)^{-1} = -i\frac{\delta_{ab}}{p^2}\frac{1}{\tilde{Z}_3} \tag{5.149}$$

(iii) AAA 顶点(与 $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}$ 相对应):

$$-iZ_1g\varepsilon^{abc}[(p-q)_\lambda\delta_{\mu\upsilon}+(q-r)_\mu\delta_{\upsilon\lambda}+(r-p)_\upsilon\delta_{\lambda\mu}] \tag{5.150}$$

(iv) $\bar{u}Au$ 顶点(与 $\gamma^{cab'}_{\rho\upsilon'}$ 相对应):

$$-i\tilde{Z}_1g_F\varepsilon^{cab'}\delta_{\rho\upsilon'} \tag{5.151}$$

3. 与上面的 2. 相对照,自 $W^{无减除}[j]$(含义同前)给出的自由传播子和顶点是:

(i) $$D^{Trab}_{\mu\nu}(r)=-i\delta_{ab}\frac{\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{r_\mu r_\nu}{r^2}\right)}{r^2} \tag{5.152}$$

(ii) $$\mathscr{G}^{ab}(p)=-i\frac{\delta_{ab}}{p^2} \tag{5.153}$$

(iii) AAA 顶点(与 $\Gamma^{abc}_{\mu\upsilon\lambda}$ 相对应):

$$-ig_0\varepsilon^{abc}[(p-q)_\lambda\delta_{\mu\upsilon}+(q-r)_\mu\delta_{\upsilon\lambda}+(r-p)_\upsilon\delta_{\lambda\mu}] \tag{5.154}$$

(iv) $\bar{u}Au$ 顶点(与 $\gamma^{cab'}_{\rho\upsilon'}$ 相对应):

$$-ig_0\varepsilon^{cab'}\delta_{\rho\upsilon'} \tag{5.155}$$

所以,在 2. 的写法中,如果把传播子中的 Z_3 和 $\tilde{Z}_3$ 分摊移交给传播子两端的两个顶点,则 2. 和 3. 的两种写法的传播子部分完全一样。再如果取 $g_0=gZ_1Z_3^{-3/2}=g_F\tilde{Z}_1\tilde{Z}_3^{-1}\tilde{Z}_3^{-1/2}$,则两种写法连顶点也一样了。因此可以看到两种写法的 $1PI$ 之间有如下的乘法重正化关系:

(i) 图 5.33 两顶点各缺一条 A 线,2. 的写法比 3. 的写法只缺少两个 $Z_3^{-1/2}$ 因子 · 乘上两个 $Z_3^{-1/2}$ 因子,两种做法就相等了。

$$Z_3^{-1}\prod^{重正'}(r,g,g_F)=\prod{}'(r,g_0,g_0) \tag{5.156}$$

(ii) 图 5.34 两顶点各缺一条 $u\bar{u}$ 线,3. 的写法比 2. 的写法只缺少两个 $\tilde{Z}_3^{-1/2}$ 因子。乘上两个 $\tilde{Z}_3^{-1/2}$ 因子,两种做法就相等了。

$$\tilde{Z}_3^{-1}\prod{}_F^{重正'}(r,g,g_F)=\prod{}'_F(r,g_0,g_0) \tag{5.157}$$

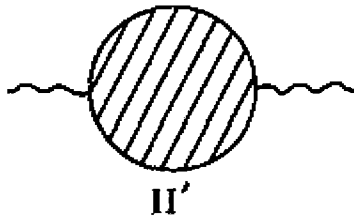


图 5.33



图 5.34

(iii) 图 5.35 两个顶点缺 A 线,一个顶点缺 A 线又缺 g,乘上三个 $Z_3^{-1/2}$ 和乘上相应的 g 或 g_0,两种做法就相等了。

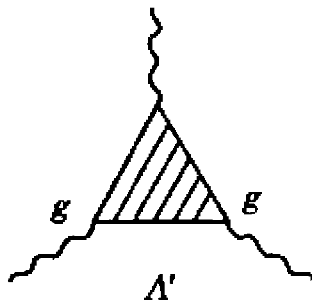


图 5.35

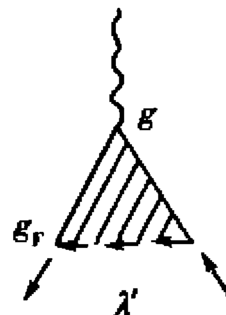


图 5.36

$$Z_3^{-3/2} g \Lambda^{重正'}(p,q,r;g,g_F) = g_0 \Lambda'(p,q,r;g_0,g_0)$$
$$\to \Lambda^{重正'}(p,q,r;g,g_F) = Z_1 \Lambda'(p,q,r;g_0,g_0) \tag{5.158}$$

(iv)图 5.36 两个顶点缺 $\bar{\omega}\omega$线，一个顶点缺 A 线，一个顶点缺 g_F，乘上两个 $\tilde{Z}_3^{-1/2}$，一个 $Z_3^{-1/2}$ 和乘上相应的 g_F 或 g_0，两种做法就相等了。

$$\tilde{Z}_3^{-1} Z_3^{-1/2} g_F \lambda^{重正'}(r,p;q;g,g_F) = g_0 \lambda'(r,p;q;g_0,g_0)$$
$$\to \lambda^{重正'}(r,p;q;g,g_F) = \tilde{Z}_1 \lambda'(r,p;q;g_0,g_0) \tag{5.159}$$

4. 完全传播子和完全顶角函数的重正化：

(i)和(5.78)，(5.88)一样，可以得到(见(5.144))：

$$\underline{D}_{\mu\nu}^{'Tr,ab}(r,g,g_F) = -i\delta_{ab}\frac{\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{r_\mu r_\nu}{r^2}\right)}{r^2} \cdot \frac{1}{Z_3 - \prod^{重正'}(r,g,g_F)}$$
$$= -i\delta_{ab}\frac{\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{r_\mu r_\nu}{r^2}\right)}{r^2} \cdot \frac{1}{Z_3} \cdot \frac{1}{1 - \prod'(r,g_0,g_0)}$$
$$= \frac{1}{Z_3} D_{\mu\nu}^{'Tr,ab}(r,g_0,g_0) \tag{5.160}$$

(ii)
$$\underline{\mathscr{G}}^{ab}(p,g,g_F) = \frac{-i}{\tilde{Z}_3}\frac{\delta^{ab}}{p^2} - \frac{i}{\tilde{Z}_3}\frac{\delta_{ac}}{p^2}(i\delta_{cd}p^2 \prod_F^{重正'}(p,g,g_F))\frac{-i}{\tilde{Z}}\frac{\delta_{db}}{p^2} - \cdots$$
$$= -i\frac{\delta_{ab}}{p^2}\frac{1}{\tilde{Z}_3 - \prod_F^{重正'}(p,g,g_F)}$$
$$= -i\frac{\delta_{ab}}{p^2}\frac{1}{\tilde{Z}_3}\frac{1}{1 - \prod_F'(p,g_0,g_0)} = \frac{1}{\tilde{Z}_3}\mathscr{G}'^{ab}(p,g_0,g_0)$$
$$(见(5.145)) \tag{5.161}$$

(iii)
$$\frac{1}{g}\underline{\Gamma}_{\mu\nu\lambda}^{Abc}(p,q,r;g,g_F) = -iZ_1\varepsilon^{abc}[(p-q)_\lambda\delta_{\mu\nu} + (q-r)_\mu\delta_{\nu\lambda} + (r-p)_\nu\delta_{\lambda\mu}]$$
$$+\Lambda_{\mu\nu\lambda}^{重正'abc}(p,q,r,g,g_F) = -iZ_1\varepsilon^{abc}[(p-q)_\lambda\delta_{\mu\nu} + (q-r)_\mu\delta_{\nu\lambda} + (r-p)_\nu\delta_{\lambda\mu}]$$
$$+Z_1\Lambda_{\mu\nu\lambda}^{'abc}(p,q,r;g_0,g_0) = Z_1\frac{1}{g_0}\Gamma_{\mu\nu\lambda}^{abc}(p,q,r;g_0,g_0) \quad (见(5.146)) \tag{5.162}$$

(iv)
$$\frac{1}{g_F}\underline{\gamma}_{\rho\nu'}^{cab'}(r,p;q;g,g_F) = -i\,\tilde{Z}\varepsilon_1^{cab'}\delta_{\rho\nu'}' + \lambda_{\rho\nu'}^{重正'ca'b'}(r,p;q;g,g_F)$$
$$= -i\,\tilde{Z}_1\varepsilon^{cab'}\delta_{\rho\nu'}' + Z_1\lambda_{\rho\nu'}^{'cab'}(r,p;q;g_0,g_0)$$
$$= \tilde{Z}_1\frac{1}{g_0}\gamma_{\rho\nu'}^{cab'}(r,p;q;g_0,g_0)(见(5.147)) \tag{5.163}$$

和前一样，只要取适当的 $Z_3,\tilde{Z}_3,Z_1,\tilde{Z}_1$，就可以抵消$\prod^{重正'}$，$\prod_F^{重正'}$，$\Lambda^{重正'}$，$\lambda^{重正'}$中的发散部分，使$\underline{D}'$，$\underline{\mathscr{G}}'$，$\underline{\Gamma}$，$\underline{\gamma}$ 成为不发散的。进而可以证明由此得到的重正化的物理的 S 矩阵

元是不发散的。情况和§5-4一样,这里不重复。

5. 把$\Pi^{\text{重正}'}$,$\Pi_F^{\text{重正}'}$,$\Lambda^{\text{重正}'}$,$\lambda^{\text{重正}'}$展开,并取Z_3,$\tilde{Z}_3$,Z_1,$\tilde{Z}_1$如下:

(i)
$$\Pi^{\text{重正}'}(r,g,g_F) = \sum_n \Pi_n^{\text{发散}} + \Pi_c(r,g,g_F) \tag{5.164}$$

$(D=2$,已抽出$(r^2\delta_{\mu\nu} - r_\mu r_\nu))$,$\Pi_c(r,g,g_F) = O(r^2)$

$$Z_3 = 1 + \sum_n \Pi_n^{\text{发散}} \tag{5.165}$$

(ii)
$$\Pi_F^{\text{重正}'}(p,g,g_F) = \sum_n \Pi_{Fn}^{\text{发散}} + \Pi_{F_c}(p,g,g_F) \tag{5.166}$$

$(D=2$,已抽出$p^2)$,$\Pi_{F_c}(p,g,g_F) = O(p^2)$

$$\tilde{Z}_3 = 1 + \sum_n \Pi_{Fn}^{\text{发散}} \tag{5.167}$$

(iii)
$$\Lambda_{\mu\nu\lambda}^{\text{重正}'abc}(p,q,r;g,g_F) = i\varepsilon^{abc}[(p-q)_\lambda\delta_{\mu\nu} + (q-r)_\mu\delta_{\nu\lambda} + (r-p)_\nu\delta_{\lambda\mu}] \times \sum_n \Lambda_n^{\text{发散}} + \Lambda_{\mu\nu\lambda}^{c,abc}(p,q,r;g,g_F) \tag{5.168}$$

$(D=1)\Lambda_{\mu\nu\lambda}^{c,abc}(p,q,r;g,g_F) = O(p,q,r$ 二次$)$

$$Z_1 = 1 + \sum_n \Lambda_n^{\text{发散}} \tag{5.169}$$

(iv)
$$\lambda_{\rho\nu}^{\text{重正}'cab}(r,p;q;g,g_F) = i\varepsilon^{cab}\delta_{\rho\nu} \cdot \sum_n \lambda_n^{\text{发散}} + \lambda_{\rho\nu}^{c,cab}(r,p;q;g,g_F) \tag{5.170}$$

$(D=1)$,$\lambda_{\rho\nu}^{c,cab}(r,p;q;g,g_F) = O(p,q,r$ 二次$)$

$$\tilde{Z}_1 = 1 + \sum_n \lambda_n^{\text{发散}} \tag{5.171}$$

于是有不发散的$\underline{D}'$,$\underline{\mathscr{G}}'$,$\underline{\Gamma}$,$\underline{\gamma}$ 如下:

$$\underline{D}_{\lambda\lambda'}^{'\mathrm{Tr}cc'}(r,g,g_F)\big|_{r\to 0} = -i\delta_{cc'}\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'} - \frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)}{r^2}\cdot\frac{1}{1 - O(r^2)}\bigg|_{r\to 0} \tag{5.172}$$

$$\underline{\mathscr{G}}^{'ac'}(p,g,g_F)\big|_{p\to 0} = -i\frac{\delta_{ac'}}{p^2}\frac{1}{1 - O(p^2)}\bigg|_{p\to 0} \tag{5.173}$$

$$\underline{\Gamma}_{\nu\mu\lambda}^{abc}(p,q,r;g,g_F)\big|_{p,q,r\to 0} = -ig\varepsilon^{abc}[(p-q)_\lambda\delta_{\mu\nu} + (q-r)_\mu\delta_{\nu\lambda} + (r-p)_\nu\delta_{\lambda\mu}] + O(p,q,r\text{ 二次})\big|_{p,q,r\to 0} \tag{5.174}$$

$$\underline{\gamma}_{\rho\nu}^{cab}(r,p;q;g,g_F)\big|_{p,q,r\to 0} = -i\varepsilon^{cab}\delta_{\rho\nu}g_F + O(p,q,r\text{ 二次})\big|_{p,q,r\to 0} \tag{5.175}$$

现在再回到 W-T 恒等式(5.143)。利用(5.160),(5.161),(5.162),(5.163)和$\frac{g_0}{g} = \frac{Z_1}{Z_3^{3/2}}$,$\frac{g_0}{g_F} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}}$,则 W-T 恒等式又可写成

$$-\frac{p_\mu}{p^2}\cdot\frac{q_\nu}{q^2}\cdot\underline{D}^{'\mathrm{Tr},cc'}(r,g,g_F)\cdot\underline{\Gamma}_{\mu\nu\lambda'}^{abc'}(p,q,r;g,g_F) + \frac{q_{\nu'}}{q^2}\cdot\underline{\mathscr{G}}^{aa'}(p,g,g_F)\left(\delta_{\lambda\rho} - \frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\right)\cdot\underline{\gamma}_{\rho\nu'}^{ca'b}(r,p;q;g,g_F) = 0 \tag{5.176}$$

再把(5.172),(5.173),(5.174),(5.175)代入,当$p,q,r\to0$,可把○(p,q,r二次)略去,于是得到

$$
-\frac{p_\mu}{p^2}\cdot\frac{q_\nu}{q^2}(-i)\frac{\left(\delta_{\lambda\lambda'}-\frac{r_\lambda r_{\lambda'}}{r^2}\right)}{r^2}\cdot(-i)\varepsilon^{abc}[(p-q)_{\lambda'}\delta_{\mu\nu}+(q-r)_\mu\delta_{\nu\lambda'}
$$

$$
+(r-p)_\nu\delta_{\lambda'\mu}]g+\frac{q_{\nu'}}{q^2}(-i)\frac{1}{p^2}\left(\delta_{\lambda\rho}-\frac{r_\lambda r_\rho}{r^2}\right)(-i)\varepsilon^{cab}\delta_{\rho\nu'}g_F=0 \tag{5.177}
$$

利用$p+q+r=0$,则(5.177)化简为

$$
\varepsilon^{abc}\frac{1}{p^2}\frac{1}{q^2}\left(q_\lambda-\frac{(q\cdot r)r_\lambda}{r^2}\right)g-\varepsilon^{cab}\frac{1}{p^2}\frac{1}{q^2}\left(q_\lambda-\frac{(q\cdot r)r_\lambda}{r^2}\right)g_F=0
$$

因为$\varepsilon^{abc}=\varepsilon^{cab}$,所以

$$
g=g_F \tag{5.178}
$$

从而自(5.128)',(5.137)'得到

$$
\frac{Z_1}{Z_3}=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3}
$$

证毕。

参考文献

1 W. Zimmermann, Lectures on clementary particles and quantum field theory, ed. S. Deser, M. Grisaru and H. Pentleton, (MIT press, Cambridge, 1970) p. 395.

2 Н. Н. Боголюбов, Д. В. Щирков, Ввебение в теорию квантованных полей, Издание трет ье, Издательство《наука》, 1976.

3 S. Abers, B. W. Lee, Phys. Reports, C9(1973)1.

第六章　维数正常化和单圈图

在§5－1中说过，正常化就是引入某种参数，使发散积分改换成不发散积分。然后，再使参数趋于某极限，此时原先发散的积分仍趋于发散，而减除后的积分则是不发散的。由此可得到有物理意义的不发散的S矩阵元。但是，一般的正常化方法都是破坏规范不变性的。目前已知的唯一实用而又不破坏规范不变性的正常化方法只有维数正常化方法[1]。这一章将介绍和讨论这个方法，并举一些单圈图的例子。

§6－1　维数正常化积分公式

维数正常化也是按圈数的由少到多逐次进行的。先看单圈图，设有一个Lorentz不变的单圈积分，它有$q+1$条外线，独立的外线动量是$k_1,k_2,\cdots,k_q$（由于有δ函数，k_{q+1}是不独立的）：

$$I=\int d^4p\, f(p,k_1,\cdots,k_q)=\int d^4p\, f(p^2,p\cdot k_i,k_i^2,k_i\cdot k_j) \tag{6.1}$$

维数正常化就是要把d^4p扩充为d^np，即把4维的p，扩充为n维的p（原先4维的p记作$\bar{p}$）：

$$4\text{ 维}:p=\bar{p}$$
$$n\text{ 维}:p=(\bar{p},P)$$

P与$\bar{p}$正交

$$\bar{p}\cdot P=0 \tag{6.3}$$

此地P是$n-4$维。或者说，$\bar{p}$有4个分量，P有$n-4$个分量。另外，不把外线动量扩充到n维，仍是

$$k_i=(k_i,0) \tag{6.4}$$

于是(6.1)扩充到n维积分后写成：

$$I_n=\int d^np\, f(p,k_1,\cdots,k_q)=\int d^4\bar{p}\int d^{n-4}P\, f(\bar{p}^2+P^2,\bar{p}\cdot k_i,k_i^2,k_i\cdot k_j) \tag{6.5}$$

因为这个积分与P^2有关，而且P只以P^2形式出现，所以可以先把$n-4$维的空间角度积出来。

$$\begin{aligned}
&P_1=P\cos\theta_{n-1}\\
&P_2=P\sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2}\\
&P_3=P\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-3}\\
&\cdots\\
&P_{n-5}=P\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-3}\cdots\sin\theta_6\cos\theta_5\\
&P_{n-4}=P\sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-3}\cdots\sin\theta_6\sin\theta_5
\end{aligned} \tag{6.6}$$

此处$\theta_5,\theta_6,\cdots,\theta_{n-2},\theta_{n-1}$共$(n-5)$个$\theta_i$。

Jacobi行列式（$n-4$行列）是：

$$J=\begin{vmatrix} \cos\theta_{n-1} & -P\sin\theta_{n-1} & \cdots & 0 \\ \sin\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2} & P\cos\theta_{n-1}\cos\theta_{n-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & -P\sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_6\sin\theta_5 \\ \sin\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_6\sin\theta_5 & P\cos\theta_{n-1}\sin\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_6\sin\theta_5 & \cdots & P\sin\theta_{n-1}\cdots\sin\theta_6\cos\theta_5 \end{vmatrix}$$

$$=P^{n-5}\sin^{n-6}\theta_{n-1}\sin^{n-7}\theta_{n-2}\cdots\sin^2\theta_7\cdot\begin{vmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 \\ \sin\theta_6\cos\theta_5 & \cos\theta_6\cos\theta_5 & -\sin\theta_6\sin\theta_5 \\ \sin\theta_6\sin\theta_5 & \cos\theta_6\sin\theta_5 & \sin\theta_6\cos\theta_5 \end{vmatrix}$$

$$=P^{n-5}\sin^{n-6}\theta_{n-1}\sin^{n-7}\theta_{n-2}\cdots\sin^2\theta_7\sin\theta_6 \tag{6.7}$$

$$\therefore d^{n-4}P=P^{n-5}\sin^{n-6}\theta_{n-1}\sin^{n-7}\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_6 dPd\theta_{n-1}d\theta_{n-2}\cdots d\theta_6 d\theta_5 \tag{6.8}$$

$$0\leqslant\theta_i\leqslant\pi \qquad i=n-1,n-2,\cdots,7,6$$

$$0\leqslant\theta_5\leqslant 2\pi$$

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta=2=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+2)\right)}$$

$$\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{2}=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+2)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+3)\right)}$$

$$\cdots$$

$$\int_0^\pi \sin^{n+1}\theta d\theta=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+2)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+3)\right)} \tag{6.9}$$

$$z\Gamma(z)=\Gamma(z+1)$$

$$\Gamma(1)=1,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},\cdots$$

$$\therefore \qquad I_n=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-5)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-4)\right)}\cdot\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-6)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-5)\right)}$$

$$\cdots\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1+2)\right)}\cdot 2\pi$$

$$\cdot\int d^4\bar{p}\int_0^\infty P^{n-5}dP\, f(\bar{p}^2+P^2,\bar{p}\cdot k_i,k_i^2,k_i\cdot k_j)$$

$$=\frac{2\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}\int d^4\bar{p}\int_0^\infty P^{n-5}dP\, f(\bar{p}^2+P^2,\bar{p}\cdot k_i,k_i^2,k_i\cdot k_j) \tag{6.10}$$

以下继续 dP 积分，为此，先给出一个公式如下：

$$\int_0^\infty dx \frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha} = \frac{1}{2} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}} \tag{6.11}$$

这个公式是在满足收敛条件的情况下积分得出的。从(6.11)左方可看出收敛条件是:

$2\alpha-\beta-1>0$　　　紫外收敛

$\beta>-1$　　　红外收敛

在满足收敛条件的前提下,把(6.11)左方写成:

$$\frac{1}{(M^2)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}}\int_0^\infty dy \frac{y^\beta}{(y^2+1)^\alpha}$$

$$= \frac{1}{(M^2)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cdot \sin^\beta\theta \cdot \cos^{2\alpha-\beta-1}\theta。 \tag{6.12}$$

再用部分积分法把积分中的 $\cos\theta$ 的幂次降到最低。分别取 β = 偶数和 β = 奇数两种情况作积分,结果都得到(6.11)。

所以,在 $2\alpha-\beta-1>0, \beta>-1$ 的条件下,(6.11)成立。

根据(6.11),就又得到以下一些公式:

(i)

$$\int d^n p \frac{1}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^2} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}} \tag{6.13}$$

[左方 $= \int d^4\bar{p}\int_0^\infty P^{n-5}dP \frac{1}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^\alpha} \cdot \frac{2\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\alpha-\frac{n-4}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\cdot \int d^4\bar{p} \frac{1}{(\bar{p}^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^{\alpha-\frac{n-4}{2}}} = \frac{\pi^{\frac{n-4}{2}}\Gamma\left(\alpha-\frac{n-4}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\cdot \frac{i\pi^2}{\left(\alpha-\frac{n-4}{2}-1\right)\left(\alpha-\frac{n-4}{2}-2\right)(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}$$

此地利用了(6.10)和下式:

$$\int \frac{d^4k}{(k^2+l-2p\cdot k)^m} = \frac{i\pi^2}{(m-1)(m-2)(l-p^2)^{m-2}} \tag{*}$$
]

(ii)

$$\int d^n p \frac{p_\mu}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)(-k_\mu)}{\Gamma(\alpha)(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}} \tag{6.14}$$

$$\left[\begin{aligned}
\text{左方} &= \frac{-1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial k_\mu}\int \mathrm{d}^n p \frac{1}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^{\alpha-1}} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha-1}\frac{\partial}{\partial k_\mu}\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-1)(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}} \\
&= -\frac{\alpha-1-\frac{n}{2}}{\alpha-1}k_\mu\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha-1)(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}
\end{aligned}\right.$$

(iii) $$\int \mathrm{d}^n p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{2}\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)k_\mu k_\nu}{(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\right] \tag{6.15}$$

$$\left[\begin{aligned}
\text{左方} &= \frac{-1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial k_\nu}\int \mathrm{d}^n p \frac{p_\mu}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^{\alpha-1}} \\
&= \frac{-1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial k_\nu}\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)(-k_\mu)}{\Gamma(\alpha-1)(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}} \\
&= \text{右方}
\end{aligned}\right.$$

(iv) $$\int \mathrm{d}^n p \frac{p^2}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{n}{2}\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)k^2}{(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\right] \tag{6.16}$$

两种做法:一种直接自(6.15)得到(6.16),其中取 $\delta_{\mu\mu}=n$。另一种则是取

$$\text{左方} = \int \mathrm{d}^n p \frac{\bar{p}^2+P^2}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^\alpha}$$

$$= \int \mathrm{d}^n p \frac{\bar{p}^2}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha}+\int \mathrm{d}^n p \frac{P^2}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^\alpha}$$

$$\text{第一项} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{4}{2}\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)k^2}{(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\right]$$

(利用(6.15),取 $\bar{p}_\mu,\bar{p}_\nu$ 分量)。

$$\text{第二项} = \int \mathrm{d}^4\bar{p}\int_0^\infty P^{n-3}dP\frac{1}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m_2)^\alpha}\cdot\frac{2\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}\int \mathrm{d}^4\bar{p}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)(\bar{p}^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^{\alpha-\frac{n-2}{2}}}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\cdot \frac{i\pi^2}{\left(\alpha-\frac{n-2}{2}-1\right)\left(\alpha-\frac{n-2}{2}-2\right)(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n-2}{2}-2}}$$

$$=\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}$$

(利用(6.11)和(*)),可见两种做法一致,而且应该取 $\delta_{\mu\mu}=n$。

(v) $$\int d^n p\,\frac{p_\mu p_\upsilon p_\lambda}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha}$$

$$=-\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{2}(\delta_{\mu\upsilon}k_\lambda+\delta_{\upsilon\lambda}k_\mu+\delta_{\lambda\mu}k_\upsilon)\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)k_\lambda k_\mu k_\upsilon}{(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\right] \tag{6.17}$$

(直接对(6.15)作$\frac{\partial}{\partial k_\lambda}$微商,就得到(6.17))

(vi) $$\int d_p^n\,\frac{p_\mu p^2}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha}$$

$$=\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)}(-k_\mu)\left[\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{n+2}{2}+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)k^2}{(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\right] \tag{6.18}$$

(在(6.17)中取 $\lambda=\upsilon$ 求和,令 $\delta_{\lambda\lambda}=n$,就得到(6-18))。

(vii) $$\int d^n p\,\frac{p_\mu p_\upsilon p_\lambda p_\rho}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha}$$

$$=\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\left[\frac{\Gamma\left(\alpha-2-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-2-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{4}\cdot(\delta_{\mu\upsilon}\delta_{\lambda\rho}+\delta_{\upsilon\lambda}\delta_{\mu\rho}+\delta_{\lambda\mu}\delta_{\upsilon\rho})\right.$$

$$+\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cdot(\delta_{\mu\upsilon}k_\lambda k_\rho+\delta_{\upsilon\lambda}k_\mu k_\rho+\delta_{\lambda\mu}k_\upsilon k_\rho+k_\lambda k_\mu\delta_{\upsilon\rho}+k_\upsilon k_\lambda\delta_{\mu\rho}+k_\mu k_\upsilon\delta_{\lambda\rho})$$

$$\left.+\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\cdot k_\lambda k_\mu k_\upsilon k_\rho\right] \tag{6.19}$$

(直接对(6.17)作$\frac{\partial}{\partial k_\rho}$微商,就得到(6.19))。

§6-2 光子自能图两例

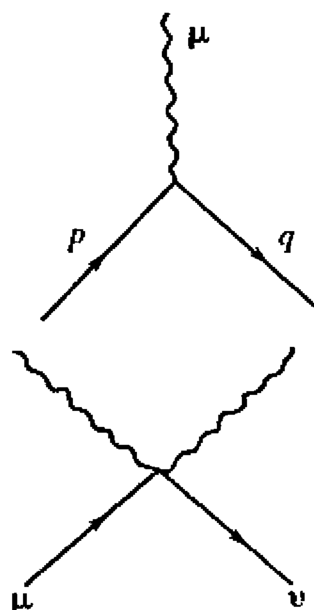
从下面两个例子可以看到,光子自能图的贡献确实都有($\delta_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu$)因子(见第五

章的讨论）。

例一　光子与带电标量粒子相互作用

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -(\partial_\mu \varphi^+ + ieA_\mu \varphi^+)(\partial_\mu \varphi - ieA_\mu \varphi) - m^2 \varphi^+ \varphi \\
&= -\partial_\mu \varphi^+ \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^+ \varphi \\
&\quad + ie((\partial_\mu \varphi^+)\varphi - \varphi^+ (\partial_\mu \varphi))A_\mu \\
&\quad - e^2 \varphi^+ \varphi A_\mu A_\mu
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

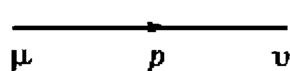
费曼规则：



$$i \times ie[(ip_\mu) - (-iq_\mu)] = -ie(p_\mu + q_\mu) \tag{6.21}$$

$$i(-2e^2)\delta_{\mu\upsilon} \tag{6.22}$$

（因子 2 来自 $A_\mu A_\mu$ 有两种连接方式）。



$$\frac{-i}{p^2 + m^2} (\varphi \text{ 的传播子}) \tag{6.23}$$

为了使矩阵元在时空维数延拓到 n 时，仍保持原先的量纲，必须引入一个带质量量纲的参数 μ（以后第十章讨论重正化群时，将看到 μ 起重要作用）。于是最低次光子自能图的费曼积分是$\left(\text{略去}\frac{1}{(2\pi)^4}\right)$：

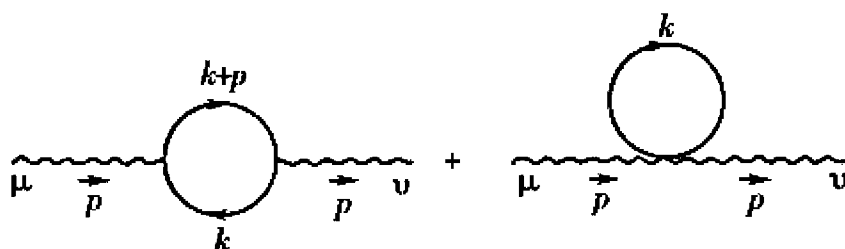


图　6.1

$$
\begin{aligned}
&\mu^{4-n} e^2 \int d^n k \left[(-i)^2 (-i)^2 \frac{(2k+p)_\mu (2k+p)_\upsilon}{(k^2+m^2)((k+p)^2+m^2)} + i \cdot i \frac{2\delta_{\mu\upsilon}}{(k^2+m^2)} \right] \\
&= \mu^{4-n} e^2 \int_0^1 dx \int d^n k \frac{4k_\mu k_\upsilon + 2k_\mu p_\upsilon + 2p_\mu k_\upsilon + p_\mu p_\upsilon - 2(k^2 + 2kp + p^2 + m^2)\delta_{\mu\upsilon}}{(k^2 + 2px \cdot k + p^2 x + m^2)^2} \\
&= \mu^{4-n} e^2 \int_0^1 dx \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{(p^2 x(1-x) + m^2)^{2-\frac{n}{2}}} \left\{ \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) p_\mu p_\upsilon (4x^2 - 4x + 1) \right. \\
&\quad - 2\delta_{\mu\upsilon} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) p^2 x^2 + 2\delta_{\mu\upsilon} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right)\left(1 - \frac{n}{2}\right)(p^2 x(1-x) + m^2) \\
&\quad \left. - 4\delta_{\mu\upsilon}(-p^2 x)\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) - 2\delta_{\mu\upsilon}(p^2 + m^2)\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \mu^{4-n} e^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{(p^2 x(1-x)+m)^{2-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) \cdot \{p_\mu p_\nu (1-2x)^2 + \delta_{\mu\nu} p^2(-4x^2+6x-2)\}$$

$$= e^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)^{2-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{2}{n}\right) \cdot \{(1-2x)^2 (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) - (1-2x)\delta_{\mu\nu} p^2\}$$

因为 $x \to 1-x$ 时，别的都不变，只是 $(2x-1) \to -(2x-1)$，所以$\{\quad\}$中后一项在积分中消去。从而积分等于

$$e^2 \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)^{2-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) \cdot (1-2x)^2 (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) \qquad (6.24)$$

当 $n=4$，$\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)=\Gamma(0)$ 是发散的。可以把发散项分出来，利用

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin\pi x} \cdot (1-x)$$

x 很小时

$$\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin\pi x} \cdot \frac{1}{\Gamma(1-x)}\bigg|_{x\to 0} = \frac{\pi}{\left[\pi x - \frac{1}{3!}(\pi x)^3\right] \cdot (1-cx)}$$

$$= \frac{1}{x} - c \qquad (6.25)$$

又利用

$$\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)^{-(2-\frac{n}{2})} = e^{-(2-\frac{n}{2})\ln\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)}$$

$$= 1 - \left(2-\frac{n}{2}\right)\ln\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right) + \cdots \qquad (6.26)$$

把(6.25)，(6.26)合起来，n 很靠近 4 时：

$$\frac{1}{\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)^{2-\frac{n}{2}}} \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{1}{2-\frac{n}{2}} - c\right)\left(1 - \left(2-\frac{n}{2}\right)\ln\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{4-n} - \ln\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right) - c + O(n-4) \qquad (6.27)$$

由于 μ^2 是一个可变参数，所以 c 可以归入 μ^2 中，以后不必再把 c 写出来。把(6.27)代入(6.24)，略去 $O(n-4)$，就得到(n 很靠近 4 时)：

$$e^2 \int_0^1 \mathrm{d}x i\pi^2 \left(\frac{2}{4-n} - \ln\left(\frac{p^2 x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)\right)(1-2x)^2 (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) \qquad (6.28)$$

讨论：

1. (6.24)，(6.28) 中有 $(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2)$ 因子，满足第五章讨论过的规范不变性的要求，因为

$$p_\mu (p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p^2) = 0$$

2. (6.28)的第一项是$\frac{1}{4-n}$极点项，在维数正常化中，它代替了原来的发散项(在 $n=4$ 时发散)，它的留数是 p 的多项式，可以用抵消项消去。

3. (6.28)的第二项是有限的微扰修正项，它有一个参数 μ^2，μ^2 可以跑动。当 μ^2 跑动时，耦合常数(此地是 $e=z_1^{-1}z_2z_3^{-1/2}e_0$)和质量平方(即传播子的极点位置)也都会跟着跑动。所以，取不同的 μ^2，相当于在重正化微扰计算中取不同的重正化耦合常数和不同的重正化质量平方。在第十章中将看到，对应于不同的 μ^2 的重正化格林函数可以通过重正化群的方法使它们相互联系起来。特别是在强作用有渐近自由性质的情况下，p^2 很大时，可以取很大的 μ^2，此时重正化强作用耦合常数很小，从而可以用微扰方法来计算大的能量动量转移下的强相互作用的格林函数(见第十章和附录三)。

4. 从(6.28)还看到，如果取 $\mu^2=m^2$，则(6.28)的第二项在 $p^2=0$ 时为零。也就是说，取 $\mu^2=m^2$ 时，第五章讨论的 $\prod^c(p,m,e)$ (我们现在把 k 改写成 p)就满足 $\prod^c(p,m,e)\Big|_{p^2=0}=0$。所以此时有

$$\prod{}^c(p,m,e)=\bigcirc(p^2)\quad(\text{当 }\mu^2=m^2\text{ 时})$$

从而又有

$$\begin{aligned}\underline{D}'_{F\mu\nu}(p,m,e)\Big|_{p^2\to0}&=\frac{-i}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{1-\bigcirc(p^2)}\Bigg|_{p^2\to0}\\&\quad-\frac{i}{p^2}\frac{1}{\xi}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Bigg|_{p^2\to0}\\&\Rightarrow\frac{-i}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)-\frac{i}{p^2}\frac{1}{\xi}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\\&\qquad(\text{取费曼规范},\xi=1)\end{aligned}$$

一般情况下，不限于单圈图，也不限于 μ^2 取什么值，只要第一，e_0 保持不变，第二，A_μ^i 没有质量重正化项(在第五章的讨论中，已经由于规范不变性，A_μ^i 的质量重正化项 $\delta\mu_A^2=0$)，则在 μ^2 改变时，也就是在 Z_3 作有限的改变时(把 Z_3 换成 $\hat{Z}_3$，$\check{Z}_3$ 与 Z_3 相差一个有限数)，由于 Z 变了，重正化耦合常数(此地是 e)也要变，但 $\underline{D}'_{F\mu\nu}(p,m,e)$ 的极点位置不变。

这里具体说明一下，设有两种重正化：

第一种是

$$e_0=ez_1z_2^{-1}z_3^{-1/2}\qquad\qquad \xi_0=\xi z_3^{-1}$$

第二种是

$$e_0=\check{e}\check{z}_1\check{z}_2^{-1}\check{z}_3^{-1/2}\qquad\qquad \xi_0=\check{\xi}\check{z}_3^{-1}$$

e_0 不变，所以 $e\neq\check{e}$

ξ_0 不变，所以 $\xi\neq\check{\xi}$

自(5.88)

$$\begin{aligned}\underline{D}'_{F\mu\nu}(p,m,e)&=\frac{-i}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{z_3}\frac{1}{1-\pi'(p,m_0,e_0)}\\&\quad-\frac{i}{p^2}\frac{1}{z_3\xi_0}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}=\frac{-i}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{z_3-z_3\pi'(p,m_0,e_0)}\end{aligned}$$

$$-\frac{i}{p^2}\frac{1}{\xi}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}=\frac{-i}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{z_3-\pi^{重正}(p,m,e)}$$

$$-\frac{i}{p^2}\frac{1}{\xi}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

第二种重正化给出

$$\underline{\check{D}'_{F\mu\nu}}(p,\check{m},\check{e})=\frac{-i}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{\check{z}_3}\frac{1}{1-\pi'(p,m_0,e_0)}$$

$$-\frac{i}{p^2}\frac{1}{\check{z}_3\xi_0}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}=\frac{-i}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{\check{z}_3-\check{z}_3\pi'(p,m_0,e_0)}$$

$$-\frac{i}{p^2}\frac{1}{\check{\xi}}\frac{p_\mu p_\nu}{p_\mu}=\frac{-i}{p^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\frac{1}{\check{z}_3-\check{\pi}^{重正}(p,\check{m},\check{e})}$$

$$-\frac{i}{p^2}\frac{1}{\check{\xi}}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

在一般情况下,(6.28)的$\frac{2}{4-n}$扩充成为的多项式$f\left(\frac{1}{4-n}\right)$如下:

$$f\left(\frac{1}{4-n}\right)=\frac{\alpha}{4-n}+\frac{\beta}{(4-n)^2}+\cdots$$

同时,(6.28)的 ln 项(即不发散项)扩充成为

$$\pi^c(p^2)=\pi_0^c(p^2)+常数项$$

$$\pi_0^c(p^2)=\bigcirc(p^2)$$

假定 $\mu^2=\mu_0^2$ 时,常数项为0,并假定 z_1,z_2,z_3 对应于 $\mu^2=\mu_0^2$ 时的重正化,则有:

$$\pi^{重正}(p,m,e)=f\left(\frac{1}{4-n}\right)+\pi_0^c(p^2)$$

$$z_3=1+f\left(\frac{1}{4-n}\right)$$

$$\therefore \qquad z_3-\pi^{重正}(p,m,e)=1-\pi_0^c(p^2) \qquad (\text{A})$$

又假定 $\check{z}_1,\check{z}_2,\check{z}_3$ 对应于 $\mu^2\neq\mu_0^2$ 时的重正化,常数项$\neq0$。比方说此时

$$\check{\pi}^{重正}(p,\check{m},\check{e})=f\left(\frac{1}{4-n}\right)+\pi_0^c(p^2)+\alpha$$

$\left(\alpha\text{ 有限,发散部分 }f\left(\frac{1}{4-n}\right)\text{对于 }\pi^{重正}\text{和 }\check{\pi}^{重正}\text{是相同的}\right)$。我们就可以利用

$$\check{\pi}^{重正}(p,\check{m},\check{e})=\check{z}_3\pi'(p,m_0,e_0)$$

$$=\frac{\check{z}_3}{z_3}\pi^{重正}(p,m,e) \qquad (\text{B})$$

求出 $\check{z}_3$ 来。

这里我们要注意两点:

1. 如果有质量重正化项(例如在费米子的情况),必须 $m_0=\check{m}_0$,即 $\delta m=\delta\check{m}$。

2. $\pi^{重正}$和$\check{\pi}^{重正}$的发散部分相同，只相差一个有限常数 a。

现在取 $\check{z}_3$ 为如下形式：

$$\check{z}_3 = b + f\left(\frac{1}{4-n}\right)$$

因为需要减除的发散部分在 z_3 和 z_3 都是$f\left(\frac{1}{4-n}\right)$，是相同的。

再把$f\left(\frac{1}{4-n}\right)$看做是趋于无穷大的数，把$(4-n)$看做是趋于零的数。为了求出 b，把 $\check{\pi}^{重正}$，$\pi_3^{重正}$，$\check{z}_3$，z_3 代入(B)式，略去趋于零的数，得到

$$f\left(\frac{1}{4-n}\right) + \pi_0^c(p^2) + a = \frac{b + f\left(\frac{1}{4-n}\right)}{1 + f\left(\frac{1}{4-n}\right)}\left(f\left(\frac{1}{4-n}\right) + \pi_0^c(p^2)\right)$$

$$= b - 1 + f\left(\frac{1}{4-n}\right) + \pi_0^c(p^2)$$

$\therefore \quad b = a + 1$

$$\therefore \quad \check{z}_3 - \check{\pi}^{重正}(p, \check{m}, \check{e}) = 1 - \pi_0^c(p^2) \tag{C}$$

把(A)与(C)，$\underline{D}'$与$\check{\underline{D}}'$对比，可见 $\underline{D}'$的极点位置没有变。

例二 光子与带电费米子相互作用

和一般量子电动力学一样，取最低次光子自能图如下：

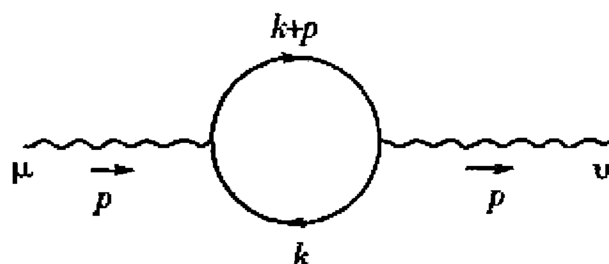


图 6.2

也引入带质量量纲的参数 μ。于是最低次光子自能图的费曼积分是：

$$(-1)(-1)(-1)\mu^{4-n}e^2\int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^4}\frac{T_r(\gamma_\mu(\hat{k}+\hat{p}+im)\gamma_\nu(\hat{k}+im))}{((k+p)^2+m^2)(k^2+m^2)}$$

$$= -\mu^{4-n}e^2 4\int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2n)^4}\frac{2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu - \delta_{\mu\nu}(m^2+k^2+p\cdot k)}{(k^2+2p\cdot kx+p^2x+m^2)^2}$$

$$= -4e^2\int_0^1 \mathrm{d}x\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{p^2x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)^{2-\frac{n}{2}}}\left\{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)p_\mu p_\nu(2x^2-2x)\right.$$

$$-\delta_{\mu\nu}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)p^2x^2 + \delta_{\mu\nu}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(p^2x(1-x)+m^2) - \delta_{\mu\nu}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)m^2$$

$$\left.+\delta_{\mu\nu}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)p^2x\right\}$$

$$= -\frac{i}{4\pi^2}e^2\int_0^1 dx \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{p^2x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)^{2-\frac{n}{2}}}\cdot(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2)2x(x-1) \tag{6.29}$$

可见也有$(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2)$因子,满足规范不变。和例一一样展开,得到

$$\frac{i}{12\pi^2}\cdot e^2\cdot\frac{2}{4-n}(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2)$$

$$+\frac{ie^2}{4\pi^2}\int_0^1 dx\ln\left(\frac{p^2x(1-x)+m^2}{\mu^2}\right)(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2)2x(x-1) \tag{6.30}$$

讨论:

1. 消去第一项(发散项)需要的抵消项是:

$$\Delta\mathscr{L} = \frac{e^2}{24\pi^2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2\frac{1}{4-n} \tag{6.31}$$

[$i\Delta\mathscr{L}$提供$2i\frac{e^2}{24\pi^2}(-2)(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2)\frac{1}{4-n} = \frac{-ie^2}{12\pi^2}\cdot\frac{2}{4-n}(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu}p^2)$,
其中第一个因子2来自$i\Delta\mathscr{L}$与外线有两种连接方式。

2. 第二项与通常的光子自能项一样。见[2]的(24.35),(24.40)。

§6-3 解析延拓问题

在例一、例二中有这样一个问题,就是$n=4$时并不满足收敛条件($n=4$时有紫外发散),那么(6.11),(6.13)~(6.19)是不是仍可以用?

为了得到有意义的结果,我们必须考虑如何来延拓n。在延拓n时,必须要求:

1. 费曼图在n取非整数时,也有确定的定义。

2. 当$n=4$时,原先收敛的费曼积分保持它原有的值,原无发散的费曼积分也能有确定的定义。发散的减除要能够用抵消项表达出来。

我们不仅要考虑紫外发散,还要考虑红外发散。根据(6.10),例一、例二的积分中有

$$\int_0^\infty k^{n-5}dk$$

当$n\leq4$,就也有红外发散。以下我们就来扩大解析区,以便延拓n,并重新定义这些费曼积分,使得重新定义的费曼积分在扩大的解析区中是有定义的函数。

n向负的方向延拓

因为(6.13)~(6.19)都是以(6.11)为出发点,所以就先来看(6.11)如何延拓。取$\beta+1-2\alpha<0,\beta>-1$,则下式可作部分积分(由于满足收敛条件,表面项为0):

$$\int_0^\infty dx\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha} = -\frac{2}{\beta+1}\int_0^\infty dx x^{\beta+2}\frac{d}{d(x^2)}\frac{1}{(x^2+M^2)^\alpha}$$

$$= -\frac{2}{\beta+1}\int_0^\infty dx\frac{-\alpha x^{\beta+2}}{(x^2+M^2)^{\alpha+1}} \tag{6.32}$$

经过这次部分积分后,解析条件已从$\beta+1-2\alpha<0,\beta>-1$扩大到$\beta+1-2\alpha<0,\beta>-3$。就是

说,β 的解析区向负的方向(向左)扩大了2。

这种部分积分可以继续进行下去(β 暂不取负整数),β 的解析区域也继续向负的方向扩展。同时,β 的解析区域的上限不变。

如果经过这样的延拓后,我们所要取的 β 的值(对应于所要取的 n 的值)已在解析区域内,则(6.32)的右方就可用来给出费曼积分的新的定义。并且根据(6.11)得到:

$$(6.32) = -\frac{2}{\beta+1}\cdot(-\alpha)\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)+1\right)\Gamma\left(\alpha+1-\frac{1}{2}(\beta+1)-1\right)}{\Gamma(\alpha+1)(M^2)^{\alpha+1-\frac{1}{2}(\beta+1)-1}}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}}$$

和(6.11)右方完全一样。所以说,用了新的定义,使扩大的解析区包括了所要取的 β 值之后,仍得到和(6.11)右方相同形式的结果。所以,这样的延拓可以给出与前自洽的新的费曼积分定义。

如果经过这样的延拓后,我们所要取的 β 的值仍不在解析区域内,则可继续取部分积分 λ 次,使扩大了的解析区域包括我们所要取的 β 的值:

$$\int_0^\infty dx\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}=\int_0^\infty dx\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\lambda-1)}{\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\left(\frac{\beta+3}{2}\right)\cdots\left(\frac{\beta+2\lambda-1}{2}\right)}\cdot\frac{x^{\beta+2\lambda}}{(x^2+M^2)^{\alpha+\lambda}} \qquad (6.33)$$

$$(\beta>-2\lambda+1)$$

然后再利用(6.11)得到

$$(6.33)=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\lambda-1)}{\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\left(\frac{\beta+3}{2}\right)\cdots\left(\frac{\beta+2\lambda-1}{2}\right)}$$

$$\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+2\lambda+1)\right)\Gamma\left(\alpha+\lambda-\frac{1}{2}(\beta+2\lambda+1)\right)}{\Gamma(\alpha+\lambda)(M^2)^{\alpha+\lambda-\frac{1}{2}(\beta+2\lambda+1)}}$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}}$$

由此可见,当 $\beta>-2\lambda-1$,则用(6.33)右方作为新的积分定义,仍得到和(6.11)右方相同形式的结果。所以这新的积分定义也是前后自洽的。

总之,如果 β 不满足红外收敛条件,可通过部分积分方式把 β 的解析区域向负的方向扩大,扩大后,仍得和(6.11)形式相同的结果。

我们还注意到,当 $\beta=n-5$,则 $n=4$ 时,$\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)=\Gamma(0)$有发散。然而在计算(6.13)式时,分子上的 $\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-4)\right)$,与分母上的 $\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-4)\right)$正好消去。所以,β 取负整数时,虽然(6.11)有发散,但(6.13)并不因 β 为负整数而出现与(6.11)的这个发散因子有关的奇异性。

也是从(6.11)的积分人手($\beta+1-2\alpha<0;\beta>-1$):

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}=\int_0^\infty dx\,\frac{dx}{dx}\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}$$

$$=\frac{x^{\beta+1}}{(x^2+M^2)^\alpha}\bigg|_0^\infty-\int_0^\infty dx\cdot x\left(\frac{\beta x^{\beta-1}}{(x^2+M^2)^\alpha}-\frac{2\alpha x^{\beta+1}}{(x^2+M^2)^{\alpha+1}}\right)$$

$$=-\beta\int_0^\infty dx\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}+2\alpha\int_0^\infty dx\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}$$

$$-\int_0^\infty dx\,\frac{2\alpha M^2x^\beta}{(x^2+M^2)^{\alpha+1}}$$

$$\therefore\qquad\int_0^\infty dx\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}=\frac{-2\alpha M^2}{(1+\beta-2\alpha)}\int_0^\infty dx\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^{\alpha+1}}\tag{6.34}$$

经过这次部分积分后,解析条件已从$\beta+1-2\alpha<0,\beta>-1$扩大到$\beta+1-2\alpha-2<0,\beta>-1$。就是说,$\beta$的解析区向正的方向(向右)扩大了2。

如果经过这样延拓后,β、α已在解析区内,则(6.34)的右方就可作为费曼积分的新的定义的出发点,并用(6.11)得到:

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}=\frac{-2\alpha M^2}{(1+\beta-2\alpha)}$$

$$\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha+1-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha+1)(M^2)^{\alpha+1-\frac{1}{2}(\beta+1)}}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}}$$

与(6.11)的右方完全一样。所以说,用了新的定义后,仍得到和(6.11)同样的结果,是自洽的。

如果经过这样延拓后,β、α仍不在解析区内,则可继续取部分积分若干次,使β的解析区向右(正的方向)扩大,或α的解析区向左(负的方向)扩大,直到满足

$$\beta>-1,\beta+1-2\alpha-2\lambda<0$$

为止。然后又可利用(6.11),并得到

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^\alpha}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\lambda-1)M^{2\lambda}}{\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\left(\alpha+1-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\cdots\left(\alpha+\lambda-1-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}$$

$$\int_0^\infty dx\,\frac{x^\beta}{(x^2+M^2)^{\alpha+\lambda}}$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\lambda-1)M^{2\lambda}}{\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\left(\alpha+1-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\cdots\left(\alpha+\lambda-1-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}$$

$$\cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha+\lambda-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha+\lambda)(M^2)^{\alpha+\lambda-\frac{1}{2}(\beta+1)}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\left(\Gamma\frac{1}{2}(\beta+1)\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha)(M^2)^{\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)}}$$

仍与(6.11)右方完全一样。所以即使经过多次部分积分后重新定义费曼积分,仍得到直接从(6.11)出发所得到的结果,是自洽的。

正如前面所说,$\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)$在 $\beta=-1$ 时的发散(这是红外发散。事实上 $\beta=n-5$,$\Gamma\left(\frac{1}{2}(\beta+1)\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-4)\right)$,在(6.13)中是被(6.10)积分中出现的$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}$所抵消的。但是,$\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{2}(\beta+1)\right)$在 $\alpha=\frac{1}{2}(\beta+1)$时的发散(相当于紫外发散)并不抵消。以下为了验证上述延拓办法的自洽性,我们将不再用(6.11)式来延拓,而是直接延拓(6.13)式。

(6.13)中 n 向正的方向的延拓

$$I_n = \int d^n p \frac{1}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^\alpha} = \int d^4\bar{p}\int P^{n-5}dP \frac{1}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^\alpha}$$

$$\cdot \frac{2\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)} = I_n' \cdot \frac{2\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)} \tag{6.35}$$

如果满足收敛条件 $2\alpha>n$,就可用(6.11)导出(6.13),和以前一样。如果不满足收敛条件,有紫外发散,就仿照前面 n 向正的方向延拓的办法,用部分积分方法重新定义 I_n:

先假定 I_n' 满足收敛条件 $2\alpha>n$,则

$$I_n' = \int d^4\bar{p}\int P^{n-5}dP \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{\partial P}{\partial P}+\frac{\partial\bar{p}_1}{\partial\bar{p}_1}+\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial\bar{p}_2}+\frac{\partial\bar{p}_3}{\partial\bar{p}_3}+\frac{\partial\bar{p}_4}{\partial\bar{p}_4}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{(\bar{p}^2+P^2+2\cdot k\cdot\bar{p}+m^2)^\alpha}$$

$$= \frac{\alpha}{5}\int d^4\bar{p}\int P^{n-5}dP$$

$$\cdot(2\bar{p}_1(\bar{p}_1+k_1)+2\bar{p}_2(\bar{p}_2+k_2)+2\bar{p}_3(\bar{p}_3+k_3)+2\bar{p}_4(\bar{p}_4+k_4)+2P^2)$$

$$\cdot \frac{1}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^{\alpha+1}}$$

$$-\frac{n-5}{5}\int d^4\bar{p}\int P^{n-5}dP \frac{1}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^\alpha}$$

$$= -\frac{n-5}{5}I_n' + \frac{2\alpha}{5}I_n' - \frac{2\alpha}{5}\int d^4\bar{p}\int P^{n-5}dP \frac{k\cdot\bar{p}+m^2}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^{\alpha+1}}$$

$$\therefore \qquad I_n' = -\frac{2\alpha}{n-2\alpha}\int d^4\bar{p}\int P^{n-5}dP \frac{k\cdot\bar{p}+m^2}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^{\alpha+1}} \tag{6.36}$$

在部分积分时，由于 I_n' 满足收敛条件 $2\alpha > n$，所以积分表面项消去。现在，(6.36)的收敛条件是 $2\alpha > n-1$，α 向左（向负的方向）扩展了1。如果 I_n' 不满足 $2\alpha > n$，但是满足 $2\alpha > n-1$，则我们就用(6.36)作为积分 I_n' 的新的定义。

看一看新的定义的自洽性。由于 I_n' 收敛（满足 $2\alpha > n-1$），可以利用(6.13)，(6.14)来把 I_n' 积分（把(6.36)代入(6.35)）：

$$I_n = \frac{-2\alpha}{n-2\alpha}\int d^n p \frac{k\cdot p + m^2}{(p^2+2k\cdot p+m^2)^{\alpha+1}}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-\frac{n}{2}}\left[\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{(m^2-k^2)^{\alpha+1-\frac{n}{2}}}\frac{\Gamma\left(\alpha+1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}(-k^2)\right.$$

$$\left.+\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{(m^2-k^2)^{\alpha+1-\frac{n}{2}}}\frac{\Gamma\left(\alpha+1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}m^2\right] = i\pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}$$

和(6.13)完全一样。所以说，如果 I_n 不满足收敛条件 $2\alpha > n$，可以如上作部分积分重新定义 I_n，所得结果与(6.13)一致，所以能自洽。如果一次部分积分扩大收敛区后仍不收敛，可以作若干次部分积分，把收敛区扩大若干次。这样重新定义的 I_n 在积分后也得和(6.13)一样的结果，也是自洽的。

总体来看，我们的做法是：如果费曼积分不收敛，就通过部分积分的办法来扩大收敛区。扩大收敛区后的维数正常化积分仍旧是(6.13)～(6.19)的形式。所以在费曼积分不收敛的情况下，(6.13)～(6.19)仍可用。

紫外发散在重新定义后归结为$\frac{1}{n-4}$极点

取一个一般的费曼积分：

$$I_n = \int d^4\bar{p}dP \frac{\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}P^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^2]^{\alpha_i}}$$

$$= \int d^4\bar{p}dP\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{\partial\bar{p}_1}{\partial\bar{p}_1}+\frac{\partial\bar{p}_2}{\partial\bar{p}_2}+\frac{\partial\bar{p}_3}{\partial\bar{p}_3}+\frac{\partial\bar{p}_4}{\partial\bar{p}_4}+\frac{\partial P}{\partial P}\right)\frac{\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}P^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^2]^{\alpha_i}}$$

收敛条件为

$$v_1 > -1, v_2 > -1, v_3 > -1, v_4 > -1, v_5 > -1$$

$$5+(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)-2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_K) < 0$$

如果满足收敛条件，则部分积分的表面项为零，于是得到($p^2=\bar{p}_1^2+\bar{p}_2^2+\bar{p}_3^2+\bar{p}_4^2+P^2$)：

$$I_n = \int d^4\bar{p}dP\left(\frac{-1}{5}\right)\left[\frac{(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}P^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^2]^{\alpha_i}}\right.$$

$$\left.-\frac{\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}P^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^2]^{\alpha_i}}\sum_{i=1}^{K}\frac{2\alpha_i(p^2+\bar{p}\cdot k_i)}{(p+k_i)^2+m_i^2}\right]$$

$$= \int d^4\bar{p}dP\left(\frac{-1}{5}\right)\left[\frac{[(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)-2(\alpha_1+\cdots+\alpha_K)]\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}P^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^2]^{\alpha_i}}\right.$$

$$\left.+\frac{\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}P^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^2]^{\alpha_i}}\cdot\sum_{i=1}^{K}\frac{2\alpha_i(k_i^2+\bar{p}\cdot k_i+m_i^2)}{(p+k_i)^2+m_i^2}\right]$$

$$\therefore \quad I_n = \frac{-1}{5+(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)-2(\alpha_1+\cdots+\alpha_K)}I_n^{(1)} \tag{6.37}$$

$$I_n^{(1)} = \int d^4\bar{p}dP\frac{\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}P^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^2]^{\alpha_i}}\cdot\sum_{i=1}^{K}\frac{2\alpha_i(k_i^2+\bar{p}\cdot k_i+m_i^2)}{(p+k_i)^2+m_i^2} \tag{6.38}$$

其中幂次最高的项是

$$I_n^{(1)'} = \int d^4\bar{p}dP\frac{\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}\bar{p}^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^2]^{\alpha_i}}\cdot\sum_{i=1}^{K}\frac{2\alpha_i\bar{p}\cdot k_i}{(p+k_i)^2+m_i^2} \tag{6.39}$$

$I_n^{(1)}$ 和 $I_n^{(1)'}$ 的收敛条件都是：

$$5+(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)-2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_K)-1<0$$

与 I_n 的收敛条件对比，$I_n^{(1)}$ 和 $I_n^{(1)'}$ 的 n 的上限比 I_n 增加 1。若 I_n 不满足收敛条件，则可用(6.37)作为 I_n 的新的定义。如果 $I_n^{(1)}$ 仍不收敛，就要继续作部分积分，一直到收敛为止。并以这样得到的收敛的积分，作为 I_n 的新的定义。

自洽性问题前面已讨论过，这里就不再讨论。现在我们要做的是继续作部分积分，看一看紫外发散怎么归结为 $\frac{1}{n-4}$ 极点。

在作部分积分时，都从满足收敛条件的 n 出发，所以表面项都可取作零，每次积分后 n 收敛区都向右(向正的方向)扩大 1。用这种办法又得到($\Sigma v_i\to\Sigma v_i+1, \Sigma\alpha_i\to\Sigma\alpha_i+1$)：

$$I_n^{(1)'} = \frac{-1}{5+(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)-2(\alpha_1+\cdots+\alpha_K)-1}I_n^{(2)} \tag{6.40}$$

在 $I_n^{(2)}$ 中幂次最高的项是

$$I_n^{(2)'} = \int d^4\bar{p}dP\frac{\bar{p}_1^{v_1}\bar{p}_2^{v_2}\bar{p}_3^{v_3}\bar{p}_4^{v_4}P^{v_5}}{\prod_{i=1}^{K}[(p+k_i)^2+m_i^{2\alpha_i}]}$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{K}\left(\frac{2\alpha_i\bar{p}\cdot k_i}{(p+k_i)^2+m_i^2}\sum_{j=1}^{K}\frac{2(\alpha_j+\delta_{ij})\bar{p}\cdot k_j}{(p+k_j)^2+m_j^2}\right) \tag{6.41}$$

依此类推，经过 h 次部分积分后，重新定义的 I_n 中幂次最高的项是

$$\frac{-1}{5+(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)-2(\alpha_1+\cdots+\alpha_K)}$$

$$\cdot\frac{-1}{5+(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)-2(\alpha_1+\cdots+\alpha_K)-1}\cdot\cdots$$

$$\cdot\frac{-1}{5+(v_1+v_2+v_3+v_4+v_5)-2(\alpha_1+\cdots+\alpha_K)-(h-1)}I_n^{(h)'} \tag{6.42}$$

$I_n^{(h)'}$ 是 $I_n^{(h)}$ 中的幂次最高的项，它的收敛条件是

$$5 + (\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \upsilon_5) - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_K) - h < 0$$

所以在经过 h 次部分积分后，重新定义的 I_n 中的 n 的收敛区向右(向正的方向)扩大了 h。

重新定义的 I_n 中必有$\frac{1}{n-4}$极点。可以这样看，由于

$$I_n = \int d^4\bar{P}\int P^{n-5}dP \frac{\bar{p}_1^{\upsilon_1}\bar{p}_2^{\upsilon_2}\bar{p}_3^{\upsilon_3}\bar{p}_4^{\upsilon_4}}{\prod_{i=1}^{K}(\bar{p}^2 + P^2 + 2\bar{p}\cdot k_i + m_i^2)\alpha_i}$$

所以有

$$4 + (\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4) - 2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) = D(\text{表现发散度})$$

$$\upsilon_5 = n - 5$$

于是

$$5 + (\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \upsilon_5) - 2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_K)$$
$$= n + (\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \upsilon_4) - 2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_K) = n + D - 4 \quad (6.43)$$

从而代入(6.42)后得知，经 $D+1$ 次部分积分而重新定义的 I_n 中的幂次最高的项是：

$$\sim \frac{-1}{n+(D-4)}\cdot\frac{-1}{n+(D-4)-1}\cdot\frac{-1}{n+(D-4)-2}\cdot\cdots$$
$$\cdot\frac{-1}{n+(D-4)-D}I_n^{(D+1)'} \quad (6.44)$$

由于 D 是表现发散度，所以经 $D+1$ 次部分积分后，$I_n^{(D+1)'}$ 在 $n=4$ 时是收敛的。而 $n=4$ 时的发散则表现为(6.44)中最靠近 $I_n^{(D+1)'}$ 的因子：

$$\frac{-1}{n+(D-4)-D} = \frac{-1}{n-4}$$

I_n 在 $D<0$ 时收敛；$D=0$ 时对数发散；$D=1$ 时一次发散。所以有紫外发散时，由于表现发散度 $D=0,1,2,\cdots$，(6.44)中必定会出现$\frac{1}{n-4}$极点项。这意味着在部分积分重新定义 I_n 之后，原先的紫外发散归结为$\frac{1}{n-4}$极点项。

总之，在单圈图的情况下，可以归纳以下几点：

1. $D\leqslant -1$：没有发散，也不出现$\frac{1}{n-4}$极点项，因为以 $D=-1$ 为例，(6.44)中只出现

$$\frac{-1}{n-5}\cdot\frac{-1}{n-6}\cdot\cdots$$

不会出现$\frac{1}{n-4}$极点。

2. $D\geqslant 0$：有发散。费曼积分经积分部分重新定义后，$n=4$ 的发散归结为$\frac{1}{n-4}$极点，而且是一个简单极点，因为 $n-4$ 时，$I_n^{(D+1)'}$ 积分收敛，其他因子也不发散。

3. 有发散时，代表发散的$\frac{1}{n-4}$极点项的留数是能量、动量和质量的多项式。

关于3. 再补充说明一下。首先看(6.13)～(6.19)，可以看到维数正常化积分得到

的各项总是呈现如下

$$\frac{\Gamma\left(\alpha-l-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-l-\frac{n}{2}}}\times(k,m\text{ 的多项式})$$

的形式。Γ 函数的宗量和分母的幂次相同,都是$\left(\alpha-l-\frac{n}{2}\right)$,于是有三种情况:$\alpha-l\geqslant3$,$n=4$ 时没有发散,没有$\frac{1}{n-4}$极点项。

$\alpha-l=2$,如前展开,得到

$$\text{积分}\sim\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\left[1-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln\left(\frac{m^2-k^2}{\mu^2}\right)\right]\times(k,m\text{ 的多项式})$$

所以$\frac{1}{2-\frac{n}{2}}$极点项的留数为 k,m 的多项式。

$\alpha-l=1$,$n\sim4$ 时,得到

$$\text{积分}\sim\frac{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{1-\frac{n}{2}}}\times(k,m\text{ 的多项式})$$

$$=\frac{1}{1-\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{1-\frac{n}{2}}}\times(k,m\text{ 的多项式})$$

$$\sim\frac{1}{-1}\cdot\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\cdot(m^2-k^2)\times(k,m\text{ 的多项式})$$

所以$\frac{1}{2-\frac{n}{2}}$极点项的留数为 k,m 的多项式。$\alpha-i<1$ 与 $\alpha-i=1$ 的情况类似。

关于极点项的留数为 k,m 的多项式,在第七章将有进一步的证明。

正因为$\frac{1}{n-4}$极点项的留数是 k,m 的多项式,不含有 $\ln(m^2-k^2)$ 或$\frac{1}{m^2-k^2}$等,所以完全可以用 $\mathscr{L}^0(x)$ 中的抵消项来把发散项(极点项)减除掉(见第五章)。

§6-4 γ_5 反常问题

在有费米子的情况,计算中会出现成串的 γ 矩阵的迹,计算这些迹要依靠下式:

$$\begin{aligned}&\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\delta_{\mu\nu}\\&Tr(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4\delta_{\mu\nu}\qquad\qquad\mu,\nu=1,2,3,4\\&Tr(\text{奇数个 }\gamma\text{ 相乘})=0\end{aligned}\tag{6.45}$$

这些全都可以照搬到 n 维的情况,只要作如下改换:

$$\delta_{\mu\mu}=4\rightarrow\delta_{\mu\mu}=n$$

$$\delta_{\mu\gamma}\delta_{\mu\gamma} = 4 \rightarrow \delta_{\mu\gamma}\delta_{\mu\gamma} = n \tag{6.46}$$

其中 n 包括 $n=4$ 的情况。所以,有费米子时,如果只出现和需要计算 γ 矩阵的迹,则照样可用维数正常化方法(前面的例 2 已经用了这个方法),n 的变动($\neq 4$)也不致破坏 Slavnov 恒等式。但是,费米子的情况中如果出现 4 维时空的全反对称的 $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$(它不能一方面保持反对称性,同时又延拓到 $n\neq 4$,特别是 n 为非整数的情况),而且如果发散的 $1PI$ 中含有这个 $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$,则维数正常化方法就不能保证 Slavnov 恒等式了。

与此相对应,如果计算发散的 $1PI$ 时遇到 γ_5,由于

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta$$

$$Tr(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta) = 4\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$(\mu,\nu,\alpha,\beta = 1,2,3,4)$$

就也不能推广到 $n\neq 4$ 和 n 非整数的情况,维数正常化方法不能用,从而不能保证 Slavnov 恒等式的成立,不能保证不阻碍重正化的进行。

举一个例子。在费米子与中间玻色子既有矢量耦合,又有赝矢量耦合的情况下,就会出现上述那种 $1PI$。见下图:

这个图的费曼积分是:

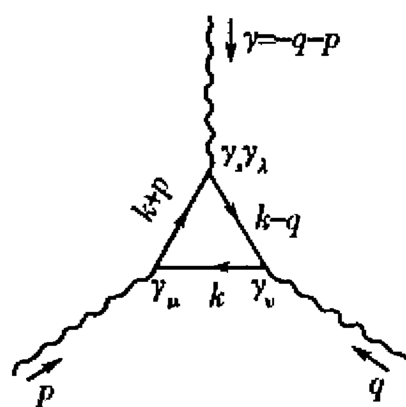


图 6.3

$$S_{\lambda\mu\nu}(p,q) \sim (-1)^4\int d^4k\,\frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda(\hat{p}+\hat{\kappa})\gamma_\mu(\hat{\kappa})\gamma_\nu(\hat{\kappa}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \tag{6.47}$$

(关于这个图的群指标,可参看第十章的有关讨论。不过在说明 γ_5 反常时,群指标可以略去)。它的贡献是顶角函数 $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r)$ 中的一部分。所以在 $\gamma_\lambda\Gamma^{abc}_{\mu\nu\lambda}(p,q,r)$ 中就会出现

$$\gamma_\lambda S_{\lambda\mu\nu}(p,q) \sim -\int d^4k\,\frac{Tr[\gamma_5(\hat{p}+\hat{q})(\hat{p}+\hat{\kappa})\gamma_\mu(\hat{\kappa})\gamma_\nu(\hat{\kappa}-\hat{q})]}{(p+q)^2k^2(k-q)^2} \tag{6.48}$$

这里把费米子质量取作 0,所以矢量流守恒,赝矢量流也守恒,从而(6.48)应等于 0。但事实上(6.48)并不等于 0,这就叫做"反常"。现在我们用维数正常化方法把(6.48)的积分求出来。

在积分中,p 和 q 都只有四个分量,不必因延拓 n 而增加分量;但 k 是积分变量,所以要增加分量。取

$$k = \underline{\kappa} + s$$

$\underline{\kappa}$ 代表前四个分量,s 是增加的分量。

又设 γ_5 与 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 反对易,但 γ_5 与延拓后增加的 γ 可对易。所以有

$$\left.\begin{aligned}&\hat{\kappa} = \hat{\underline{\kappa}} + \hat{s}\\&\gamma_5\hat{\underline{\kappa}} = -\hat{\underline{\kappa}}\gamma_5,\ \gamma_5\hat{s} = \hat{s}\gamma_5\\&\gamma_\mu\hat{s} = -\hat{s}\gamma_\mu(\mu = 1,2,3,4)\end{aligned}\right\} \tag{6.49}$$

由于 $\hat{s}=\hat{\kappa}-\hat{\underline{k}}$,所以又有

$$\gamma_5(\hat{\underline{k}}-\hat{\kappa}) = (\hat{\kappa}-\hat{\underline{k}})\gamma_5 \tag{6.50}$$

另外还有

$$\begin{aligned}\gamma_5(\hat{p}+\hat{q}) &= \gamma_5(\hat{p}+\hat{\kappa}) - \gamma_5(\hat{\kappa}-\hat{q}) \\ &= \gamma_5(\hat{p}+\hat{\kappa}) + (\hat{\kappa}-\hat{q})\gamma_5 - 2\gamma_5(\hat{\kappa}-\hat{\underline{k}})\end{aligned} \tag{6.51}$$

代入(6.48),并把时空维数延拓到 n:

$$\begin{aligned}r_\lambda S_{\lambda\mu\nu}(p,q) \sim &-\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5(p+k)^2\gamma_\mu\hat{\kappa}\gamma_\nu(\hat{\kappa}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\ &-\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5(\hat{p}+\hat{\kappa})\gamma_\mu\hat{\kappa}\gamma_\nu(k-q)^2]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\ &+2\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\hat{s}(\hat{p}+\hat{\kappa})\gamma_\mu\hat{\kappa}\gamma_\nu(\hat{\kappa}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2}\end{aligned}$$

前两项 $=0$,因为第一项消去 $(p+k)^2$ 后,不再含 p,k 积分后只与 q 相关,出现 $\sim\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q_\alpha q_\beta=0$;第二项消去 $(q-k)^2$ 后,不再含 q,k 积分后只与 p 有关,出现 $\sim\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}P_\alpha P_\beta=0$。于是

$$\begin{aligned}r_\lambda S_{\lambda\mu\nu}(p,q) &\sim 2\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\hat{s}(\hat{p}+\hat{\underline{k}}+\hat{s})\gamma_\mu(\hat{\underline{k}}+\hat{s})\gamma_\nu(\hat{\kappa}+\hat{s}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\ &= 2\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\hat{s}\gamma_\mu(-\hat{p}-\hat{\underline{k}}-\hat{s})(\hat{\underline{k}}+\hat{s})\gamma_\nu(\hat{\underline{k}}+\hat{s}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\ &\quad+2\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\hat{s}(2p_\mu+2\underline{k}_\mu)(\hat{\underline{k}}+\hat{s})\gamma_\nu(\hat{\underline{k}}+\hat{s}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2}\end{aligned}$$

第二项 $=0$,因 $\hat{s}$ 不含 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$,而 γ_5 需要和 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ 乘在一起,Tr 方才不为零,于是

$$\begin{aligned}r_\lambda S_{\lambda\mu\nu}(p,q) \sim &\,2\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\hat{s}\gamma_\mu(-\hat{p})(\hat{\underline{k}}+\hat{s})\gamma_\nu(\hat{\underline{k}}+\hat{s}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\ &-2\int d^n k \frac{(\underline{k}+s)^2 Tr[\gamma_5\hat{s}\gamma_\mu\gamma_\nu(\hat{\underline{k}}+\hat{s}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2}\end{aligned}$$

第二项 $=0$,理由同上。

$$\begin{aligned}r_\lambda S_{\lambda\mu\nu}(p,q) \sim &\,2\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\hat{s}\gamma_\mu(-\hat{p})(\hat{\underline{k}}+\hat{s})(-\hat{\underline{k}}-\hat{s}+\hat{q})\gamma_\nu]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\ &+2\int d^n k \frac{2(\underline{k}_\nu-q_\nu)Tr[\gamma_5\hat{s}\gamma_\mu(-\hat{p})(\hat{\underline{k}}+\hat{s})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2}\end{aligned}$$

第二项 $=0$,理由同上。

$$\begin{aligned}r_\lambda S_{\lambda\mu\nu}(p,q) \sim &\,2\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\hat{s}\gamma_\mu(-\hat{p})(\hat{\underline{k}}+\hat{s})\hat{q}\gamma_\nu]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\ &-2\int d^n k \frac{(\underline{k}+s)^2 T_r[\gamma_5\hat{s}\gamma_\mu(-\hat{p})\gamma_\nu]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2}\end{aligned}$$

第二项 $=0$,理由同上。

$$r_\lambda S_{\lambda\mu\nu}(p,q) \sim 2\int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\hat{s}\gamma_\mu(-\hat{p})\hat{s}\hat{q}\gamma_\nu]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2}$$

因为 $Tr[\gamma_5\hat{S}\gamma_\mu(-\hat{p})\hat{\underline{\kappa}}\hat{q}\gamma_\upsilon]=0$（$\gamma_\mu\hat{p}\hat{\underline{\kappa}}\hat{q}\gamma_\upsilon$ 中有五个带 $\mu=1,2,3,4$ 指标的 γ_μ）。

于是有

$$
\begin{aligned}
\gamma_\lambda S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q) &\sim -2\int d^n k\frac{S^2 Tr[\gamma_5\gamma_\mu\hat{p}\hat{q}\gamma_\upsilon]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\
&=-8\int d^n k\frac{S^2\varepsilon_{\mu\upsilon\sigma\tau}p_\sigma q_\tau}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\
&=-8\varepsilon_{\mu\upsilon\sigma\tau}p_\sigma q_\tau\int d^n k\frac{(k-\underline{\kappa})^2}{(k^2+2p\cdot k+p^2)k^2(k^2-2q\cdot k+q^2)} \\
&=-\int_0^1 dx\int_0^1 y dy\int d^n k\frac{8\varepsilon_{\mu\upsilon\sigma\tau}p_\sigma q_\tau(k-\underline{\kappa})^2}{(k^2+2pkxy-2qk(1-y)+p^2xy+q^2(1-y))^3}
\end{aligned}
$$

此地 $(k-\underline{\kappa})^2$ 的积分相当于(6.16)中的

$$
\int d^n p\frac{P^2}{(\bar{p}^2+P^2+2k\cdot\bar{p}+m^2)^\alpha}=\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{n-4}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)}{(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}}
$$

所以

$$
\gamma_\lambda S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q)\sim-\int_0^1 dx\cdot\int_0^1 y dy\frac{8\varepsilon_{\mu\upsilon\sigma\tau}p_\sigma q_\tau\cdot i\pi^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{(n-4)}{2}\cdot\Gamma\left(3-1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(3)(p^2xy+q^2(1-y)-(pxy-q(1-y))^2)^{3-1-\frac{n}{2}}}
$$

$$
=-8\varepsilon_{\mu\upsilon\sigma\tau}p_\sigma q_\tau\int_0^1 dx\int_0^1 y dy\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\left(\frac{n-4}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{2(p^2xy+q^2(1-y)-(pxy-q(1-y))^2)^{2-\frac{n}{2}}}
$$

当 $n=4$ 时，$\left(\frac{n-4}{2}\right)\cdot\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)=-\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)=-\Gamma(1)=-1$。分母也用以前的办法展开，由于没有极点因子 $\frac{1}{n-4}$，所以 $n=4$ 时分母为 1。于是，$n=4$ 时有

$$
r_\lambda S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q)\sim-8\varepsilon_{\mu\upsilon\sigma\tau}p_\sigma q_\tau\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}i\pi^2\cdot(-1)=i2\pi^2\varepsilon_{\sigma\mu\upsilon\tau}p_\sigma q_\tau
$$

再加上另一个图（$\mu\leftrightarrow\upsilon,p\leftrightarrow q$）的贡献，也是

$$
i2\pi^2\varepsilon_{\sigma\mu\upsilon\tau}p_\sigma q_\tau
$$

所以总的贡献是

$$
\gamma_\lambda S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q)\sim 4i\pi^2\varepsilon_{\sigma\mu\upsilon\tau}p_\sigma q_\tau \tag{6.52}
$$

和一般算出的 γ_5 反常一致。

用同样的方法还可以得到

$$
p_\mu S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q)=q_\upsilon S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q)=0 \tag{6.53}
$$

$$
\begin{aligned}
p_\mu S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q) &\sim\int d^n k\frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda(\hat{p}+\hat{\kappa})\hat{p}\hat{\kappa}\gamma_\upsilon(\hat{\kappa}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2} \\
&=\int d^n k\frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda(\hat{p}+\hat{\kappa})(\hat{p}+\hat{\kappa}-\hat{\kappa})\hat{\kappa}\gamma_\upsilon(\hat{\kappa}-\hat{q})]}{(p+k)^2k^2(k-q)^2}
\end{aligned}
$$

$$= \int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda\hat{k}\gamma_\upsilon(\hat{\kappa}-\hat{q})]}{k^2(k-q)^2} - \int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda(\hat{p}+\hat{\kappa})\gamma_\upsilon(\hat{\kappa}-\hat{q})]}{(p+k)^2(k-q)^2}$$

第一项=0,因 k 积分后只剩 $\varepsilon_{\lambda\upsilon\sigma\tau}p_\sigma q_\tau=0$(没有 p)。把第二项乘开来($Tr[\gamma_5\gamma_\lambda\hat{\kappa}\gamma_\upsilon\hat{\kappa}]=0$):

$$p_\mu S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q) \sim \int_0^1 dx \int d^n k \frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda\hat{p}\gamma_\upsilon\hat{q}] - Tr[\gamma_5\gamma_\lambda\hat{p}\gamma_\upsilon\hat{\kappa}] + Tr[\gamma_5\gamma_\lambda\hat{\kappa}\gamma_\upsilon\hat{q}]}{(k^2+2pkx-2qk(1-x)+p^2x+q^2(1-x))^2}$$

$$= \int_0^1 dx \frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda\hat{p}\gamma_\upsilon\hat{q}]i\pi^{\frac{n}{2}}}{(p^2x+q^2(1-x)-(px-q(1-x))^2)^{2-\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$- \int_0^1 dx \frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda\hat{p}\gamma_\upsilon(-\hat{p}x+\hat{q}(1-x))]i\pi^{\frac{n}{2}}}{(p^2x+q^2(1-x)-(px-q(1-x))^2)^{2-\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$+ \int_0^1 dx \frac{Tr[\gamma_5\gamma_\lambda(-\hat{p}x+\hat{q}(1-x))\gamma_\upsilon\hat{q}]i\pi^{\frac{n}{2}}}{(p^2x+q^2(1-x)-(px-q(1-x))^2)^{2-\frac{n}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= 0$$

分子正好抵消。对 $q_\upsilon S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q)=0$ 也可同样证明。所以(6.53)成立。如果费米子质量 $m\neq 0$,也可得到和(6.52),(6.53)相同的结果。

正如前面所说,在费米子质量为零时,应该不但有矢量流守恒,而且还有轴矢流守恒。即

$$r_\lambda S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q) = -(p+q)_\lambda S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q) = 0$$
$$p_\mu S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q) = 0$$
$$q_\upsilon S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q) = 0$$

但事实上不满足轴矢流守恒,所以叫反常。

反常是怎样来的?普通的做法是从 k 积分变数的平移变换来的,因为积分是一次发散。

现在,采用了维数正常化,n 延拓到 $\neq 4$,则可看到

$$r_\lambda S_{\lambda\mu\upsilon}(p,q) \sim \left(\frac{n-4}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)$$

在 $n=4$ 时,本来是 $\left(\frac{n-4}{2}\right)=0$,但由于 $\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)$ 提供了 $\frac{1}{n-4}$ 极点,结果就不是0,而是一个有限数,造成了反常。

从(6.51)还看到,如果是先把 γ_5 和 $(\hat{\kappa}-\hat{q})$ 对易,然后再扩充 k,则有

$$\gamma_5(\hat{p}+\hat{q}) = \gamma_5(\hat{p}+\hat{\kappa}) + (\hat{\kappa}-\hat{q})\gamma_5$$

这样就少了 $-2\gamma_5(\hat{\kappa}-\underline{\hat{\kappa}}) = -2\gamma_5\hat{s}$ 一项,(6.52)的反常也就没有了。所以,用维数正常化方法求 γ_5 反常时,要先把 $\hat{\kappa}$ 扩充到 n 维的 $\underline{\hat{\kappa}}+\hat{s}$,然后再挪动 γ_5 的位置。这个做法的好处是直接给出反常数值,不必在 k 如何平移的问题上多花工夫。

能够出现 γ_5 反常的图除 AVV(A 是轴矢流顶点,V 是矢量流顶点)外,还有 AAA 三点图,AVVV、AAAV 四点图,AVVVV、AAAVV、AVAAV、AAAAA 五点图。都是有奇数个 A 顶点,奇数个 γ_5。

有两条引理:一条是说反常项是不重正化的,最低次图如果没有反常,则各级高次图

也没有反常。另一条是说反常图是互相有联系的，如果最简单的三点图的反常不存在，则其他图形的反常也不存在[3,4,5]。

这里我们来看一看 W－S 模型的最低次三角图，并且说明如果费米子既包括轻子，又包括夸克，就可以把 γ_5 反常消去，从而就可以保证不破坏 Slavnov 恒等式，保证不阻碍重正化的实现。

W－S 模型	$U(1)$	$SU(2)$
$L=\begin{pmatrix}\upsilon\\ e\end{pmatrix}_L$	$Y=-1$	$T=\frac{1}{2}$
$R=e_R$	$Y=-2$	$T=0$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{轻子} &= -\bar{R}\gamma_\mu(\partial_\mu+ig'B_\mu)R-\bar{L}\gamma_\mu\left(\partial_\mu+\frac{ig'}{2}B_\mu-ig\frac{\tau^i}{2}-A_\mu^i\right)L \\
&= -\bar{e}\gamma_\mu(\partial_\mu+ig'B_\mu)\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e \\
&\quad -(\bar{\upsilon}\,\bar{e})\gamma_\mu\left(\partial_\mu+\frac{ig'}{2}B_\mu-ig\frac{\tau^i}{2}A_\mu^i\right)\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}\upsilon\\ e\end{pmatrix} \\
&= -\bar{e}\gamma_\mu\partial_\mu e-\bar{\upsilon}\gamma_\mu\partial_\mu\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\upsilon \\
&\quad -\bar{e}ig'B_\mu\left(\frac{3}{4}\gamma_\mu-\frac{1}{4}\gamma_\mu\gamma_5\right)e-\bar{\upsilon}ig'B_\mu\left(\frac{1}{4}\gamma_\mu+\frac{1}{4}\gamma_\mu\gamma_5\right)\upsilon \\
&\quad +(\bar{\upsilon}\,\bar{e})\frac{ig\tau^i}{2}A_\mu^i\frac{1}{2}(\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_5)\begin{pmatrix}\upsilon\\ e\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.54}
$$

有下列 γ_5 三角反常图：

<u>BBB</u>

(三角图：顶点 $B\gamma_\mu\gamma_5$、$B\gamma_\nu$、$B\gamma_\lambda$；内线 e, e, e)

提供$\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$因子，贡献 $-\frac{9}{64}\times$公共系数

(三角图：顶点 $B\gamma_\mu\gamma_5$、$B\gamma_\nu$、$B\gamma_\lambda$；内线 υ, υ, υ)

提供$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$因子，贡献$\frac{1}{64}\times$公共系数

相加 $-\frac{1}{8}\times$公共系数

<u>BAA</u>

(三角图：顶点 $B\gamma_\mu\gamma_5$、$A^i\gamma_\nu$、$A^i\gamma_\lambda$；内线 e, e, υ,e)

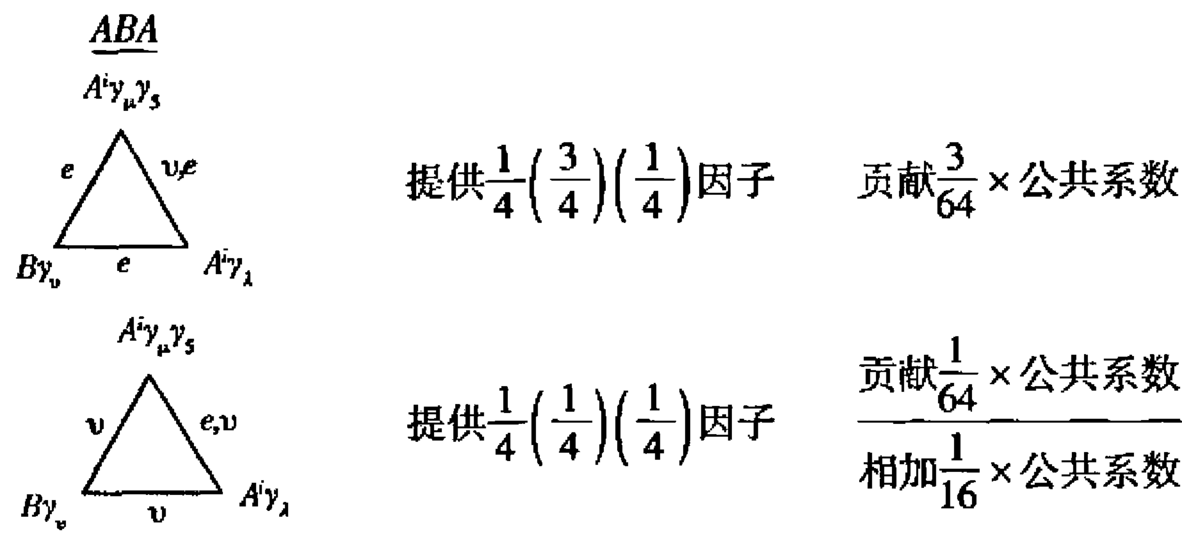
提供$\left(-\frac{1}{4}\right)$因子　　贡献 $-\frac{1}{4}\times$公共系数

(三角图：顶点 $B\gamma_\mu\gamma_5$、$A^i\gamma_\nu$、$A^i\gamma_\lambda$；内线 υ, υ, e,υ)

提供$\left(\frac{1}{4}\right)$因子　　贡献$\frac{1}{4}\times$公共系数

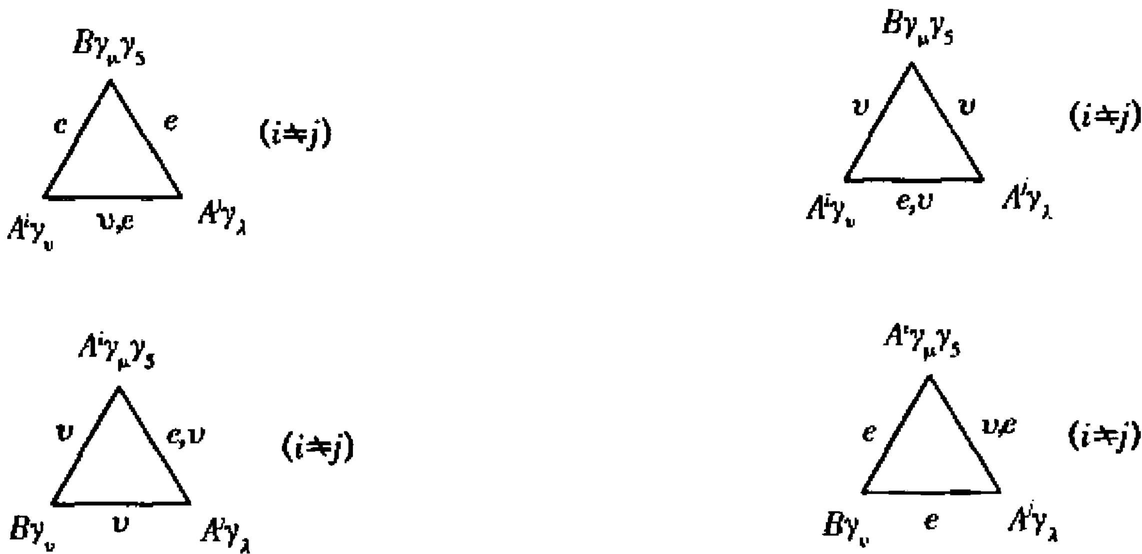
相加 0

（上下两图三角底线部分贡献相同，归人公共系数）。



（上下两图 A^iA^i 连线贡献相同，因为 $\tau^i\tau^i=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，式中 i 不求和）

另外还有如下的一些图：



当 A^iA^j 为 A^1A^3 和 A^2A^3 时，每个图都明显得零。当 A^iA^j 为 A^1A^2 时，取两个箭头方向相反的图，例如：



T_i 部分是相同的（见前面的计算），但 $\tau^1\tau^2$ 和 $\tau^2\tau^1$ 的贡献正好正负相反相消。所以，A^iA^j 为 A^1A^2 时，每个这一类的图（$i\neq j$）也都贡献为零。

GIM 模型	$U(1)$	$SU(2)$
$L=\begin{pmatrix}u\\d_c\end{pmatrix}_L$	$Y=1+y$	$T=\frac{1}{2}$
$u_R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)d_c$	$Y=2+y$	$T=0$
$d_{cR}=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)d_c$	$Y=y$	$T=0$

$(d_c = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c)$

$$L' = \begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix}_L \qquad Y = 1 + y \qquad T = \frac{1}{2}$$

$$c_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)c \qquad Y = 2 + y \qquad T = 0$$

$$s_{cR} = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)s_c \qquad Y = y \qquad T = 0$$

$(s_c = -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c)$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{夸克} = & -\bar{u}_R\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig'\left(1 + \frac{y}{2}\right)B_\mu\right)u_R - \bar{d}_{c_R}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig'\frac{y}{2}B_\mu\right)d_{c_R} \\
& - \bar{L}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig'\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)B_\mu - ig\frac{\tau^i}{2}A_\mu^i\right)L \\
& - \bar{c}_R\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig'\left(1 + \frac{y}{2}\right)B_\mu\right)c_R - \bar{s}_{c_R}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig'\frac{y}{2}B_\mu\right)s_{c_R} \\
& - \bar{L}'\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig'\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)B_\mu - ig\frac{\tau^i}{2}A_\mu^i\right)L' \\
= & -\bar{u}_R\gamma_\mu\partial_\mu\mu_c - \bar{d}_{c_R}\gamma_\mu\partial_\mu d_{c_R} - \bar{u}_L\gamma_\mu\partial_\mu u_L - \bar{d}_{c_L}\gamma_\mu\partial_\mu d_{c_L} \\
& - \bar{u}\gamma_\mu(-ig')\left(1 + \frac{y}{2}\right)B_\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u \\
& - \bar{d}_c\gamma_\mu(-ig')\frac{y}{2}B_\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)d_c \\
& - \bar{u}\gamma_\mu(-ig')\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)B_\mu\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)u \\
& - \bar{d}_c\gamma_\mu(-ig')\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)B_\mu\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)d_c \\
& - (\bar{u}\ \bar{d}_c)\gamma_\mu\left(-ig\frac{\tau^i}{2}A_\mu^i\right)\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\begin{pmatrix} u \\ d_c \end{pmatrix} \\
& - \bar{c}_R\gamma_\mu\partial_\mu c_R - \bar{s}_{cR}\gamma_\mu\partial_\mu s_{cR} - \bar{c}_L\gamma_\mu\partial_\mu c_L - \bar{s}_{c_L}\gamma_\mu\partial_\mu s_{c_L} \\
& - \bar{c}\gamma_\mu(-ig')\left(1 + \frac{y}{2}\right)B_\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)c \\
& - \bar{s}_c\gamma_\mu(-ig')\frac{y}{2}B_\mu\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)s_c - \bar{c}\gamma_\mu(-ig')\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)B_\mu\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)c \\
& - \bar{s}_c\gamma_\mu(-ig')\left(\frac{1}{2} + \frac{y}{2}\right)B_\mu\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)s_c \\
& - (\bar{c}\ \bar{s}_c)\gamma_\mu\left(-ig\frac{\tau^i}{2}A_\mu^i\right)\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\begin{pmatrix} c \\ s_c \end{pmatrix} \\
= & -\bar{u}\gamma_\mu\partial_\mu u - \bar{d}_c\gamma_\mu\partial_\mu d_c \\
& - \bar{u}ig'B_\mu\left(-\left(\frac{3}{4} + \frac{2y}{4}\right)\gamma_\mu - \left(-\frac{1}{4}\right)\gamma_\mu\gamma_5\right)u \\
& - \bar{d}_c ig'B_\mu\left(-\left(\frac{1}{4} + \frac{2y}{4}\right)\gamma_\mu - \left(\frac{1}{4}\right)\gamma_\mu\gamma_5\right)d_c
\end{aligned}$$

$$+(\bar{u}\,\bar{d}_c)\frac{iq\tau^i}{2}A_\mu^i\,\frac{1}{2}(\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_5)\begin{pmatrix}u\\ d_c\end{pmatrix}$$

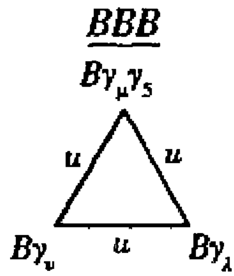
$$-\bar{c}\gamma_\mu\partial_\mu c-\bar{s}_c\gamma_\mu\partial_\mu s_c$$

$$-\bar{c}ig'B_\mu\left(-\left(\frac{3}{4}+\frac{2\gamma}{4}\right)\gamma_\mu-\left(-\frac{1}{4}\right)\gamma_\mu\gamma_5\right)c$$

$$-\bar{s}_c ig'B_\mu\left(-\left(\frac{1}{4}+\frac{2\gamma}{4}\right)\gamma_\mu-\left(\frac{1}{4}\right)\gamma_\mu\gamma_5\right)s_c$$

$$+(\bar{c}\,\bar{s}_c)\frac{iq\tau^i}{2}A_\mu^i\,\frac{1}{2}(\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_5)\begin{pmatrix}c\\ s_c\end{pmatrix} \tag{6.55}$$

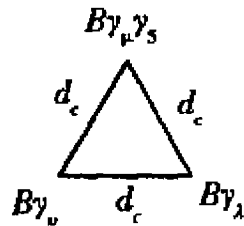
有下列 γ_5 三角反常图



提供 $-\left(-\frac{1}{4}\right)(-1)^2\left(\frac{3}{4}+\frac{2\gamma}{4}\right)^2$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{9+12\gamma+4\gamma^2}{16}\right)$因子

贡献$\frac{1}{4}\left(\frac{9+12\gamma+4\gamma^2}{16}\right)\times$公共系数

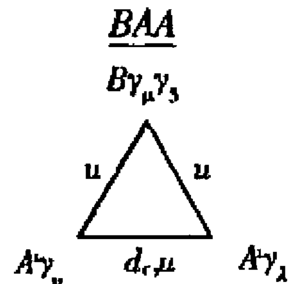


提供 $-\left(\frac{1}{4}\right)(-1)^2\left(\frac{1}{4}+\frac{2\gamma}{4}\right)^2$

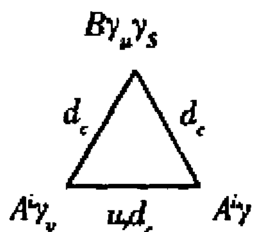
$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1+4\gamma+4\gamma^2}{16}\right)$因子

贡献 $-\frac{1}{4}\left(\frac{1+4\gamma+4\gamma^2}{16}\right)\times$公共系数

相加	$\frac{1+\gamma}{8}\times$公共系数
$\gamma=0$	$\frac{1}{8}\times$公共系数
$\gamma=-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{24}\times$公共系数



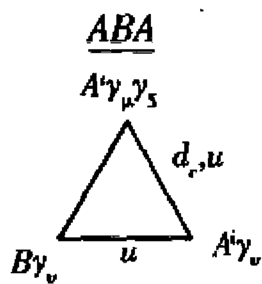
提供 $-\left(-\frac{1}{4}\right)$因子　　贡献$\frac{1}{4}\times$公共系数



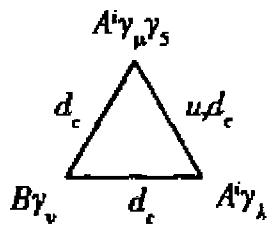
提供 $-\left(\frac{1}{4}\right)$因子　　贡献 $-\frac{1}{4}\times$公共系数

相加　0

(上下两图三角形底线部分的贡献相同)



提供$\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}-\frac{2\gamma}{4}\right)\frac{1}{4}$　贡献$\frac{1}{4}\left(\frac{-3-2\gamma}{16}\right)\times$公共系数



提供$\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-\frac{2\gamma}{4}\right)\frac{1}{4}$　贡献$\frac{1}{4}\left(\frac{-1-2\gamma}{16}\right)\times$公共系数

相加　$\frac{-1-\gamma}{16}\times$公共系数

$\gamma=0$　$\frac{-1}{16}\times$公共系数

$\gamma=-\frac{2}{3}$　$\frac{-1}{48}\times$公共系数

其他$A^iA^j(i\neq j)$三角图没有贡献如前。

于是我们看到：

$\gamma=0$时，夸克电荷为整数，一套u,d_c就正好可以把υ_e,e的最低次γ_5三角图的贡献抵消掉。

$\gamma=-\frac{2}{3}$时，夸克电荷非整数，三套u,d_c就正好可以把υ_e,e的最低次γ_5三角图的贡献抵消掉。

同样，$\gamma=0$时一套c,s_c，或$\gamma=-\frac{2}{3}$时三套c,s_c，都正好把υ_μ,μ的最低次γ_5三角图的贡献抵消掉。

另外有：

$A^i_\mu A^j_\nu A^k_\lambda$三角图有$Tr(\tau^i\tau^j\tau^k)=0$

$A^i_\mu B_\nu B_\lambda$三角图有$Tr(\tau^i)=0$

所以最低次γ_5反常三角图全都消去，为实现重正化扫除了障碍。

参考文献

1 G. t'Hooft, M. Veltman, Nucl. phys., B44(1972)189.

2 Н. Н, Боголюбов, Д. В. Ширков, Ввение в теорию квантованных лолей, Издание третье, Издательство《наука》1976.

3 W. A. Bardeen, Phys. Rev., 184(1969)1848.

4 R. Aviv, A. Zee, Phys. Rev., D5(1972)2372.

5 J. Wess, B. Zumino, Phys. Lett., 37B(1971)95.

第七章　两圈图、多圈图和有害极点的消去

前一章讨论了一圈图的维数正常化，现在接着讨论两圈图以至多圈图的维数正常化，特别是要讨论逐级（圈）减除发散的必要性以及在多圈图的情况下有害极点的消去。后一讨论是在协变规范的情况下进行的（非协变规范的情况还没有人作过这种讨论）。

§7－1　多圈图费曼积分的维数的扩充

设一个 1PI 费曼图有 l 个圈，则费曼积分的一般形式是（k 包括 $k_1,k_2,\cdots,k_i,\cdots$）：

$$I^{(l)} = \int d^4p_1 d^4p_2 \cdots d^4p_l f(p_1,p_2,\cdots p_l;k) \tag{7.1}$$

把时间空间的 1＋3 维扩充到 n 维，则有

$$\begin{aligned} I_n^{(l)} &= \int d^n p_1 d^k p_2 \cdots d^n p_l f(p_1,p_2,\cdots,p_l;k) \\ &= \int d^4\bar{p}_1 d^4\bar{p}_2 \cdots d^4\bar{p}_l \int d^{n-4}P_1 d^{n-4}P_2 \cdots d^{n-4}P_l f(p_1,p_2,\cdots,p_l;k) \end{aligned} \tag{7.2}$$

其中 $p_1=(\bar{p}_1,P_1),p_2=(\bar{p}_2,P_2),\cdots,p_l=(\bar{p}_l,P_l)$。

$\bar{p}_1,\bar{p}_2,\cdots,\bar{p}_l$ 是普通 4 维的矢量；$P_1,P_2,\cdots,P_l$ 是扩充到 n 维后的 $n-4$ 维的矢量。P 与 $\bar{p}$ 正交。

假设积分时按照 $d^{n-4}P_l,d^{n-4}P_{l-1},\cdots,d^{n-4}P_2,d^{n-4}P_1$ 的次序。由于 P_i 和 P_j 并不一定正交，为了在 n 维空间中先积分与角度无关的部分（相当于前一章的单圈图的 $P^{n-5}dP$ 积分），我们可以对 $P_1,P_2,\cdots,P_l$ 取如下的坐标；

P_1 的方向是坐标 1 的方向，$\omega_1=|P_1|$。

$P_2=((p_2)_1,\bar{p}_2)$。$(p_2)_1$ 是 P_2 在 1 方向的分量；$\bar{p}_2$ 指向方向 2，与 1 方向正交，$\omega_2=|\bar{p}_2|$。

$P_3=((p_3)_1,(p_3)_2,\bar{p}_3)$。$(p_3)_1,(p_3)_2$ 是 P_3 在 1，2 方向的分量；$\bar{p}_3$ 在方向 3，$\bar{p}_3$ 与 1，2 方向正交，$\omega_3=|\bar{p}_3|$。

……

$P_l=((p_l)_1,(p_l)_2,\cdots,(p_l)_{l-1},\bar{p}_l),(p_l)_1,(p_l)_2,\cdots,(p_l)_{l-1}$ 是 P_l 在 1,2,…,$l-1$ 方向的分量；$\bar{p}_l$ 的方向是坐标 l 的方向，它与 1,2,…,$l-1$ 方向正交，$\omega_l=|\bar{P}_l|$。这 l 个方向形成一个 l 维的坐标系。在这个坐标系中，$P_1,P_2,\cdots,P_l$ 可以用如下的 l 个矢量来表达：

$$q_1=\begin{bmatrix}\omega_1\\0\\0\\0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad q_2=\begin{bmatrix}(p_2)_1\\\omega_2\\0\\0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad q_3=\begin{bmatrix}(p_3)_1\\(p_3)_2\\\omega_3\\0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\quad q_l=\begin{bmatrix}(p_l)_1\\(p_l)_2\\(p_l)_3\\(p_l)_4\\\vdots\\(p_l)_{l-1}\\\\\omega_l\end{bmatrix} \tag{7.3}$$

P_i 与 P_j 的标积可表达为

$$P_iP_j = q_iq_j = (p_i)_1(p_j)_1 + (p_i)_2(p_j)_2 + \cdots + (p_i)_{i-1}(p_j)_{i-1} + \omega_i(p_j)_i \quad (i < j) \tag{7.4}$$

若 $I_n^{(l)}$ 和 f 是标量，则(7.2)中的积分函数可以写成

$$f(p_1, p_2, \cdots, p_l; k) = f(\bar{p}_i^2, \bar{p}_i \cdot \bar{p}_j, P_i^2, P_i \cdot P_j, \bar{p}_i \cdot k_i) \tag{7.5}$$

其中

$$P_i^2 = (p_i)_1^2 + \cdots + \omega_i^2, P_i \cdot P_j = (7.4)。$$

若 $I_n^{(l)}$ 是矢量或张量，则(7.2)中的积分函数是

$$f(p_1, p_2, \cdots, p_l; k) = (\bar{p}_i)_\alpha(\bar{p}_2)_\beta \cdots f'(p_1, p_2, \cdots, p_l; k) \tag{7.6}$$

这里 f' 是标量，可写成(7.5)的形式。(7.6)左方有 $(\bar{p}_1)_\alpha, (\bar{p}_2)_\beta, \cdots$，则可和前一章的做法一样，在 f' 的分母中引入适当的 $k_i \cdot \bar{p}_i$①（k 包括所有这些 k_i），然后再让 f' 对 $(k_1)_\alpha$，$(k_2)_\beta, \cdots$ 作微商。所以，只要标量的 $I_n^{(l)}$（和 f）能够通过延拓而重新定义，则矢量和张量的 $I_n^{(l)}$（和 f）就也可以通过延拓而重新定义（参看第六章关于重新定义积分和定义的自洽性的讨论）。所以这里将只讨论 $I_n^{(l)}$（和 f）为标量的情况。

回到(7.2)，考察其中的一个 $d^{n-4}P_i$ 的积分。注意 P_i 有 $n-4$ 个分量，即 $(p_i)_1$，$(p_i)_2, \cdots, (p_i)_{i-1}$ 和 $\bar{p}_i$ 所包括的 $n-3-i(=n-4-(i-1))$ 个分量。由于已经对 $d^{n-4}P_l$，$d^{n-4}P_{l-1}, \cdots, d^{n-4}P_{i+1}$ 作过积分，所以(7.3)看到，$\bar{p}_i(|\bar{p}_i| = \omega_i)$ 的积分在 $n-3-i$ 维空间中是各向同性的，可以利有(6.8)式先把角度积出来。于是

$$\begin{aligned}
\int d^{n-4}P_i &= \int d^{i-1}(p_i)\int d^{n-i-3}\bar{p}_i \\
&= \int d^{i-1}(p_i)\int_0^\infty \omega_i^{n-i-4}d\omega_i \sin^{n-i-5}\varphi_1 d\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-i-5}d\varphi_{n-i-5}d\varphi_{n-i-4} \\
&= \int d^{i-1}(p_i)\int_0^\infty \omega_i^{n-i-4}d\omega_i \cdot \frac{2\pi^{\frac{n-i-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}\right)} (i < l)
\end{aligned} \tag{7.7}$$

当 $i = l$ 时：

$$\begin{aligned}
\int d^{n-4}P_l &= \int d^{l-1}(p_l)\int d^{n-l-3}\bar{p}_e \\
&= \int d^{l-1}(p_l)\int_{-\infty}^\infty d\omega_l\theta(\omega_l) \cdot \omega_l^{n-l-4} \cdot \sin\varphi^{n-l-5} \cdot d\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{n-l-5}d\varphi_{n-l-5} \cdot d\varphi_{n-l-4} \\
&= \int d^{l-1}(p_2)\int_{-\infty}^\infty d\omega_l\theta(\omega_l) \cdot \omega_l^{n-l-4} \frac{2\pi^{\frac{n-l-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-l-3}{2}\right)}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

此地把 $\int_0^\infty d\omega_l$ 写成 $\int_{-\infty}^\infty d\omega_l\theta(\omega_l)$ 是为了后面讨论的方便。

再看(7.3)式，显然把与 l 图的动量无关的角度积分之后，剩下来的是 l 维空间中的积分（原先是 $n-4$ 维空间中的积分）。我们可以把 $\bar{p}_i$ 的 $n-i-3(=n-4-(i-1))$ 维的积分换成 q_i 的 l 维积分。

---

① 注：若 $k=0$ 则(7.6)的积分也得0。

现在把 q_i 的 l 维积分作出来(角度部分):

$$\int d^l q_i f(\omega_i) = \int d^{i-1}(p_i)\int_0^\infty \omega_i^{l-i} f(\omega_i)d\omega_i \sin^{l-i-1}\varphi_1 d\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{l-i-1} d\varphi_{l-i-1} d\varphi_{l-i}$$

$$= \int d^{i-1}(p_i)\int_0^\infty \omega_i^{l-i} f(\omega_i)d\omega_i \cdot \frac{2\pi^{\frac{l-i+2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}(i < l) \tag{7.9}$$

当 $i=l$ 时:

$$\int d^l q_l f(\omega_l) = \int d^{l-1}(p_l)\int_{-\infty}^\infty f(\omega_l)d\omega_l \tag{7.10}$$

这样,就可以把(7.7),(7.8)的积分用 $d^l q_i$, $d^l q_l$ 表达出来(l 维空间角度积分,不是 $n-4$ 维)。

选取 $f(\omega_1) = \omega_i^{(n-i-4)-(l-i)} = \omega_i^{n-l-4}$,就可自(7.7),(7.9)得到

$$\int d^{n-4}P_i = \int d^l q_i \omega_i^{n-l-4} \cdot \frac{2\pi^{\frac{n-i-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{l-i+1}{2}}}$$

$$= \pi^{\frac{n-l-4}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}\right)}\int d^l q_i \omega_i^{n-l-4} \qquad (i < l) \tag{7.11}$$

$i=l$ 时,取 $f(\omega_l) = \omega_l^{n-l-4}\theta(\omega^l)$,则自(7.8),(7.10)得到

$$\int d^{n-4}P_l = \int d^l q_l \omega_l^{n-l-4}\theta(\omega_l) \cdot \frac{2\pi^{\frac{n-l-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-l-3}{2}\right)}$$

$$= 2\pi^{\frac{n-l-4}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-l-3}{2}\right)}\int d^l q_l \omega_l^{n-l-4}\theta(\omega_l) \tag{7.12}$$

综合(7.11)和(7.12),得到

$$\int d^{n-4}P_1 \cdots d^{n-4}P_l = 2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-l-4}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}\right)}\right) \times \int d^l q_1 \cdots d^l q_l (\omega_1 \cdots \omega_l)^{n-l-4}\theta(\omega_l) \tag{7.13}$$

(7.13)中把 $d^{n-4}P_i$ 的 $n-4$ 维积分都换成了 $d^l q_i$ 的 l 维积分。但是(7.13)是在 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 取(7.3)的特殊坐标,并且按 $d^l q_l, d^l q_{l-1}, \cdots, d^l q_1$ 的次序进行积分而得到的。现在问,取一般的 q 坐标,积分也不限于上述次序,则 f 中的 P_i^2 可写成 q_i^2, $P_i \cdot P_j$ 可写成 $q_i \cdot q_j$,那么,$(\omega_1 \cdots \omega_l)$ 和 $\theta(\omega_l)$ 应写成什么?

我们写出如下的行列式:

$$
\det q = \begin{vmatrix} (q_1)_1 & (q_2)_1 \cdots (q_l)_1 \\ (q_1)_2 & (q_2)_3 \cdots (q_l)_2 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ (q_1)_l & (q_2)_l \cdots (q_l)_l \end{vmatrix} \tag{7.14}
$$

$(q_i)_j$ 是 q_i 在固定 l 维坐标轴 j 上的投影。

这里所取的固定 l 维坐标系是正交坐标系，(7.3)所取的 l 维坐标系也是正交坐标系。只是后者是随 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 的方向而在 l 维空间中旋转的①。所以(7.14)的 $(q_i)_j$ 与(7.3)的 q_i 有一定的转换关系。α_{ij}是转换矩阵的矩阵元，它反映了 $q_1, q_2, \cdots, q_l$ 的在上述固定的 l 维空间(也即(7.9)，(7.10)积分的 l 维空间)中的旋转(而不是 $n-4$ 维空间中的旋转)：

$$
\begin{pmatrix} (q_1)_1 \\ (q_1)_2 \\ \vdots \\ (q_1)_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2l} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} \cdots \alpha_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} (q_2)_1 \\ (q_2)_2 \\ \vdots \\ (q_2)_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2l} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} \cdots \alpha_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p_2)_1 \\ \omega_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$\cdots \quad \cdots$

$$
\begin{pmatrix} (q_l)_1 \\ (q_l)_2 \\ \vdots \\ (q_l)_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2l} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} \cdots \alpha_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p_l)_1 \\ (p_l)_2 \\ \vdots \\ (p_l)_{l-1} \\ \omega_l \end{pmatrix}
$$

合起来写成：

$$
\begin{pmatrix} (q_1)_1 & (q_2)_1 \cdots (q_l)_1 \\ (q_1)_2 & (q_2)_2 \cdots (q_l)_2 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ (q_1)_l & (q_2)_l \cdots (q_l)_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \cdots \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{2l} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} \cdots \alpha_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & (p_2)_1 \cdots (p_l)_1 \\ 0 & \omega_2 \cdots (p_l)_2 \\ 0 & 0 \cdots (p_l)_3 \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots \omega_l \end{pmatrix} \tag{7.15}
$$

因为 α_{ij}是直角坐标换到直角坐标的矩阵元，所以 $\mathrm{Det}\alpha = 1$，所以

---

① 在(7.9)、(7.10)中已经包括了 l 维空间的角度积分，考虑了这种旋转。注意角度积分后出现的 $\omega_i|\bar{P}_i|$ 是与 $\bar{P}_i$ 的方向无关的。

$$\mathrm{Det}q = \mathrm{Det}\alpha \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 & (p_2)_1 & \cdots (p_l)_1 \\ 0 & \omega_2 & \cdots (p_l)_2 \\ 0 & 0 & \cdots (p_l)_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots \ \omega_l \end{vmatrix} = \omega_1\omega_2\cdots\omega_l \tag{7.16}$$

又自(7.9)看到，$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{l-1}$都大于零，所以

$$\theta(\omega_l) = \theta(\omega_1\omega_2\cdots\omega_l) = \theta(\mathrm{Det}q) \tag{7.17}$$

(7.16)和(7.17)就是我们要找的一般情况下 $\theta(\omega_l)$ 和 $(\omega_1\omega_2\cdots\omega_l)$ 的表达式。代入(7.13)，就得到

$$\int \mathrm{d}^{n-4}P_1\cdots\mathrm{d}^{n-4}P_l = 2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-l-4}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}\right)}\right)$$

$$\times\int \mathrm{d}^l q_1\mathrm{d}^l q_2\cdots\mathrm{d}^l q_l(\mathrm{Det}q)^{n-l-4}\theta(\mathrm{Det}q) \tag{7.18}$$

这样就在一般情况下把 $n-4$ 维的积分换成了 l 维的积分。

§7－2　多圈图中 n 的延拓

n 向负的方向(向左)延拓

也是通过部分积分的方法。首先我们注意到：

$$(\mathrm{Det}q)^\alpha = \frac{1}{(\alpha+l)\cdots(\alpha+1)}\left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)(\mathrm{Det}q)^{\alpha+1} \tag{7.19}$$

证明：考察下式，

$$\left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)^\alpha(\mathrm{Det}q)^\alpha$$

$$= \left(\varepsilon_{i_1i_2\cdots i_j}\frac{\partial}{\partial(q_1)_{i_1}}\frac{\partial}{\partial(q_2)_{i_2}}\cdots\frac{\partial}{\partial(q_j)_{ij}}\right)^\alpha\left(\varepsilon_{k_1k_2\cdots k_j}(q_1)_{k_1}(q_2)_{k_2}\cdots(q_j)k_j\right)^\alpha$$

由于微商的次数等于 q 的幂次，所以全部微商后应该等于常数。问题是这个常数等于多少?

取$(\mathrm{Det}q)^\alpha$ 中的一项，它是 α 个(q_1)的分量、α 个(q_2)的分量、…、α 个(q_l)的分量的连乘积。先考察其中 α 个(q_1)的分量的连乘积。因为(q_1)是 l 维空间中的矢量，有 l 个分量：$(q_1)_1,\cdots,(q_1)_l$。所以 α 个(q_l)的分量连乘，有

$$\frac{(\alpha+l-1)(\alpha+l-2)\cdots l}{\alpha!} \tag{A}$$

种组合(在 α 个$(q_1)_i$ 中可以有相同的分量)。

再看其中的一种组合：

假定在这个组合中全都是相同的分量，例如 α 个$(q_1)_i$ 连乘：

$$(q_1)_i(q_1)_i\cdots(q_1)_i$$

则全部微分后得 $\alpha!$。

又假定在这个组合中有 m 个 $(q_1)_1$, n 个 $(q_1)_2$, $\alpha-m-n$ 个 $(q_1)_3$，则 $(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q})^\alpha$ 中有贡献的只能是 m 个 $\frac{\partial}{\partial(q_1)_1}$, n 个 $\frac{\partial}{\partial(q_1)_2}$, $\alpha-m-n$ 个 $\frac{\partial}{\partial(q_1)_3}$ 的乘积。相应的排列数（即这种乘积的项数）为：

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}\cdot\frac{(\alpha-m)(\alpha-m-1)\cdots(\alpha-m-n+1)}{n!}\cdot\frac{(\alpha-m-n)(\alpha-m-n-1)\cdots2\cdot1}{(\alpha-m-n)!}\qquad(B)$$

（对第一个 $\frac{\partial}{\partial(q_1)_1}$ 有 α 个位置可供选择，对第二个 $\frac{\partial}{\partial(q_1)_1}$ 有 $\alpha-1$ 个位置可供选择……m 个 $\frac{\partial}{\partial(q_1)_1}$，放好后，由于每一种组合有 $m!$ 种排列方式，所以又除以 $m!$。对 $\frac{\partial}{\partial(q_1)_2}$，$\frac{\partial}{\partial(q_1)_3}$ 也相仿。就得到 $\frac{\partial}{\partial(q_1)_1}$, $\frac{\partial}{\partial(q_1)_2}$, $\frac{\partial}{\partial(q_1)_3}$ 的各种可能的排列的个数）。此时，全部微商后，要出现 $m!\ n!\ (\alpha-m-n)!$ 因子。与 (B) 相乘后，仍得 $\alpha!$。

依此类推，可见 (A) 的 $\frac{(\alpha+l-1)(\alpha+l-2\cdots l)\cdots l}{\alpha!}$ 种组合中的每一种组合，在全部微商后都得到 $\alpha!$。所以 α 个 (q_1) 的分量连乘的各种组合，在全部微商后总起来提供

$$\alpha!\frac{(\alpha+l-1)(\alpha+l-2)\cdots l}{\alpha!}=(\alpha+l-1)(\alpha+l-2)\cdots l\qquad(C)$$

(q_1) 的任一个组合取定以后，再看 α 个 (q_2) 的分量的连乘积。由于 $\varepsilon_{i_1,i_2,\cdots,i_l}$ 是全反对称的，没有两个 i_a, i_b 相同，所以如果第一个 (q_1) 的分量取了 $(q_1)_i$，则第一个 (q_2) 的分量就不能取 $(q_2)_i$，依此类推。于是，在这 α 个 (q_2) 的分量的连乘积中，第一个 (q_2) 的分量只能在 $l-1$ 个分量中选取，第二个 (q_2) 的分量。以及第三，…第 α 个 (q_2) 的分量也都只能在 $l-1$ 个分量中选取。

因此，现在的情况和把 $l-1$ 种颜色的球放到 α 个穴中去的情况类似（允许重复，）α 个 (q_2) 分量的组合方式总共应有

$$\frac{(\alpha+l-2)(\alpha+l-3)\cdots(l-1)}{\alpha!}\qquad(D)$$

种。注意，对应于 (q_1) 的每一种给定的组合（而不是对应于 (q_1) 的每一种排列），有这么多种 (q_2) 分量的组合。

对于 (q_2) 的每一种组合，又有几种可能性，一种是 α 个 (q_2) 的分量都相同，则情况和上述 (q_1) 的情况一样，全部微商后也得 $\alpha!$ 因子。

另一种情况是：比方说有 a 个$(q_2)_2$，b 个$(q_2)_3$，c 个$(q_2)_4$，则$\frac{\partial}{\partial(q_2)_2}$，$\frac{\partial}{\partial(q_2)_3}$，$\frac{\partial}{\partial(q_2)_4}$排列数如下($a+b+c=\partial$)：

$$\frac{(a+b+c)(a+b+c-1)\cdots(b+c+1)}{\alpha!}$$

$$\cdot\frac{(b+c)(b+c-1)\cdots(c+1)}{b!}\cdot\frac{c!}{c!}。\tag{E}$$

全部微商后又得到 $a!\ b!\ c!$ 因子。与(E)相乘后是

$$(a+b+c)!=\alpha!$$

其他每个组合各提供 $\alpha!$。于是知道，α 个(q_e)的分量连乘的各种组合，在全部微商后，总共提供如下因子：

$$(\mathrm{D})\text{ 式}\times\alpha!=(\alpha+l-2)(\alpha+l-3)\cdots(l-1)\tag{F}$$

依此类推，一直到最后 α 个(q_e)分量的连乘积。由于前面(q_1)，$(q_2)\cdots(q_{l-1})$的组合都已给定，所以(q_e)分量连乘积的组合唯一确定与前一样考虑$\frac{\partial}{\partial(q_l)_i}$的排列数，则见在 α 个(q_l)分量连乘的情况下，微分后得到 $\alpha!$ 事实上$\frac{\partial}{\partial(q_l)}$的排列是由$\frac{\partial}{\partial(q_1)}\cdots\frac{\partial}{\partial(q_{l-1})}$的排列唯一决定的，不能自由排列。但此时$(q_l)$可以自由排列，有$\frac{\alpha!}{m!\ n!\ (\alpha-m-n)!}$等排列数。等价于令$\frac{\alpha}{\alpha(q_1)}$有这些排列数，而对$(q_l)$只取组合数。由此可见，从$(q_1)$，$(q_2)$，到$(q_l)$，都不用考虑$(q_1)$，$(q_2)\cdots(q_l)$分量的排列数，只需考虑组合数。综合上述全部结果，得到

$$\left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)^{\alpha}(\mathrm{Det}q)^{\alpha}=\frac{(\alpha+l-1)!}{(l-1)!}\cdot\frac{(\alpha+l-2)!}{(l-2)!}\cdot\ldots\frac{\alpha!}{1!}$$

$$\left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)^{\alpha-1}(\mathrm{Det}q)^{\alpha-1}=\frac{(\alpha+l-2)!}{(l-1)!}\cdot\frac{(\alpha+l-3)!}{(l-2)!}\cdot\ldots\frac{(\alpha-1)!}{1!}$$

所以

$$\left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)^{\alpha-1}\cdot\left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)(\mathrm{Det}q)^{\alpha}$$

$$=(\alpha+l-1)(\alpha+l-2)\cdots\alpha\left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)^{\alpha-1}(\mathrm{Det}q)^{\alpha-1}$$

又由于起始条件要 q 是齐次的，立刻得到

$$\left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)(\mathrm{Det}q)^{\alpha}=(\alpha+l-1)(\alpha+l-2)\cdots\alpha(\mathrm{Det}q)^{\alpha-1}\tag{I}$$

即(7.19)式，证毕。

由于我们要延拓的是 n，而在积分时 n 只出现在(7.18)中，(7.18)与 $\bar{p}_i$，k(都是普通的4维矢量)不相干，所以讨论 n 的延拓时可以把积分函数简单地写成

$$f(q_i^2,(q_i+q_j)^2)$$

其中 q_i 都是上节采用的只与 $n-4$ 维的矢量 P_i 有关的 l 维矢量。在这个讨论中，不必要

写出 $\bar{p}_i$ 和 k 。

在(7.18)中,有(Det$q$)和 θ(Det$q$),然而上面已经考察过$\left(\text{Det}\,\frac{\partial}{\partial q}\right)$对 Det$q$ 的作用,所以现在只考察$\left(\text{Det}\,\frac{\partial}{\partial q}\right)$对$(q_i\cdot q_j)$和对$(q_i^2)$的作用。

定义:

$$a_{ij}=q_i\cdot q_j,a_{ii}=q_i^2 \tag{7.20}$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial(q_t)_j}=\sum_s(q_s)_j\left(\frac{\partial}{\partial a_{st}}+\frac{\partial}{\partial a_{ts}}\right) \tag{7.21}$$

$$\begin{aligned}\therefore\left(\text{Det}\,\frac{\partial}{\partial q}\right)&=(\text{Det}q)\left(\text{Det}\left(\frac{\partial}{\partial a_{ij}}+\frac{\partial}{\partial a_{ji}}\right)\right)\\&=2^l(\text{Det}q)\left(\text{Det}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ji}}\right)\right)\end{aligned} \tag{7.22}$$

此地 $s,t,i,j=1,2,\cdots,l$。

再回到(7.18)式,并把积分函数

$$f(a_{ij})=f(q_i^2,(q_i+q_j)^2) \tag{7.23}$$

装进去(a_{ij}也包括 a_{ii}):

$$\begin{aligned}&\int\mathrm{d}^{n-4}P_1\cdots\mathrm{d}^{n-4}P_lf(a_{ij})\\&=2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-4-l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}\right)}\right)\quad(\text{利用了(7.19)})\\&\quad\cdot\frac{1}{(n-4)\cdots(n-l-3)}\int\mathrm{d}_{q1}^{l}\cdots\mathrm{d}_{ql}^{l}\theta(\text{Det}q)\left[\left(\text{Det}\,\frac{\partial}{\partial q}\right)(\text{Det}q)^{n-l-3}\right]\\&\quad\cdot f(a_{ij})\\&=2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-4-l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}+1\right)}\right)\\&\quad\cdot\frac{1}{2^l}\int\mathrm{d}^lq_1\cdots\mathrm{d}^lq_l(\text{Det}q)^{n-l-3}\left[\left(\text{Det}\left(-\frac{\partial}{\partial q}\right)\right)\theta(\text{Det}q)\,f(a_{ij})\right]\end{aligned} \tag{7.24}$$

此处利用了部分积分,并假定是从满足收敛条件的 n 出发,所以部分积分的表面项为 0。然后,由于(δ 是 δ 函数)

$$(\text{Det}q)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial(q_a)_b}\theta(\text{Det}q)=(\text{Det}q)^{\alpha}\frac{\partial(\text{Det}q)}{\partial(q_a)_b}\delta(\text{Det}q)=0 \tag{7.25}$$

可得

$$(7.24)=2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-4-l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}+1\right)}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{2^l}\int d^l q_1 \cdots d^l q_l (\mathrm{Det}q)^{n-l-3}\theta(\mathrm{Det}q)\left[\mathrm{Det}\left(-\frac{\partial}{\partial q}\right)f(a_{ij})\right]$$

$$= 2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-4-l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}+1\right)}\right)$$

$$\cdot \int d^l q_1 \cdots d^l_{q_l} (\mathrm{Det}q)^{n-l-2}\theta(\mathrm{Det}q)\left[\left(\mathrm{Det}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right)\right)f(a_{ij})\right]$$

再利用一次(7.19),并再作一次部分积分,就又得到:

$$(7.24) = 2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-4-l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}+1\right)}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{(n-2)\cdots(n-l-1)}\cdot\int d^l q_1 \cdots d^l q_l \left(\mathrm{Det}\frac{\partial}{\partial q}\right)(\mathrm{Det}q)^{n-l-1}$$

$$\cdot \theta(\mathrm{Det}q)\left[\left(\mathrm{Det}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right)\right)f(a_{ij})\right]$$

$$= 2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-4-l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}+2\right)}\right)$$

$$\cdot \frac{1}{2^l}\int d^l q_1 \cdots d^l q_l (\mathrm{Det}q)^{n-l-1}\theta(\mathrm{Det}q)$$

$$\cdot (\mathrm{Det}(-\frac{\partial}{\partial q})\left[\left(\mathrm{Det}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right)\right)f(a_{ij})\right]$$

$$= 2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-4-l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}+2\right)}\right)$$

$$\cdot \int d^l q_1 \cdots d^l q_l (\mathrm{Det}q)^{n-l}\theta(\mathrm{Det}q)\left[\left(\mathrm{Det}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right)\right)^2 f(a_{ij})\right]$$

若一共进行 λ 次部分积分,则有

$$(7.24) = 2\prod_{i=1}^{l}\left(\pi^{\frac{n-4-l}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{l-i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-i-3}{2}+\lambda\right)}\right)$$

$$\cdot \int d^l q_1 \cdots d^l q_l (\mathrm{Det}q)^{n-l-4+2\lambda}\theta(\mathrm{Det}q)\left[\left(\mathrm{Det}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right)^{\lambda}f(a_{ij})\right] \tag{7.26}$$

把(7.26)与(7.18)对比,可以看到,n 的解析区向左扩展了 2λ(我们注意到,在(7.23)所定义的 $f(a_{ij})$ 中,q_i^2 和$(q_i+q_j)^2$ 都只出现在分母里面,分子上出现的只是 $\bar{p},k$。而且,分母里面也含有着 $\bar{p},k$。于是,当 $q_i=0$ 时,分母并不为0。可见 $f(a_{ij})$ 并不给出与 q_i 有关的

红外发散。与 q_i 有关的红外发散只出现在(Det$q$)中)。当(7.18)有与 q_i 有关的红外发散时,就用(7.26)来定义(7.2)的 $I_n^{(l)}$ 积分。这样定义后,一方面没有了与 q_i 有关的红外发散;另一方面 n 的解析区上限没有变(因 a_{ij}是 q 的二次式,当 q_i 很大时,分母上多了 q 的 $2l\lambda$ 次幂,分子上也多了 q 的 $2l\lambda$ 次幂)。

现在举一个最简单的例子,说明在 $n=4$ 时(7.26)给出的就是普通的结果。取 $l=1$,并设没有紫外发散,则(7.26)写成

$$\int d^{n-4}P_1 f(\omega_1^2) = 2\pi^{\frac{n-4-l}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}+\lambda\right)}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \theta(\omega_1)\omega_1^{n-5+2\lambda}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\omega_1^2}\right)^{\lambda} f(\omega_1^2) = 2\pi^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}+\lambda\right)}\int_0^{\infty} d\omega_1 \omega_1^{n-5+2\lambda}(-)\frac{1}{2\omega_1}\frac{\partial}{\partial\omega_1}$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\omega_1^2}\right)^{\lambda-1} f(\omega_1^2) \tag{7.27}$$

作部分积分。上面已经设没有紫外发散,此地又看到,$n=4,\lambda\geqslant 1$ 时无红外发散,所以表面项为零:

$$(7.27) = 2\pi^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}+\lambda\right)}\int_0^{\infty} d\omega_1 \frac{n-6+2\lambda}{2}\omega_1^{n-7+2\lambda}\left(-\frac{\partial}{\partial\omega_1^2}\right)^{\lambda-1} f(\omega_1^2)$$

可以从 $\lambda>1$ 一直部分积分到 $\lambda=1$:

$$(2.27) = 2\pi^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}+\lambda\right)}\int_0^{\infty} d\omega_1 \left(\frac{n-4}{2}+\lambda-1\right)\left(\frac{n-4}{2}+\lambda-2\right)$$

$$\cdots\left(\frac{n-4}{2}+1\right)\cdot \omega_1^{n-5+2}\left(-\frac{\partial}{\partial\omega_1^2}\right) f(\omega_1^2)$$

(一共部分积分 $l-1$ 次)

$$= 2\pi^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}+\lambda\right)}\int_0^{\infty} d\omega_1 \cdot \omega_1^{n-3}\left(-\frac{\partial}{\partial\omega_1^2}\right) f(\omega_1^2)$$

$$= 2\pi^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}+\lambda\right)}\int_0^{\infty} d\omega_1 \cdot \frac{\omega_1^{n-4}}{2}\left(-\frac{\partial}{\partial\omega_1}\right) f(\omega_1^2)$$

$$\xrightarrow{n=4} -\int(\omega_1^2)\Big|_0^{\infty} = f(0)。 \tag{7.28}$$

事实上这里的 $f(0)$ 就是

$$f(\bar{p},k,\omega_1^2)\big|_{\omega_1^2=0} = f(\bar{p},k) \tag{7.29}$$

所以 $n=4$ 时确是给出原先的四维时空的函数(即 n 延拓前的函数)$f(\bar{p},k)$。

再与(7.18)对比。在(7.18)中,$l=1,n=4$ 时是有红外发散的,现在利用(7.26)来扩大 n 的红外收敛区,就得到了(7.28)的合理的结果。

n 向正的方向(向右)延拓

若有紫外发散,就要把 n 向正的方向扩大解析区,并重新定义 I_n。举一个两圈图的例子:

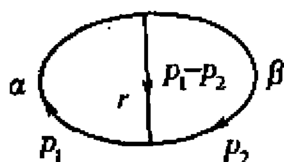


图 7.1

其中略去各外线顶点

$$I_n = \int d^n p_1 \int d^n p_2 \frac{1}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}(p_2^2+m_2^2)^{\beta}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma}} \tag{7.30}$$

这里我们假定所有的与 p_1 有关的传播子都已用费曼参数 $x,y,z,\cdots$ 的积分合并起来。对于所有的与 p_2 有关的传播子，以及所有的与 (p_1-p_2) 有关的传播子，也都用同样的方法合并起来。

我们在(7.30)中还省写了分子上的东西，例如把

$$\frac{p_{1\mu}p_{1\nu}}{(p_1^2+m_1^2)^5}$$

写成

$$\frac{1}{(p_1^2+m_1^2)^4}$$

这样省写不会改变表观发散度，也不会使证明失去普遍性，因为从第六章的维数正常化的积分公式看到，省写后不会改变极点的位置，也不会使极点的留数改变其多项式的性质。从这些积分公式还看到，只要把分子上没有 p_1,p_2 的表式延拓好，并重新定义了费曼积分，就可通过在(7.30)的分母中加上 $p\cdot k$ 项并对 k_μ 作微商的办法，来得到分子上带有 $p_1,p_2,(p_1-p_2)\cdots$ 的这种（紫外发散的）费曼积分的维数正常化的定义。

在两圈图的情况下，为了把 n 向正的方向延拓，要用到四种部分积分：

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{1i}}{\partial p_{1i}}\Bigg|_{\substack{\text{固定}p_2\\ \alpha\gamma\text{子图}}} \quad 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_{2i}}{\partial P_{2i}}\Bigg|_{\substack{\text{固定}p_1\\ \gamma\beta\text{子图}}}$$

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_{1i}}{\partial P_{1i}}\Bigg|_{\substack{\text{固定}p_2'=p_1-p_2\\ \alpha\beta\text{子图}}}$$

$$1 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_{1i}}{\partial p_{1i}}+\frac{\partial p_{2i}}{\partial p_{2i}}\right)_{\alpha,\beta,\gamma\text{整体}} \tag{7.31}$$

把(7.30)先在收敛区积分，然后延拓。

1. $\alpha\gamma$ 子图部分积分：

$$I_n = \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{1i}}{\partial p_{1i}}\frac{1}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}(p_2^2+m_2^2)^{\beta}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma}}$$

$$= \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{1}{n}\Bigg[\frac{2\alpha(p_1^2+m_1^2)-2\alpha m_1^2}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha+1}(p_2^2+m_2^2)^{\beta}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma}}$$

$$+\frac{2\gamma((p_1-p_2+k)^2+M^2)-2\gamma[(-p_2+k)(p_1-p_2+k)+M^2]}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}(p_2^2+m_2^2)^{\beta}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma+1}}\Bigg]$$

$$= \frac{2\alpha+2\gamma}{n}I_n$$

$$-\int d^n p_1 d^n p_2 \frac{1}{n}\left(\frac{\frac{2\alpha m_1^2}{(p_1^2+m_1^2)}+\frac{2\gamma[(-p_2+k)(p_1-p_2+k)^2+M^2]}{((p_1-p_2+k)^2+M^2)}}{(p_1^2+m_1^2)^\alpha(p_2^2+m_2^2)^\beta((p_1-p_2+k)^2+M^2)^\gamma}\right)$$

所以

$$I_n=\frac{-1}{n-2(\alpha+\gamma)}\cdot\int d^n p_1 d^n p_2\left(\frac{\frac{2\alpha m_1^2}{(p_1^2+m_1^2)}+\frac{2\gamma[(-p_2+k)(p_1-p_2+k)+M^2]}{((p_1-p_2+k)^2+M^2)}}{(p_1^2+m_1^2)^\alpha(p_2^2+m_2^2)^\beta((p_1-p_2+k)^2+M^2)^\gamma}\right) \tag{7.32}$$

右方 p_1 积分的 n 的解析区上限增加了 1。

如果 $n=4$ 时原先的(7.30)的 p_1 积分不收敛而(7.32)的右方收敛，则必须

$$2(\alpha+\gamma)\leqslant 4,2(\alpha+\gamma)+1>4$$

要求 $\alpha+\gamma=$整数，所以

$$2(\alpha+\gamma)=4$$

就是说，在 n 向正的方向延拓的过程中，当 p_1 积分开始由发散转为收敛时，则必定出现

$$\frac{1}{n-2(\alpha+\gamma)}=\frac{1}{n-4}$$

极点项。与这个极点项相对应的发散是 $\alpha\gamma$ 子图（固定 p_2）的发散。

2. $\beta\gamma$ 子图部分积分：

$$\begin{aligned}I_n&=\int d^n p_1 d^n p_2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p_{2i}}{\partial p_{2i}}\frac{1}{(p_1^2+m_1^2)^\alpha(p_2^2+m_2^2)^\beta((p_1-p_2+k)^2+M^2)^\gamma}\\&=\int d^n p_1 d^n p_2\frac{1}{n}\left[\frac{2\beta(p_2^2+m_2^2)-2\beta m_2^2}{(p_1^2+m_1^2)^\alpha(p_2^2+m_2^2)^{\beta+1}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^\gamma}\right.\\&\quad\left.+\frac{2\gamma((p_1-p_2+k)^2+M^2)-2\gamma[(p_1+k)(p_1-p_2+k)+M^2]}{(p_1^2+m_1^2)^\alpha(p_2^2+m_2^2)^\beta((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma+1}}\right]\\&=\frac{2\beta+2\gamma}{n}I_n-\int d^n p_1 d^n p_2\frac{1}{n}\left(\frac{\frac{2\beta m_2^2}{(p_2^2+m_2^2)}+\frac{2\gamma[(p_1+k)(p_1-p_2+k)M^2]}{((p_1-p_2+k)^2+M^2)}}{(p_1^2+m_1^2)^\alpha(p_2^2+m_2^2)^\beta((p_1-p_2+k)^2+M^2)^\gamma}\right)\end{aligned}$$

所以

$$I_n=\frac{-1}{n-2(\beta+\gamma)}.\cdot\int d^n p_1 d^n p_2\left(\frac{\frac{2\beta m_2^2}{(p_2^2+m_2^2)}+\frac{2\gamma[(p_1+k)(p_1-p_2+k)+M^2]}{((p_1-p_2+k)^2+M^2)}}{(p_1^2+m_1^2)^\alpha(p_2^2+m_2^2)^\beta((p_1-p_2+k)^2+M^2)^\gamma}\right) \tag{7.33}$$

右方 p_2 积分的 n 的解析区上限增加了 1。

和 $\alpha\gamma$ 子图的讨论相仿，当 p_2 积分开始由发散转为收敛时，必定出现

$$\frac{1}{n-2(\beta+\gamma)}=\frac{1}{n-4}$$

极点项。与这个极点项相对应的发散是 $\beta\gamma$ 子图（固定 p_1）的发散。

3. $\alpha\beta$ 子图部分积分：

$$I_n = \int d^n p_1 d^n p_2' \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_{1i}}{\partial p_{1i}}\bigg|_{p_1-p_2=p_2'\text{固定}}$$

$$\cdot \frac{1}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}((p_1-p_2')^2+m_2^2)^{\beta}((p_2'+k)^2+M^2)^{\gamma}}$$

$$= \int d^n p_1 d^n p_2' \frac{1}{n}\Big[\frac{2\alpha(p_1^2+m_1^2)-2\alpha m_1^2}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha+1}((p_1-p_2')^2+m_2^2)^{\beta}((p_2'+k)^2+M^2)^{\gamma}}$$

$$+ \frac{2\beta((p_1-p_2')^2+m_2^2)-2\beta[(-p_2')(p_1-p_2')+m_2^2]}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}((p_1-p_2')^2+m_2^2)^{\beta+1}((p_2'+k)^2+M^2)^{\gamma}}$$

$$= \frac{2\alpha+2\beta}{n} I_n - \int d^n p_1 d^n p_2' \frac{1}{n}\left(\frac{\dfrac{2\alpha m_1^2}{(p_1^2+m_1^2)} + \dfrac{2\beta[(-p_2')(p_1-p_2')+m_2^2]}{((p_1-p_2')^2+m_2^2)}}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}((p_1-p_2')^2+m_2^2)^{\beta}((p_2'+k)^2+M^2)^{\gamma}}\right)$$

所以

$$I_n = \frac{-1}{n-2(\alpha+\beta)}$$

$$\cdot \int d^n p_1 d^n p_2' \left(\frac{\dfrac{2\alpha m_1^2}{(p_1^2+m_1^2)} + \dfrac{2\beta[(-p_2')(p_1-p_2')+m_2^2]}{((p_1-p_2')^2+m_2^2}}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}((p_1-p_2')^2+m_2^2)^{\beta}((p_2'+k)^2+M^2)^{\gamma}}\right) \tag{7.34}$$

右方 p_1 积分(固定 $p_2'=p_1-p_2$)的 n 的解析区上限增加了 1。

和 $\alpha\gamma$ 子图、$\beta\gamma$ 子图的讨论相仿,当 p_1 积分(固定 p_2')开始由发散转为收敛时,必定出现

$$\frac{1}{n-2(\alpha+\beta)} = \frac{1}{n-4}$$

极点项。与这个极点项相对应的发散是 $\alpha\beta$ 子图(固定 $p_2'=p_1-p_2$)的发散。

4. $\alpha\beta\gamma$ 整体发散:消去了 $\alpha\gamma$、$\beta\gamma$、$\alpha\beta$ 三个子图的发散后,还有 $\alpha\beta\gamma$ 的整体发散。可利用(7.31)的第四个部分积分来讨论这个发散:

$$I_n = \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial p_{1i}}{\partial p_{1i}} + \frac{\partial p_{2i}}{\partial p_{2i}}\right)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}(p_2^2+m_2^2)^{\beta}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma}}\right)$$

$$= \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{1}{2n} \cdot \Big[\frac{2\alpha(p_1^2+m_1^2)-2\alpha m_1^2}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha+1}(p_2^2+m_2^2)^{\beta}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma}}$$

$$+ \frac{2\beta(p_2^2+m_2^2)-2\beta m_2^2}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}(p_2^2+m_2^2)^{\beta+1}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma}}$$

$$+ \frac{2[\gamma((p_1-p_2+k)^2+M^2)-k((p_1-p_2+k)-M^2)]}{(p_1^2+m_1^2)^{\alpha}(p_2^2+m_2^2)^{\beta}((p_1-p_2+k)^2+M^2)^{\gamma+1}}\Big]$$

所以

$$I_n = \frac{-1}{n-(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\cdot \int \mathrm{d}^n p_1 \mathrm{d}^n p_2 \left(\frac{\frac{\alpha m_1^2}{(p_1^2 + m_1^2)} + \frac{\beta m_2^2}{(p_2^2 + M_2^2)} + \frac{\gamma(k(p_1 - p_2 + k) + M^2)}{((p_1 - p_2 + k)^2 + M^2)}}{(p_1^2 + m_1^2)^\alpha (p_2^2 + m_2^2)^\beta ((p_1 - p_2 + k)^2 + M^2)^\gamma} \right) \qquad (7.35)$$

可看到整体 p_1、p_2 积分的 n 的解析区上限增加了 1/2。

如果 $n=4$ 时 I_n 的表观发散度≥0，而右方表观发散度<0，则必须

$$2(\alpha + \beta + \gamma) \leqslant 8, 2(\alpha + \beta + \gamma) + 1 > 8$$

要求 $\alpha + \beta + \gamma =$ 整数，所以

$$2(\alpha + \beta + \gamma) = 8 \rightarrow (\alpha + \beta + \gamma) = 4$$

就是说，在 n 向正的方向延拓的过程中，当整体发散转为整体收敛时，必定出现

$$\frac{1}{n - (\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{1}{n - 4}$$

极点项。

现在就按 §5-1 的方法分析一下这些发散。(7.30)有三个子图：

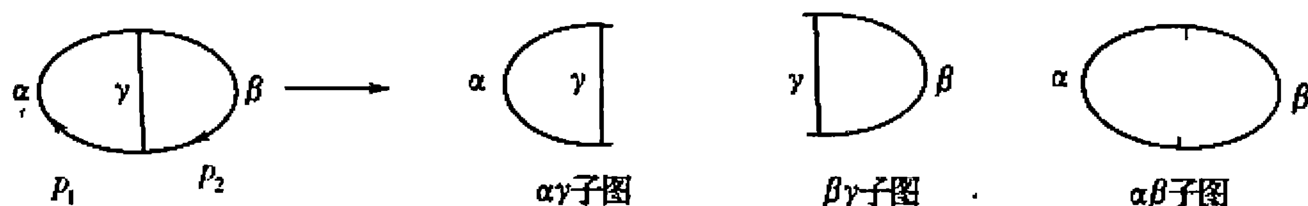


图 7.2

如果这些子图有发散，就要加上抵消项，用下图表示，×代表所要抵消的子图：



图 7.3

和 §5-1 的讨论一样，我们看到；

αγ　子图的发散，来自区域 1 的贡献(p_2 有限)。

βγ　子图的发散，来自区域 2 的贡献(p_1 有限)。

αβ　子图的发散，来自区域 3 的贡献($p_1 - p_2$ 有限)。

α,β,γ　整体发散，则来自 4,5 区域(当 αγ、βγ、αβ 三个子图的发散减除之后)的贡献。

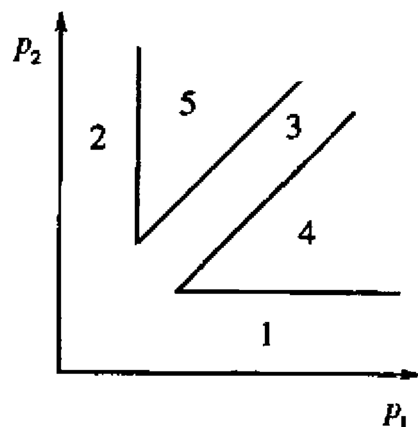


图 7.4

通过(7.31)的四种部分积分，把 n 的解析区向正的方向扩大时，我们已经看到，对应于 1(αγ 子图)、2(βγ 子图)、3(αβ 子图)、4+5(整体骨架)各区域的发散，都会提供$\frac{1}{n-4}$极点。现在要问，一个两圈图至多提供几重$\frac{1}{n-4}$极点？

我们的答案是，两圈图的发散项在维数正常化的计算中至多给出双重极点$\left(\frac{1}{n-4}\right)^2$。原因是 αγ、βγ、αβ 等子图的发散项各给出一个单重极点$\frac{1}{n-4}$，相加后仍是单重极点

$\frac{1}{n-4}$。然后再作整体骨架积分，又会出现发散，又有极点因子$\frac{1}{n-4}$。这整体骨架积分给出的$\frac{1}{n-4}$与子图积分给出的$\frac{1}{n-4}$相乘，就得$\left(\frac{1}{n-4}\right)^2$。所以说，两圈图的发散至多给出双重极点$\left(\frac{1}{n-4}\right)^2$，同时也给出含有单重极点$\frac{1}{n-4}$的项。

推广到 l 圈交缠图：每增加一圈，整体骨架发散在维数正常化的计算中就会又提供一个极点因子$\frac{1}{n-4}$。已知一圈图的发散项至多给出单重极点$\frac{1}{n-4}$，所以 l 圈的发散项至多给出 l 重极点$\left(\frac{1}{n-4}\right)^l$，同时也给出有 m 重极点$\left(\frac{1}{n-4}\right)^m$ 的项（m 是小于 l 的正整数）。

§7-3　无害极点和有害极点

两个定义

无害极点　极点因子$\left(\frac{1}{n-4}\right)^i$ 与 k_μ, m 的多项式相乘。

这种极点可以用 $\mathscr{L}$ 中的抵消项来抵消，可以满足乘法重正化的需要，所以叫做无害极点。

有害极点　极点因子$\left(\frac{1}{n-4}\right)^i$ 与 k_μ, m 的多项式的一些因子相乘，但无法抵消。

例如$\left(\frac{1}{n-4}\right)^i \ln \frac{(k^2+m^2)}{\mu^2}$，这种极点不能用 α 中的抵消项来抵消，无法进行乘法重正化，所以叫做有害极点。

一个 l 圈图，如果要找它的含$\left(\frac{1}{n-4}\right)^l$ 因子的 l 重极点项，那就必须对每一圈积分都只选取极点部分，而极点部分是$\frac{1}{n-4}$与 k_μ, m 的多项式相乘，所以结果 l 重极点项也必定是$\left(\frac{1}{n-4}\right)^l$ 与 k_μ, m 的多项式相乘。这就是说，l 圈图的 l 重极点必定是无害极点。

那么 l 圈图的 $l-1, l-2, \cdots$ 重极点是不是也是无害极点呢？比方说双圈图的单重极点项 $\left(\sim\frac{1}{n-4}\right)$，它可以是 αγ 子图（或 βγ，αβ 子图）的单重极点项$\left(\sim\frac{1}{n-4}\times k_\mu, m \text{ 多项式}\right)$与整体积分的有限部分$\left(\sim\ln\frac{(k^2+m^2)}{\mu^2}\right)$的乘积，具有如下形式：

$$\frac{1}{n-4}\ln\frac{(k^2+m^2)}{\mu^2}\times k_\mu, m \text{ 多项式}$$

这显然是一个有害极点，无法用 $\mathscr{L}$ 中的抵消项来抵消的。

但是我们将在 §7-5 中证明，按照第五章中所说的逐圈减除的程序来引入抵消项，就可以使有害极点全部消去，只剩下无害极点。所以，用维数正常化来进行重正化时，并不存在有害极点的困难。

以下我们就以两圈图为例,先看一看有害极点的产生和消去。

设有一个任意的两圈图积分(为了简明,省写了 μ^{8-2n}。加进 μ 不造成困难):

$$I_n = \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{1}{(p_1^2 + m_1^2)^\alpha (p_2^2 + M_2^2)^\beta ((p_1 - p_2 + k)^2 + M^2)^\gamma} \tag{7.36}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0 (\text{有交缠无穷大})$$

(7.36)是比较简单的一种情况,在复杂的情况下分子上可能有 $p_\mu, p_\mu p_\nu, p_\mu p_\nu p_\sigma, p_\mu p_\nu p_\sigma p_\rho$,…。但都可以用同样的方法来证明。

证明分以下几步

1. 若 I_n 对数发散,子积分不发散,则 $n=4$ 有一个无害极点。

证明:用第四种部分积分得到

$$I_n = \frac{-1}{n - (\alpha + \beta + \gamma)} I' \tag{7.37}$$

I' 的表观发散度比 I_n 低,没有整体发散,当然也没有发散子积分,所以 I' 是收敛的。

但 I_n 对数发散,即 $\alpha + \beta + \gamma = 4$,所以 I_n 有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。为了说明无害,我们把积分写出如下:

$$I_n = \int dy_1 dy_2 \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{f(y_1, y_2)}{(p_1, p_2, k, m, M \text{ 二次式,含 } y_1, y_1)^{\alpha+\beta+\gamma}} \tag{7.38}$$

现在要考虑一下积分方法。我们要的只是 $n=4$ 时的结果,所以可以把 §7-1 的积分办法加以简化。就是说,对于 $d^n p_1 d^n p_2 \cdots\cdots d^n p_l$ 积分,可以先把 $p_2, \cdots, p_l$ 限制在 4 维,把 p_1 扩充到 n 维进行积分。积分后再取 p_1 的维数为 $n=4$ 时的结果。这样就完成了 $d^n p_1$ 的积分。然后再把 $p_3, \cdots, p_l$ 限制在 4 维,把 p_2 扩充到 n 维进行积分。积分后再取 p_2 的维数为 $n=4$ 时的结果。这样就完成了 $d^n p_2$ 的积分。……如此继续下去。

这种做法充分保留了标积 $p_i \cdot p_j$ 的 4 维分量的贡献,但是忽略了 n 扩充以后标积 $p_i \cdot p_j$ 中的 4 维以外分量的贡献。这是和 §7-1 的不同之处。然而,在 $n=4$ 时,4 维以外分量不存在。所以这种做法和 §7-1 的做法的不同之处就也不存在了。所以,在 $n=4$ 时,我们这简化的积分办法是可用的。

用这个办法的好处是每一个 $d^n p_i$ 都可以利用第六章的公式(因为可以不考虑 4 维以外的角度)。以后我们就用这样的积分方法来积 $d^n p_1 d^n p_2 \cdots d^n p_l$ 多重积分,并取 $n=4$ 时的结果。

对(7.38)的积分用这个办法进行,就得到:

$$I_n = \int dy_1 dy_2 g(y_1, y_2) \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}$$

$$\int d^n p_1 \frac{1}{(p_1, k, m, M \text{ 二次式,含 } y_1, y_2)^{\alpha+\beta+\gamma-\frac{n}{2}}}$$

$$= \int dy_1 dy_2 h(y_1, y_2) \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma\left(\alpha + \beta + \gamma - \frac{n}{2}\right)}$$

$$\cdot \frac{1}{(\mathfrak{M}^2 - k^2)^{\alpha+\beta+\gamma-n}} \cong \frac{\text{常数}}{\alpha+\beta+\gamma-n}\int dy_1 dy_2 h(y_1,y_2)[1-(\alpha+\beta+\gamma-n)\ln(\mathfrak{M}^2-k^2)+\cdots]$$

（在 $\alpha+\beta+\gamma=4$ 附近展开）

$$= \frac{\text{常数}}{4-n}\int dy_1 dy_2 h(y_1,y_2)[1-(4-n)\ln(\mathfrak{M}^2-k^2)+\cdots] \tag{7.39}$$

（$\mathfrak{M}$是一个带质量量纲的数，可能含 y_1,y_2）

所以有$\frac{1}{n-4}$极点项，而且是无害极点。

再看比较复杂一些的情况，例如

$$I_n = \int dy_1 dy_2 \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{f'(y_1,y_2)p_\mu p_\nu}{(p_1,p_2,k,m,M\text{ 二次式,含 }y_1,y_2)^{\alpha+\beta+\gamma}} \tag{7.40}$$

（对数发散：$\alpha+\beta+\gamma=5$）

最后仍得到（利用第六章的公式）

$$I_n = \int dy_1 dy_2 h'(y_1,y_2)\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma-1-n)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)} \cdot \frac{\delta_{\mu\nu}}{(\mathfrak{M}^2-k^2)^{\alpha+\beta+\gamma-1-n}} + \text{不发散部分}$$

$$\cong \frac{\text{常数}}{4-n}\int dy_1 dy_2 h'(y_1,y_2)\delta_{\mu\nu}[1-(4-n)\ln(m^2-k^2)] + \text{不发散部分} \tag{7.41}$$

所以结论同前。

由于在第六章积分公式中 Γ 函数总是以 $\Gamma(\alpha-l-n)/(\mathfrak{M}^2-k^2)^{\alpha-l-n}$ 的组合形式出现，所以这个结论在更一般的情况都成立。不过要求 I_n 的积分函数的分子必须是 p、k 的多项式。

2. 若 I_n 发散，而且高于对数发散（$\alpha+\beta+\gamma<4$），但子积分不发散，则在 $n=4$ 仍只有无害极点。

证明：用第四种部分积分，把分母的幂次增加二次或更多次，总可以回到对数发散（$\alpha+\beta+\gamma=4$）的情况。其余证明和 1. 一样（分子上有 p,k 的多项式时，也可用相同的办法证明）。

3. 若 I_n 整体收敛或对数发散（$\alpha+\beta+\gamma\geqslant4$），则它至多只能有一个子图是发散的，另两个子图不发散。

证明：$\alpha+\beta+\gamma\geqslant4$。如果 $\alpha\gamma$ 子图是发散的，即 $\alpha+\gamma\leqslant2$，则必定 $\beta\geqslant2$。由于 $\alpha>0,\gamma>0$，得到 $\alpha+\beta>2,\beta+\gamma>2$。所以 $\alpha\beta$ 和 $\beta\gamma$ 两个子图都不发散（分子上有 p,k 多项式时，也可用相同的办法来证明）。

4. 若 I_n 整体收敛或对数发散（$\alpha+\beta+\gamma\geqslant4$），并有一个发散子积分，则子积分减除了极点项后，整体积分仍是只有无害极点（$\alpha+\beta+\gamma=4$ 时），或根本无极点（$\alpha+\beta+\gamma>4$ 时）。

证明：设 $\alpha+\gamma\leqslant2$ 是一个发散子积分，则 $\beta\geqslant2$。通过 (α,γ) 子图的 p - 部分积分，可把 (α,γ) 化成对数发散，即 $\alpha+\gamma=2$。然后，再减除 (α,γ) 子图的极点项。

为此，作为一个例子，我们取 $\alpha=\gamma=1,\beta=l(l=2,3,4,\cdots)$，并简单地令 $m_1=m_2=m,M$ 不改：

$$I_n=\int d^np_1d^np_2\frac{1}{(p_1^2+m^2)((p_1-p_2+k)^2+m^2)(p_2^2-2Kp_2+M^2)^l}$$
$$=\int_0^1 dxd^np_1d^np_2\frac{1}{(p_1^2+m^2+x(p_2-k)^2-2xp_1(p_2-k))^2(p_2^2-2Kp_2+M^2)^l} \tag{7.42}$$

按刚才说的办法先积分 d^np_1，得到

$$\Rightarrow\int_0^1 dxd^np_2\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)(x(1-x)(p_2-k)^2+m^2)^{2-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{(p_2^2-2Kp_2+M^2)^l} \tag{7.43}$$

这里写的是 d^np_2，其意义如上述，即在 d^np_1 积分完毕后，再把 d^4p_2 扩充成 d^np_2。d^np_2 积分后，最后取 $n=4$。

(7.43)含有(α,γ)子图的极点项。而在减除了这个极点项后，(7.42)就写成

$$I'_n=i\pi^{\frac{n}{2}}\int_0^1 dxd^np_2\left[\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}\left((p_2-k)^2+\frac{m^2}{x(1-x)}\right)^{2-\frac{n}{2}}}-\frac{2}{4-n}\right]\frac{1}{(p_2^2-2Kp_2+M^2)^l} \tag{7.44}$$

再把(7.44)改写一下：

$$I'_n=i\pi^{\frac{n}{2}}\left[\int dxd^np_2\frac{1}{[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{\Gamma(2-\frac{n}{2})\left((p_2-k)^2+\frac{m^2}{x(1-x)}\right)}{\left((p_2-k)^2+\frac{m^2}{x(1-x)}\right)^{3-\frac{n}{2}}(p_2^2-2Kp_2+M^2)^l}-\frac{2}{4-n}\int d^np_2\frac{1}{(p_2^2-2Kp_2+M^2)^l}\right] \tag{7.45}$$

并利用

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta}=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 dz\frac{z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}}{(az+b(1-z))^{\alpha+\beta}} \tag{7.46}$$

((7.46)成立的条件是 $\alpha>0,\beta>0$。如果 $\alpha\leqslant0,\beta\leqslant0$，则积分必定出发散)

于是得到

$$I'_n=i\pi^{\frac{n}{2}}\left[\int dxdzd^np_2\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{\Gamma\left(3+l-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)\Gamma(l)}\right.$$

$$\cdot \frac{(1-z)^{2-\frac{n}{2}} \cdot z^{l-1}\left(p_2^2 - 2p_2 k + k^2 + \frac{m^2}{x(1-x)}\right)}{p_2^2 - 2\left((1-z)k + zK\right)\cdot p_2 + (1-z)k^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\Big)^{3+l-\frac{n}{2}}}$$

$$\left. - \frac{2}{4-n}\int \mathrm{d}^n p_2 \frac{1}{(p_2^2 - 2Kp_2 + M^2)^l}\right] \tag{7.47}$$

我们在(7.45)中把分母写成含有$\left((p_2-k)^2 + \frac{m^2}{x(1-x)}\right)$的$\left(3-\frac{n}{2}\right)$次幂,就是为了在$n=4$附近仍可利用(7.46)式(满足$\alpha>0,\beta>0$)。

先看$l=3,4,5,\cdots$的情况。从(7.44)就已看到,减除了(α,γ)子图的发散后,I_n^r是收敛的,根本无极点(无整体发散)。

再看$l=2$的情况(整体对数发散)。我们先用第六章的公式把(7.47)的d^nP_2积分算出来,然后令$l=2$:

$$I_n^r = (i\pi^{\frac{n}{2}})^2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \mathrm{d}z \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}}\cdot\frac{\Gamma\left(3+l-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)\Gamma(l)}\cdot\frac{(1-z)^{2-\frac{n}{2}}\cdot z^{l-1}}{\Gamma\left(3+l-\frac{n}{2}\right)}$$

$$\cdot\left[\frac{n}{2}\frac{\Gamma(2+l-n)}{\left((1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\right)^{2+l-n}}\right.$$

$$+\frac{\Gamma(3+l-n)[(1-z)k+zK]^2}{\left((1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\right)^{3+l-n}}$$

$$+\frac{\Gamma(3+l-n)(-2k)[(1-z)k+zK]}{\left((1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\right)^{3+l-n}}$$

$$\left.+\frac{\Gamma(3+l-n)\left(k^2+\frac{m^2}{x(1-x)}\right)}{\left((1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\right)^{3+l-n}}\right]$$

$$-(i\pi^{\frac{n}{2}})^2\left(\frac{2}{4-n}\right)\frac{\Gamma\left(l-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(l)}\frac{1}{(M^2-K^2)^{l-\frac{n}{2}}} \tag{7.48}$$

先考察第一项的积分:在整个$\int_0^1 \mathrm{d}z$积分区内,但不包括$z=0,1$两点,积分函数都明显是有限的,所以$n=4$时可取$(1-z)^{2-\frac{n}{2}}=1$。在$z=0,1$两点,积分函数仍是有限的,同时由于$z=1$处的积分

$$\int^1 \mathrm{d}z(1-z)^{2-\frac{n}{2}} = \frac{-1}{3-\frac{n}{2}}(1-z)^{3-\frac{n}{2}} \xlongequal{n=4,z=1} 0,$$

所以$z=1$处的积分没有发散。又由于$l=2$,所以$z=0$处的积分也没有发散。于是在整个

$\int_0^1 dz$ 积分区间，包括 $z=0,1$ 两点，$n=4$ 时都可取

$$(1-z)^{2-\frac{n}{2}}=1。$$

（$z=0,1$ 两点测度为 0）。再看整个 $\int_0^1 dx$ 积分区间，但不包括 $x=0,1$ 两点，积分函数也都是有限的，$n-4$ 时可取 $[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}=1$。在 $x=0,1$ 两点，第一项 $\xrightarrow{n=4}\sim\dfrac{[x(1-x)]^{4-n}}{[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}}$ $=[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}$。$x=1$ 附近积分 $\sim\int^1 dx(1-x)^{2-\frac{n}{2}}=\dfrac{-1}{3-\dfrac{n}{2}}(1-x)^{3-\frac{n}{2}}\Big|^1 \xlongequal{n=4,x=1} 0$；$x=0$ 附近积分 $\sim\int_0 x^{2-\frac{n}{2}}dx=\dfrac{1}{3-\dfrac{n}{2}}x^{3-\frac{n}{2}}\xlongequal{n=4,x=0}0$。所以在整个 $\int_0^1 dx$ 积分区内，包括 $x=0,1$ 两点，$n=4$ 时都可取

$$[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}=1$$

（$x=0,1$ 两点测度为 0）。

于是第一项的积分可写成下式，并作部分积分：

$$\left(i\pi^{\frac{n}{2}}\right)^2\int_0^1 dx\int_0^1 dz\,\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)\Gamma(l)}z^{l-1}$$

$$\cdot\frac{n}{2}\frac{\Gamma(2+l-n)}{\left((1-z)k^2-[(1-z)k+zK]^2+\dfrac{(1-z)m^2}{x(1-x)}+zM^2\right)^{2+l-n}}$$

$$=\left(i\pi^{\frac{n}{2}}\right)^2\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)\Gamma(l)}\frac{z^l}{l}$$

$$\cdot\frac{n}{2}\frac{\Gamma(2+l-n)}{\left((1-z)k^2-[(1-z)k+zK]^2+\dfrac{(1-z)m^2}{x(1-x)}+zM^2\right)^{2+l-n}}\Bigg|_{z=0}^{z=1}$$

$$+\left(i\pi^{\frac{n}{2}}\right)^2\int_0^1 dx\,\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)\Gamma(l)}\cdot\int_0^1 dz\,\frac{z^l}{l}$$

$$\cdot\frac{n}{2}\frac{(2+l-n)\Gamma(2+l-n)[-k^2-2(-k+K)[(1-z)k+zK)]\rightarrow}{((1-z)k^2-[(1-z)k+zK]^2\rightarrow}$$

$$\frac{\leftarrow-\dfrac{m^2}{x(1-x)}+M^2]}{\leftarrow+\dfrac{(1-z)m^2}{x(1-x)}+zM^2\Big)^{3+l-n}}$$

$$= (i\pi^{\frac{n}{2}})^2\int_0^1 dx \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)\Gamma(l)} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{\Gamma(2+l-n)}{(M^2-K^2)^{2+l-n}}$$

$$+ (i\pi^{\frac{n}{2}})^2\int_0^1 dx \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(3-\frac{n}{2}\right)\Gamma(l)} \cdot \int_0^1 dz \frac{z^l}{l}$$

$$\cdot \frac{n}{2} \frac{\Gamma(3+l-n)[-k^2-2(-k+K)[(1-z)k+zK)] - \frac{m^2}{x(1-x)} + M^2]}{\left((1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\right)^{3+l-n}} \tag{7.49}$$

把(7.49)代入(7.48),并取$l=2,n=4$。由于上面关于$[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}$的讨论,对于(7.48)第二、三、四项也适用,所以可以把$[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}$全都取作1,于是得到:

$$I'_n = (i\pi^{\frac{n}{2}})^2 \frac{2}{4-n} \cdot \left\{\frac{\Gamma(4-n)}{(M^2-K^2)^{4-n}} - \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(M^2-K^2)^{2-\frac{n}{2}}}\right\}$$

$$+ (i\pi^{\frac{n}{2}})^2\int_0^1 dx\int_0^1 dz \frac{2}{4-n} \cdot z$$

$$\cdot \frac{(1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2}{\left((1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\right)^{5-n}}$$

$$= (i\pi^{\frac{n}{2}})^2 \frac{2}{4-n}\left\{\frac{1}{4-n}(1-(4-n))\ln(M^2-K^2) + O(4-n)^2\right.$$

$$\left. - \frac{2}{4-n}\left(1-\left(2-\frac{n}{2}\right)\right)\ln(M^2-K^2) + O(4-n)^2\right\}$$

$$+ (i\pi^{\frac{n}{2}})^2\int_0^1 dx\int_0^1 dz \frac{2}{4-n} \cdot z \cdot \frac{1}{\left((1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\right)^{4-n}}$$

$$= (i\pi^{\frac{n}{2}})^2 \frac{2}{4-n}\left\{-\frac{1}{4-n} + O(4-n)^2\right\} + (i\pi^{\frac{n}{2}})^2\int_0^1 dx\int_0^1 dz \frac{2}{4-n} \cdot z$$

$$\cdot \left\{1 - (4-n)\ln\left((1-z)k^2 - [(1-z)k+zK]^2 + \frac{(1-z)m^2}{x(1-x)} + zM^2\right)\right.$$

$$\left. + O(4-n)\right\} \tag{7.50}$$

所以I'_n的极点项是

$$(i\pi^{\frac{n}{2}})^2\left[-\frac{2}{(4-n)^2} + \int_0^1 dx\int_0^1 dz \frac{2}{4-n} z\right]$$

$$= (i\pi^{\frac{n}{2}})^2\left[-\frac{2}{(4-n)^2} + \frac{1}{4-n}\right] \tag{7.51}$$

确是没有有害极点。

说明两点：

（ⅰ）这里的 m 和 M 都只在非极点项中出现，所以取 $m_1 \neq m_2$，结论也一样。

（ⅱ）分子上有 $p_\mu p_\nu, \cdots$ 时，(7.42)式需要改一改，例如

$$I_n = \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{p_{2\mu} p_{2\nu}}{(p_1^2 + m^2)((p_1 - p_2 + k)^2 + m^2)(p_2^2 - 2Kp_2 + M^2)^3} \tag{7.52}$$

$$I'_n = i\pi^{\frac{n}{2}} \int_0^1 dx d^n p_2 \left[\frac{\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}{[x(1-x)]^{2-\frac{n}{2}}\left((p_2 - k)^2 + \frac{m^2}{x(1-x)}\right)^{2-\frac{n}{2}}} - \frac{2}{4-n} \right] \frac{p_{2\mu} p_{2\nu}}{(p_2^2 - 2Kp_2 + M^2)^3} \tag{7.53}$$

也是整体对数发散。

还可以写出其他的整体对数发散并有一个发散子积分的 I_n。可以用同样的办法证明它们都没有有害极点。不过，我们这里不准备写出这些细节了（§7－5 的证明包括了所有这些情况）。

5. 若 I_n 是整体 1 次、2 次、……发散，则可用 $(\alpha,\beta,\gamma)p$－部分积分（第四种部分积分）化为整体对数发散。然后就可按上面的讨论证明没有有害极点。

这样，我们就证明了两圈图的情况没有有害极点。

第一个例子，在(7.30)式中取 $\alpha=\beta=\gamma=1$：

$$I_n = \int d^n p_1 d^n p_2 \frac{1}{(p_1^2 + m_1^2)(p_2^2 + m_2^2)((p_1 - p_2 + k)^2 + M^2)} \tag{7.54}$$

它是二次发散的，所以要进行第四种部分积分。一次部分积分后出现三个项，见(7.35)。前两项都是整体对数发散的，各有一个发散子图（正如 3. 所讨论的情况）。减除子图（$\alpha\gamma$ 子图或 $\beta\gamma$ 子图）的发散后再作另一积分，不会出现有害极点。第三项是整体一次发散，需要再进行一次第四种部分积分。部分积分后也出现三个项。两项不发散，只有一项是整体对数发散的，其中 $\alpha\beta$ 子图也是发散的。减除 $\alpha\beta$ 子图的发散后再作另一积分（情况如(7.53)），也不会出现有害极点。

上述办法对于考察各种两圈图的极点性质虽然比较方便，但是，在多圈图有交缠无穷大的情况，要出现各种 $\frac{1}{(4-n)^i}$ 多重极点，就不能用上述两圈图用过的办法来证明没有有害极点了。以下我们利用切割图形的办法来证明这一点。

§7－4 切割图和切割方程

Källen－Lehmann 表示

定理：如果函数 $f(x)$ 的 k 表示可写成 Källen－Lehmann 表示如下：

$$f(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int_{a\geqslant 0}^{\infty}\frac{\rho(s)}{s+k^2-i\epsilon}ds \tag{7.55}$$

其中 $\rho(s)$ 是实的，$k^2 = -k_0^2 = \bar{k}^2$，则其等价的写法是：

$$f(x) = \theta(x_0)f^+(x) + \theta(-x_0)f^-(x) \tag{7.56}$$

其中

$$f^{\pm}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{a\geqslant 0}^{\infty}ds\rho(s)\int d^4ke^{ikx}\theta(\pm k_0)\delta(k^2+s)。 \tag{7.57}$$

如果把(7.56)重新写一下：

$$f^{\pm}(k) = \int d^4ke^{ikx}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{a\geqslant 0}^{\infty}ds\rho(s)\theta(\pm k_0)\delta(k^2+s)$$

则又得到

$$f^{\pm}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{a\geqslant 0}^{\infty}ds\rho(s)\theta(\pm k_0)\delta(k^2+s) \tag{7.58}$$

证明：把(7.57)代入(7.56)，并利用

$$\theta(x_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau x_0}}{\tau - i\varepsilon}d\tau$$

就得到

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(2\pi)^3}\left[\int d\tau\frac{e^{i\tau x_0}}{\tau - i\varepsilon}ds\rho(s)d^4ke^{ikx}\theta(k_0)\delta(k^2+s)\right. \\ &\quad \left. + \int d\tau\frac{e^{-i\tau x_0}}{\tau - i\varepsilon}ds\rho(s)d^4ke^{ikx}\theta(-k_0)\delta(k^2+s)\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{i}\left[\int d\tau\frac{1}{\tau - i\varepsilon}ds\rho(s)d^3\boldsymbol{k}\right. \\ &\quad \left.\cdot\left(\frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}+i\tau x_0 - i\sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}x_0}}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}} + \frac{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\tau x_0+i\sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}x_0}}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}}\right)\right] \end{aligned}$$

其中利用了

$$\theta(\pm k_0)\delta(k^2+s) = \frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}}\delta(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}\mp k_0) \tag{7.59}$$

由此就可以得到

$$\begin{aligned} f(k') &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik'x}d^4xf(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int d\tau\frac{d^3\boldsymbol{k}}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}}ds\rho(s)\frac{\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')}{\tau - i\varepsilon} \\ &\quad\cdot[\delta(\tau - \sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}+k_0') + \delta(-\tau+\sqrt{\boldsymbol{k}^2+s}+k_0')] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int\frac{\rho(s)ds}{2\sqrt{\boldsymbol{k}'^2+s}}\left(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{k}'^2+s}-k_0'-i\varepsilon}\right. \\ &\quad\left.+\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{k}'^2+s}+k_0'-i\varepsilon}\right) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int\frac{\rho(s)ds}{s+k'^2-i\varepsilon} \end{aligned}$$

与(7.55)一致。

现在举一个例子，设有一个传播子 Δ，它的 Källen – Lehmann 表示是

$$\Delta(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int\frac{\rho(s)\mathrm{d}s}{s+k^2-i\varepsilon} \tag{7.60}$$

则 $\Delta(x_i-x_j)$ 可以写成

$$\Delta(x_i-x_j) = \theta(x_{i0}-x_{j0})\Delta^+(x_i-x_j) + \theta(x_{j0}-x_{i0})\Delta^-(x_i-x_j) \tag{7.61}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta^{\pm}(x_i-x_j) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^4k e^{ik(x_i-x_j)}\int\mathrm{d}s\rho(s)\theta(\pm k_0)\delta(k^2+s)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^4k e^{ik(x_i-x_j)}\theta(\pm k_0)\rho(-k^2)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}(\bar{x}_i-\bar{x}_j)}\frac{e^{\mp i\omega(x_{i0}-x_{j0})}}{2\omega}\rho(s)ds\end{aligned} \tag{7.62}$$

$$(\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+s})$$

由(7.62)又得到

$$(\Delta^+(x_i-x_j))^* = \Delta^-(x_i-x_j),(\Delta^-(x_i-x_j))^* = \Delta^+(x_i-x_j) \tag{7.63}$$

$$\Delta^+(x_j-x_i) = \Delta^-(x_i-x_j),(\Delta^-(x_j-x_i))^* = (\Delta^+(x_i-x_j))^* \tag{7.64}$$

(请读者自己检验)。

最大时间方程

设对应于某一个费曼图,有如下费曼(积分)函数:

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n), \tag{7.65}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是顶点。则可定义 x 下面带横线的 F:

$$F(x_1,x_2,\cdots,\underline{x}_i,\cdots,\underline{x}_j,\cdots,x_n)。 \tag{7.66}$$

定义如下:

1. 若 $\Delta(x_i-x_j)$ 下无横线,则不改动。
2. 若 $\underline{x}_i$ 有横线,x_j 无横线,则 $\Delta(x_i-x_j)$ 换成 $\Delta^+(x_i-x_j)$。
3. 若 x_i 无横线,$\underline{x}_j$ 有横线,则 $\Delta(x_i-x_j)$ 换成 $\Delta^-(x_i-x_j)$。
4. 若 x_i、x_j 都有横线,则 $\Delta(x_i-x_j)$ 换成 $(\Delta(x_i-x_j))^*$。
5. 对每一个有下加横线的 x_i,顶点的 $i\mathscr{L}_I$ 中的 i 换成 $-i$(别的 i 不改号)。
6. 其他费曼规则如常。

以上从(7.54)开始,考察的都是玻色类型的 $\Delta(x_i-x_j)$ 传播子。现在补充考察一下费米类型的 $S(x_i-x_j)$ 传播子,以及 ξ 规范的规范场传播子。而且只考察没有经过微扰修正的传播子就已足够。

1. 没有经过微扰修正的费米类型传播子:

$$\begin{aligned}S_F(x_i-x_j) &= \left(-\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}+m\right)\frac{1}{(2\pi)^4}\int\mathrm{d}^4k\frac{-i}{k^2+m^2-i\varepsilon}e^{ik(x_i-x_j)}\\ &= \left(-\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}+m\right)\Delta_F(x_i-x_j)\\ &= \left(-\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}+m\right)(\theta(x_{i0}-x_{j0})\Delta^+(x_i-x_j)\end{aligned}$$

$$+\theta(x_{j0}-x_{i0})\Delta^-(x_i-x_j)) \tag{7.67}$$

(见(2.47)式)。与上面对比,除增加了$\left(-\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}+m\right)$外,其余部分无非就是$\Delta_F$和$\Delta^\pm$,满足(7.62)和(7.63)的性质。于是,如果(7.65)中含有费米类型的传播子,则定义2. 可改成$S_F(x_i-x_j)$换成

$$\left(-\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}+m\right)\Delta^+(x_i-x_j);$$

定义3. 可改成$S_F(x_i-x_j)$换成

$$\left(-\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}+m\right)\Delta^-(x_i-x_j);$$

定义4. 可改成$S_F(x_i-x_j)$换成

$$\left(-\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}+m\right)(\Delta_F(x_i-x_j))^*。$$

就是说,只改动Δ_F部分,而$\left(-\gamma\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}+m\right)$不改动。如果采取这样的定义,则以下的讨论对于费曼图中含有费米传播子的情况也能适用。

2. 没有经过微扰修正的规范场(ξ规范)的传播子(见§2-3,例2):

$$\begin{aligned}\Delta^{ij}_{\mu\nu}(x_i-x_j) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,\frac{-i}{k^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right)\delta_{ij}e^{ik(x_i-x_j)}\\ &= \delta_{\mu\nu}\delta_{ji}D(x_i-x_j)+\frac{\xi-1}{\xi}\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\nu}\triangle(x_i-x_j)\end{aligned} \tag{7.68}$$

其中第一项可写成

$$D(x_i-x_j) = \theta(x_{i0}-x_{j0})D^+(x_i-x_j)+\theta(x_{j0}-x_{i0})D^-(x_i-x_j) \tag{7.69}$$

相当于(7.60)中取

$$\rho(s) = \delta(s)$$

从而

$$D(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\frac{1}{k^2-i\varepsilon} \tag{7.70}$$

利用(7.59)又有(对照(7.62)):

$$\begin{aligned}D\pm(x_i-x_j) &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4k e^{ik(x_i-x_j)}\theta(\pm k_0)\delta(k^2)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\boldsymbol{k} e^{i\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j)}\frac{e^{\mp i\omega(x_{i0}-x_{j0})}}{2\omega}\end{aligned} \tag{7.71}$$

$$(\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2})$$

满足(7.63)和(7.64)。

再看(7.68)第二项,它也可写成

$$\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\nu}\triangle(x_i-x_j)$$

$$= \frac{\partial}{\partial(x_i - x_j)_\mu} \frac{\partial}{\partial(x_i - x_j)_\nu}(\theta(x_{i0} - x_{j0}) \underline{\Delta}^+ (x_i - x_j) + \theta(x_{j0} - x_{i0}) \underline{\Delta}^- (x_i - x_j)$$

(7.72)

其中

$$\underline{\Delta}(x_i - x_j) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - i\epsilon)^2} e^{ik(x_i - x_j)} \tag{7.73}$$

可以如下来找$\underline{\Delta}^+$和$\underline{\Delta}^-$，自(2.71)，在欧氏空间中：

$$\underline{\Delta}(x_{iE} - x_{jE}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k_E \frac{e^{ik_E x_E}}{(\nu^2 + \omega^2)^2}。 \tag{7.74}$$

转到闵氏空间

$$\underline{\Delta}(x_E) \xrightarrow{\text{转闵氏空间}} \underline{\Delta}(x) = \begin{cases} \int \frac{d^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} e^{k \cdot \bar{x}} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{4\omega^3} + \frac{ite^{-i\omega t}}{4\omega^2} \right) \\ \quad (t > 0) \\ \int \frac{d^3 \bar{k}}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot \bar{x}} \left(\frac{e^{i\omega t}}{4\omega^3} - \frac{ite^{i\omega t}}{4\omega^2} \right) \\ \quad (t < 0) \end{cases} \tag{7.75}$$

所以

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}(x) = & \theta(t) \int \frac{d^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot \bar{x}} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{4\omega^3} + \frac{ite^{-i\omega t}}{4\omega^2} \right) \\ & + \theta(-t) \int \frac{d^3 \boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} e^{ik \cdot \bar{x}} \left(\frac{e^{i\omega t}}{4\omega^3} - \frac{ite^{i\omega t}}{4\omega^2} \right) \end{aligned} \tag{7.76}$$

于是

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}^+(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \boldsymbol{k} e^{ik \cdot \bar{x}} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{4\omega^3} + \frac{ite^{-i\omega t}}{4\omega^2} \right) \\ \underline{\Delta}^-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \boldsymbol{k} e^{ik \cdot \bar{x}} \left(\frac{e^{i\omega t}}{4\omega^3} - \frac{ite^{i\omega t}}{4\omega^2} \right) \end{aligned} \tag{7.77}$$

检验一下：

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}(k') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ik'x} d^4 x \, \underline{\Delta}(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ik'x} d^4 x (\theta(t) \underline{\Delta}^+(x) + \theta(-t) \underline{\Delta}^-(x)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{i\kappa t}}{\kappa - i\varepsilon} \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') d^3 \boldsymbol{k} dt e^{ik'_0 t} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{4\omega^3} + \frac{ite^{-i\omega t}}{4\omega^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{e^{-i\kappa t}}{\kappa - i\varepsilon} \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') d^3 \boldsymbol{k} dt e^{ik'_0 t} \left(\frac{e^{+i\omega t}}{4\omega^3} - \frac{ite^{+i\omega t}}{4\omega^2} \right) \right. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')}{\kappa - i\varepsilon} d^3 \boldsymbol{k} \left(\frac{1}{4\omega^3} \delta(\kappa + k'_0 - \omega) \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\omega^2} \frac{\partial}{\partial \kappa} \delta(\kappa + k'_0 - \omega) \right) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')}{\kappa - i\varepsilon} d^3 \boldsymbol{k} \left(\frac{1}{4\omega^3} \delta(\kappa - k'_0 - \omega) \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{4\omega^2}\frac{\partial}{\partial\kappa}\delta(\kappa-k_0'-\omega)\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\Big[\int d^3k\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\Big(\frac{1}{4\omega^3(\omega-k_0'-i\omega)}+\frac{1}{4\omega^2}\frac{1}{(\omega-k_0'-i\varepsilon)^2}\Big)$$

$$+\int d^3k\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\Big(\frac{1}{4\omega^3(\omega+k_0'-i\varepsilon)}+\frac{1}{4\omega^2}\frac{1}{(\omega+k_0'-i\varepsilon)^2}\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int d^3k\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\frac{4\omega^3}{4\omega^3(\omega-k_0'-i\varepsilon)^2(\omega+k_0'-i\varepsilon)^2}(\omega^2=\boldsymbol{k}^2)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int\frac{d^3k\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')}{(\boldsymbol{k}^2-k_0'-i\varepsilon)^2}=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\frac{1}{(\boldsymbol{k}'^2-k_0'-i\varepsilon)^2}$$

与(7.73)一致,而且$\triangle^+$和$\triangle^-$满足(7.63),(7.64)。

所以,和费米传播子的情况类似,定义 2 可改成$\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\nu}\triangle(x_i-x_j)$换成

$$\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\nu}\triangle^+(x_i-x_j);$$

定义 3 可改成$\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\nu}\triangle(x_i-x_j)$换成

$$\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\nu}\triangle^-(x_i-x_j);$$

定义 4 可改成$\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\nu}\triangle(x_i-x_j)$换成

$$\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_\nu}\triangle^*(x_i-x_j)。$$

也是只改动$\triangle$部分。如果采取这样的定义,则以下的讨论对于费曼图中含有规范场传播子(ξ 规范)的情况也适用。

至于其他的规范,例如 R_ξ 规范,我们有(见(2.84)):

$$\Delta_{\mu\nu}^{ij}(x_i-x_j)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}e^{ik(x_i-x_j)}\cdot\delta_{ij}\cdot\Big[\frac{-i}{(k^2+M_W^2-i\varepsilon)}\delta_{\mu\nu}+\frac{-i(1-\xi)k_\mu k_\nu}{(k^2+M_W^2-i\varepsilon)(\xi k^2+M_W^2-i\varepsilon)}\Big] \tag{7.78}$$

其中

$$\frac{1}{(k^2+M_W^2-i\varepsilon)(\xi k^2+M_W^2-i\varepsilon)}=\frac{1}{(1-\xi)k^2}\Big(\frac{1}{(k^2+M_W^2-i\varepsilon)}-\frac{1}{(\xi k^2+M_W^2-i\varepsilon)}\Big) \tag{7.79}$$

所以也类似于(7.60)的例子以及上面规范场传播子一节(因为有 $k_\mu k_\nu$)已经讨论过的情况,这里无须重复。

总之,在上面讨论的基础上,我们可以把各种情况都归结为(7.66)所定义的情况。不必写出微商,因为写出或不写出微商,与下面的讨论及其结论无关。事实上我们要研究的是极点有害无害的问题,如果在微商之前只有无害极点,则微商后仍是只有无害极点。

以下就按(7.66)的定义(不考察微商)继续进行讨论。

设x_{i0}是(7.66)的F所含全体$x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0}$中最大的一个,则$F$函数中任一个与$x_i$相连的$\Delta(x_i-x_k)$必定都等于$\theta(x_{i0}-x_{k0})\Delta^+(x_i-x_k)=\Delta^+(x_i-x_k)$。于是就得到最大时间方程:

$$F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,\underline{x}_j,\cdots,x_n)=-F(x_1,\cdots,\underline{x}_i,\cdots,\underline{x}_j,\cdots,x_n) \tag{7.80}$$

因为1. 对于没有划横线的x_l,$x_{i0}>x_{l0}$。(7.80)左右两边都是$\Delta^+(x_i-x_l)$,相同。

2. 对于划横线的$\underline{x}_j$,左边的是$\Delta^-(x_i-x_j)$,右边是$(\Delta(x_i-x_j))^*=(\Delta^+(x_i-x_j))^*=\Delta^-(x_i-x_j)$,相同。

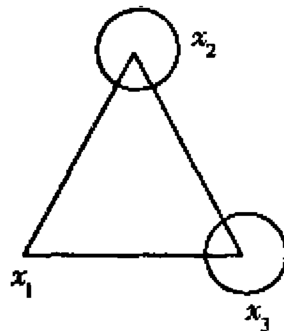


图 7.5

3. 左边x_i处的$i\mathscr{L}_1$在右边换成$-i\mathscr{L}_1$。所以左右只差一个(-)号。

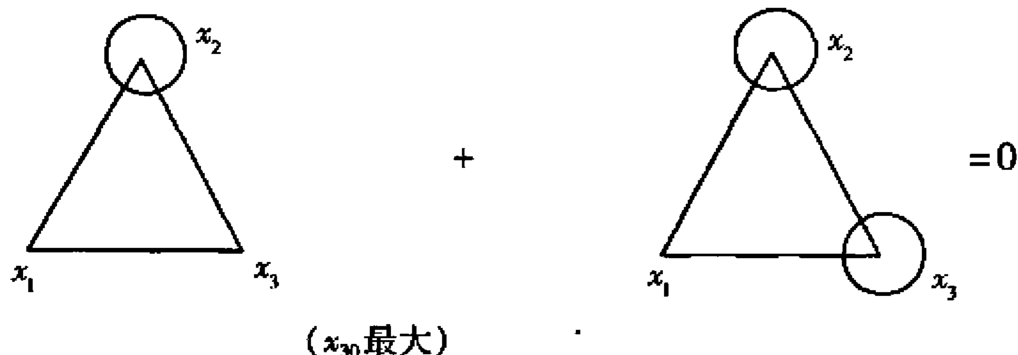
考察一个与F相应的图7.5,其中加圈的是下加横线的顶点。于是有

$$F(x_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3)\cong(ig_1)(-ig_2)(-ig_3)\Delta^+(x_3-x_1)\Delta^*(x_2-x_3)\Delta^-(x_1-x_2) \tag{7.81}$$

如果x_{30}最大,则(理由如前):

$$F(x_1,\underline{x}_2,x_3)+F(x_1,\underline{x}_2,\underline{x}_3)=0 \tag{7.82}$$

可用图表示如下:



(x_{30}最大)

图 7.6

在这种图里,连接一个带圈的顶点$\underline{x}_i$和一个不带圈的顶点x_j的线可以写成$\Delta^+(x_i-x_j)$,也可写成$\Delta^-(x_j-x_i)$,它们是相等的(见(7.64))。

重要的是,能量总是从不带圈的顶点流向带圈的顶点。例如,自(7.62)、(7.71)、(7.77)看到

$\Delta^+(x_i-x_j)$中含$e^{-i\omega(x_{i0}-x_{j0})}$而且$\omega>0$,

$\Delta^-(x_i-x_j)$中含$e^{i\omega(x_{i0}-x_{j0})}$而且$\omega>0$。

由于在场算符中,总是

吸收算符与$e^{-i\omega x_0}$相乘,

放出算符与$e^{i\omega x_0}$相乘,

所以$\Delta^+(x_i-x_j)$传播子表明能量 ω 自 x_j 流向 x_i，

$\Delta^-(x_i-x_j)$传播子表明能量 ω 自 x_i 流向 x_j。

进一步又可把最大时间方程扩充成为

$$\sum_{\text{一切加横线方式}} F(x_1,\cdots,\underline{x}_i,\cdots,\underline{x}_j,\cdots,x_n) = 0 \tag{7.83}$$

这里的求和包括全不加横线和全加横线。

证明：把(7.83)中最大的 x_{i0} 挑出来，与(7.80)对照，可以看到含 $\underline{x}_i$ 的项与含 x_i 的项一一对应，(±)号相反，两两相消。

切割方程

对于任意一个费曼图(例如图 7.7)，每两个顶点之间的线段，都代表一个 $\Delta(x_i-x_j)$ 函数。如果有些顶点是加圈的，则两个顶点之间的线段就有代表 $\Delta^+(x_i-x_j)$，$\Delta^-(x_i-x_j)$，$\Delta(x_i-x_j)$和$(\Delta(x_i-x_j))^*$ 等四种可能情况。由于能量守恒①，并非任何的顶点加圈的图都不等于零。例如 7.8 图：

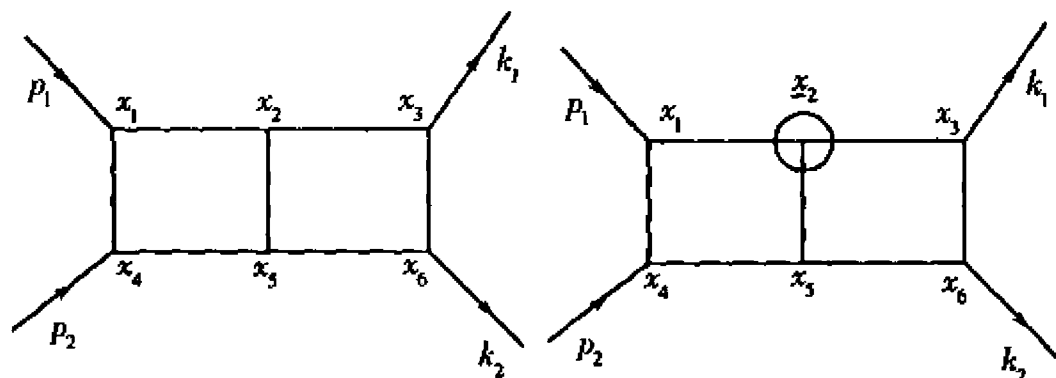


图 7.7　　　　图 7.8

由于 $\underline{x}_2$ 不与流出线(即标有 k_1，k_2 的线)相连，而根据(7.66)的定义和上面关于$\Delta^+(x_i-x_j)$和$\Delta^-(x_i-x_j)$的能量流向的讨论，x_1、x_3、x_5 顶点都要向 $\underline{x}_2$ 输送能量，所以这个图与能量守恒相抵触，不能满足能量守恒的 δ 函数②，它的贡献必定是 0。同理，图 7.9 中各图的贡献也都是 0，因为都不满足能量守恒。

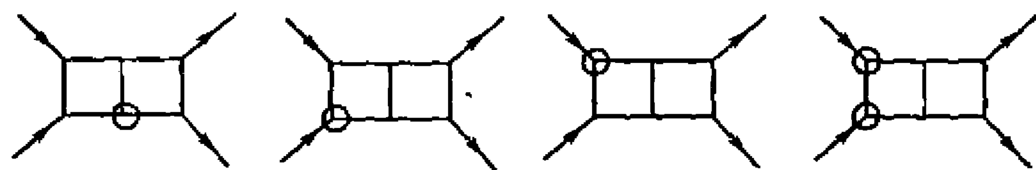


图 7.9

---

① 作 $d^4\lambda$ 积分后，每一个顶点出一个 δ 函数，保证能量动量守恒。

② 注意在 Δ^+ 中有 $e^{-ik_0(x_{i0}-y_{i0})}\theta(k_0)$ 因子，在 Δ^- 中有 $e^{-ik_0(x_{i0}-y_{i0})}\theta(-k_0)$ 因子，所以都是 $\omega>0$，另外，在(7.77)的情况，$te^{-i\omega t}=i\frac{\partial}{\partial\omega}e^{-i\omega t}$所提供的是$\frac{\partial}{\partial\omega}\delta(\omega+\cdots)$，所以照样有能量 δ 函数。

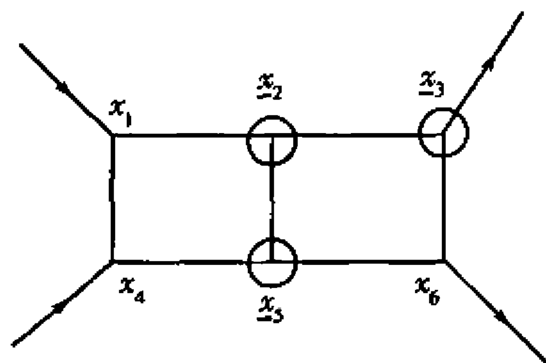


图 7.10

图 7.10 也等于 0，因为 x_6 只有流出能量，没有流入，能量也不能守恒：

如果要得到不等于 0 的贡献，则必须不违反能量守恒。就是说，必须带圈的顶点连成一个区域，其中包括连接流出线的顶点；不带圈的顶点也连成一个区域，其中包括连接流进线的顶点。图 7.11 给出了是三个不等于 0 的例子，图中等式左方是顶点加圈的图，等式右方是画线标出不同区域的图，阴影区代表带圈顶点的区域。

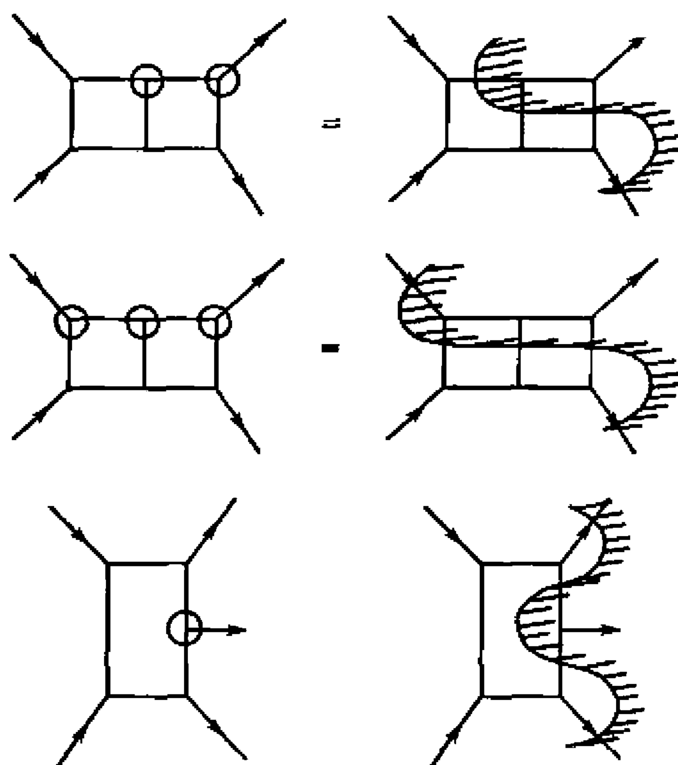


图 7.11

从图上看到，能量都是从无阴影区流向有阴影区。

再回到(7.83)。去掉等于 0 的各个项后，公式(7.83)又可写成

$$\underbrace{F(x_1,x_2,\cdots,x_n)}_{\text{都不加横线}} + \underbrace{F(\underline{x}_1,\underline{x}_2,\cdots,\underline{x}_n)}_{\text{都加横线}}$$

$$= -\sum_{\substack{\text{各种}\neq 0\\\text{的切割}}} F(\text{费曼图的不等于 0 的切割}) \tag{7.84}$$

这是最简单的一种切割方程。

以下再写一种更有用的切割方程：

设 $x_{i0} < x_{j0}$，x_{i0} 并不是最大，则有

$$\sum_{\substack{x_i\text{不加横线的}\\\text{各种加横线方式}}} F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) = 0 \qquad x_{i0} < x_{j0} \tag{7.85}$$

证明：(7.85)中包括全不加横线的项。把其中最大时间 x_{m0} 挑出来，则含 x_m 与含 $\underline{x}_m$ 的项

一一对应,符号相反,两两相消。与前不同的只是 x_i 不加横线。

与(7.85)相仿,设 $x_{j0} < x_{i0}$,x_{j0} 并不是最大,则有

$$\sum_{\substack{x_j\text{不加横线的}\\ \text{各种加横线方式}}} F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) = 0 \qquad x_{i0} > x_{j0} \tag{7.86}$$

证明同上,注意(7.86)中也包括全不加横线的项。

(7.85)又可写成:

$$\begin{aligned} &\theta\,(x_{j0} - x_{i0}) F(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n) \\ &= -\theta(x_{j0} - x_{i0}) \sum_i{}' F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) \end{aligned} \tag{7.87}$$

$\sum_i{}'$ 表示各种加了横线的项之和,但 x_i 不加横线。

(7.86)又可写成:

$$\begin{aligned} &\theta\,(x_{i0} - x_{j0}) F(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n) \\ &= -\theta(x_{i0} - x_{i0}) \sum_j{}' F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) \end{aligned} \tag{7.88}$$

$\sum_j{}'$ 表示各种加了横线的项之和,但 x_j 不加横线。

(7.87)与(7.88)相加,得到

$$\begin{aligned} F(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n) &= -\theta(x_{j0} - x_{i0}) \sum_i{}' F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) \\ &\quad - \theta(x_{i0} - x_{j0}) \sum_j{}' F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) \end{aligned} \tag{7.89}$$

(7.89)右方的 $\sum_i{}'$ 也包括 x_j 不加横线的项,$\sum_j{}'$ 也包括 x_i 不加横线的项。把这些 x_i 和 x_j 都不加横线的项加起来,就得到各种至少有一个顶点加了横线但 x_i,x_j 不加横线的项之和,记作

$$\sum_{ij}{}' F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n)$$

于是(7.89)又写成:

$$\begin{aligned} F(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n) &= -\sum_{ij}{}' F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) \\ &\quad - \theta(x_{j0} - x_{i0}) \sum_{\substack{i\text{不加横线}\\ j\text{加横线}}}{}' F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) \\ &\quad - \theta(x_{i0} - x_{j0}) \sum_{\substack{j\text{不加横线}\\ i\text{加横线}}}{}' F(x_1,\cdots,\underline{x}_k,\cdots,x_n) \end{aligned} \tag{7.90}$$

说明两点:

1. $\sum'$ 中的 $\underline{x}_k$ 的 k 并不是固定的,而是给各种可能有的 x_k 加上横线。

2. $\sum_{ij}{}'$, $\sum_{\substack{i\text{不加横线}\\ j\text{加横线}}}{}'$, $\sum_{\substack{j\text{不加横线}\\ i\text{加横线}}}{}'$ 表示每一项都至少有一个顶点是加了横线的。

为了说明(7.90),现在举一个五顶点的例子:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$$

取 $i=1, j=2$，若 $x_{10} < x_{20}$，则又有两种情况：

一种是 x_{20} 为最大时间（$m=2$），则有（x_1 不加横线）：

$$\theta(x_{20}-x_{10})F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = -\theta(x_{20}-x_{10})F(x_1,\underline{x}_2,x_3,x_4,x_5) \quad (7.91)$$

$x_1x_2x_3x_4x_5 \quad x_1x_2\underline{x}_3x_4x_5 \quad x_1x_2\underline{x}_3x\ \underline{x}_4x_5\cdots$

$x_1\underline{x}_2x_3x_4x_5 \quad x_1\underline{x}_2\underline{x}_3x_4x_5 \quad x_1\underline{x}_2\underline{x}_3\underline{x}_4x_5\cdots$

除头两项留下来写在等式两端外，其余都两两抵消。

一种是 x_{30}（或 x_{40}，或 x_{50}）为最大时间（$m=3$，或4，或5），则有（x_1 不加横线）：

$$\theta(x_{20}-x_{10})F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = -\theta(x_{20}-x_{10})F(x_1,x_2,\underline{x}_3,x_4,x_5) \quad (7.92)$$

$$(\text{或} = -\theta(x_{20}-x_{10})F(x_1,x_2,x_3,\underline{x}_4,x_5)$$

$$\text{或} = -\theta(x_{20}-x_{10})F(x_1,x_2,x_3,x_4,\underline{x}_5))$$

$m=3$ 时有

$x_1x_2x_3x_4x_5 \quad x_1x_2x_3\underline{x}_4x_5 \quad x_1\underline{x}_2x_3x_4x_5$

$x_1x_2\underline{x}_3x_4x_5 \quad x_1x_2\underline{x}_3\underline{x}_4x_5 \quad x_1\underline{x}_2\underline{x}_3x_4x_5$

$x_1\underline{x}_2x_3\underline{x}_4x_5\cdots$

$x_1\underline{x}_2\underline{x}_3\underline{x}_4x_5\cdots$

也是除头两项留下来写在等式两端外，其余都两两抵消

$m=4, m=5$ 也有类似情况

相仿，若 $x_{20} < x_{10}$，则也有两种情况：

一种是 x_{10} 为最大时间，则有

$$\theta(x_{10}-x_{20})F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = -\theta(x_{10}-x_{20})F(\underline{x}_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \quad (7.93)$$

一种是 x_{30}（或 x_{40}，或 x_{50}）为最大时间，则有：

$$\theta(x_{10}-x_{20})F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = -\theta(x_{10}-x_{20})F(x_1,x_2,\underline{x}_3,x_4,x_5) \quad (7.94)$$

$$(\text{或} = -\theta(x_{10}-x_{20})F(x_1,x_2,x_3,\underline{x}_4,x_5)$$

$$\text{或} = -\theta(x_{10}-x_{20})F(x_1,x_2,x_3,x_4,\underline{x}_5))$$

把(7.91)～(7.94)合在一起，则可看到 x_1,x_2 都不加横线的项可以合并，消去 θ 函数，从而得到取(7.90)形式的方程。这正是我们要利用的切割方程。

为了后面讨论的需要，我们可以用下图来表示(7.90)式，其中 $i=1, j=2$，阴影区就是带圈顶点联成的区域，无阴影区就是不带圈顶点联成的区域：

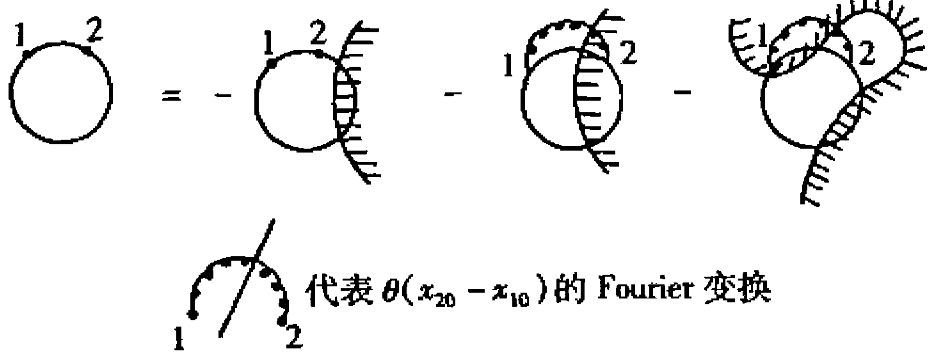


图 7.12

图 7.12 的好处是它的阴影区表明了带圈的顶点是联成一片的，从而排除了等于 0 的（能量不守恒的）那些项。而且在 7.12 图中，右方代表各种可能的阴影（各种满足能量守恒的带圈情况），包括比方说 $x_i(i \neq 1,2)$ 下面画横线和下面不画横线两种情况，所以我们除 1，2 外，不再标出其他的顶点。

切割图的费曼规则

1. $\qquad \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{1}{-k_0-i\varepsilon}\delta^3(\boldsymbol{k})$

因
$$\theta(x_{i0}-x_{j0}) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{ik_0(x_{i0}-x_{j0})}}{k_0-i\varepsilon}\mathrm{d}k_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-ik_0(x_{i0}-x_{j0})}}{-k_0-i\varepsilon}\mathrm{d}k_0 \tag{7.95}$$

2. 标量场：

阴影外传播子：

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon} \tag{7.96}$$

阴影内传播子（（7.66）定义）：

$$\frac{1}{(2\pi)^4(-i)}\cdot\frac{1}{k^2+m^2+i\varepsilon} \tag{7.97}$$

切割线（见（7.62），（7.71））：

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\theta(k_0)\delta(k^2+m^2) \tag{7.98}$$

3. 1/2 自旋场：

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\frac{-i\hat{k}+m}{k^2+m^2-i\varepsilon} \tag{7.99}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{-i}\frac{-i\hat{k}+m}{k^2+m^2+i\varepsilon} \tag{7.100}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}(-i\hat{k}+m)\theta(k_0)\delta(k^2+m^2) \tag{7.101}$$

（根据(7.66)的定义和后面的有关讨论，下加横线只涉及 Δ,Δ^*,Δ^*，不改动微商部分）。

4. 1 自旋场（有静止质量）：

$$\frac{1}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{\delta_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/\mu^2}{k^2+m^2-i\varepsilon} \tag{7.102}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4(-i)}\cdot\frac{\delta_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/m^2}{k^2+m^2+i\varepsilon} \tag{7.103}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}(\delta_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu/m^2)\theta(k_0)\delta(k^2+m^2) \tag{7.104}$$

（也是下加横线只涉及 $\Delta,\Delta^*,\Delta^\pm$，不改动微商部分）。

5. 规范场（ξ 规范）：

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\frac{1}{k^2-i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-i\varepsilon}\right) \tag{7.105}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{-i}\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{\xi-1}{\xi}\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i\varepsilon}\right) \tag{7.106}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\left[\theta(k_0)\delta(k^2)\delta_{\mu\nu}-\frac{\xi-1}{\xi}k_\mu k_\nu\left(\frac{\theta(k_0)\delta(k^2)}{2k_0^2}+\frac{\partial}{\partial k_0}\frac{\theta(k_0)\delta(k^2)}{2k_0}\right)\right] \tag{7.107}$$

〔关于(7.107)式可参看(7.71)和(7.77)，并注意到（利用部分积分）：

$$\underline{\Delta}^\pm(x)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{ik\cdot x}\left(\frac{e^{\mp i\omega t}}{4\omega^3}\pm\frac{ite^{\mp i\omega t}}{4\omega^2}\right)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k dk_0 e^{ik\cdot x-ik_0t}\left(\frac{\theta(\pm k_0)\delta(k^2-k_0^2)}{2k_0^2}+\frac{it\theta(\pm k_0)\delta(k^2-k_0^2)}{2k_0}\right)$$

$$(\omega=|k|)$$

请读者自己检验。〕

6. 顶点：阴影外 $(2\pi)^4 i$，阴影内 $-(2\pi)^4 i$。

现在再举两个例子来验证(7.84)和(7.90)。

例 1. 对于一个传播子，(7.84)可用下图表达：

图 7.13

我们以标量场为例来验证这个等式。

左方：$\left[\frac{1}{(2\pi)^4 i}\frac{1}{k^2+m^2-i\varepsilon}-\frac{1}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{1}{k^2+m^2+i\varepsilon}\right]$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\delta(k^2+m^2) \tag{7.108}$$

$$\left(\text{此地利用了}\frac{1}{a\mp i\varepsilon}=P\left(\frac{1}{a}\right)\pm i\pi\delta(a)\right)。$$

右方：$\left[-(-)\frac{1}{(2\pi)^3}\theta(k_0)\delta(k^2+m^2)-(-)\frac{1}{(2\pi)^3}\theta(-k_0)\delta(k^2+m^2)\right]$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\delta(k^2+m^2) \tag{7.109}$$

（(−)号来自顶点）。

两边相等，说明等式是成立的。

例2. 对同一个传播子，(7.90)可用下图表达：

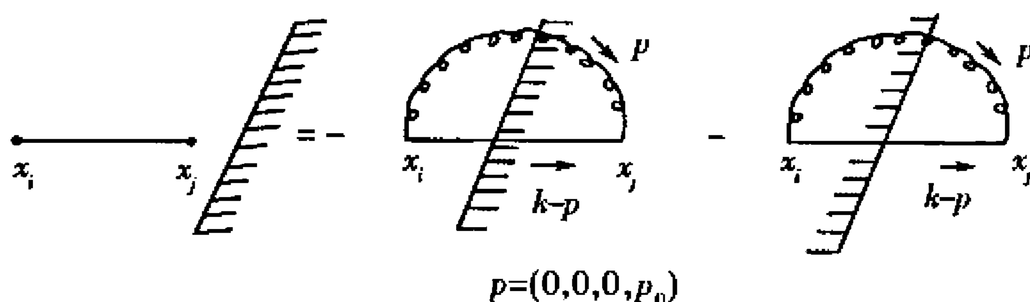


图 7.14

仍以标量场为例来验证这个等式（用(7.95)，(7.96)）：

右方：$\left[-(-)\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int\frac{dp_0}{-p_0-i\varepsilon}\delta^3(p)d^3p\theta(k_0-p_0)\delta((k-p)^2+m^2)\right.$

$$\left.-(-)\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{i}\int\frac{dp_0}{p_0-i\varepsilon}\delta^3(p)d^3p\theta(-k_0+p_0)\delta((k-p)^2+m^2)\right]$$

$$=\int\frac{dp_0}{(2\pi)^4 i}\left(\frac{\theta(k_0-p_0)}{-p_0-i\varepsilon}+\frac{\theta(-k_0+p_0)}{p_0-i\varepsilon}\right)$$

$$\cdot\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}}\left[\delta(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}-k_0+p_0)+\delta(\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}+k_0-p_0)\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}-k_0-i\varepsilon}+\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}+k_0-i\varepsilon}\right]$$

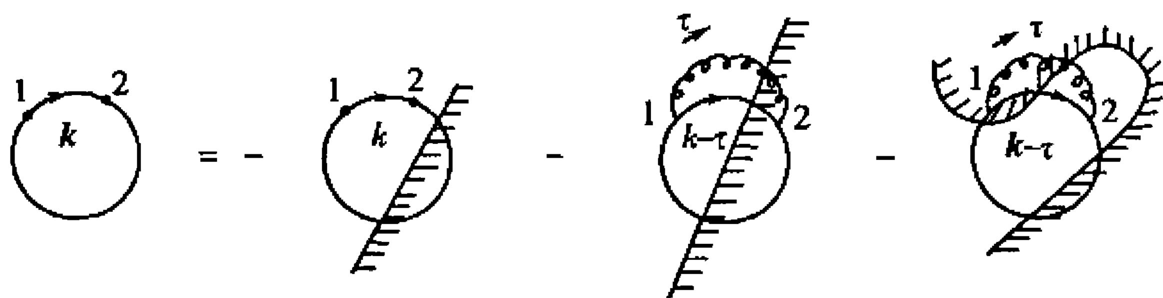
$$=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\cdot\frac{1}{\boldsymbol{k}^2-k_0^2+m^2-i\varepsilon} \tag{7.110}$$

（(−)号也是来自顶点）。

两边相等，说明等式是成立的。

§7−5 从切割图来看发散的产生

这一节将利用切割图来说明发散的产生。我们把图7.12重新画一遍，并标出内部动量 k：



$\tau = (0, 0, 0, \tau)$

图 7.15

$$f = -f' - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{-\tau - i\varepsilon} f^{+}(\tau) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon} f^{-}(\tau) \tag{7.111}$$

(7.111)的四个项与图7.15的四个图形一一对应。其中f是一个费曼积分;f'是一个切割图积分,x_1,x_2都在阴影外,不带$\theta(\pm(x_{10}-x_{20}))$。

第三项的$\frac{d\tau}{-\tau - i\varepsilon} f^{+}(\tau)$中含有

$$\frac{d\tau}{-\tau - i\varepsilon} e^{-i(x_{20}-x_{10})\tau} \theta(k_0 - \tau) \delta((k-\tau)^2 + m^2), \tag{7.112}$$

也就是说,$f^{+}(\tau)$等于$e^{-i(x_{20}-x_{10})\tau}\theta(k_0-\tau)\delta((k-\tau)^2+m^2)$乘上不带$\theta(\pm(x_{10}-x_{20}))$和$k-\tau$切割线的切割图。

第四项的$\frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon} f^{-}(\tau)$中含有

$$\frac{d\tau}{\tau - i\varepsilon} e^{-i(x_{20}-x_{10})\tau} \theta(-k_0 + \tau) \delta((k-\tau)^2 + m^2), \tag{7.113}$$

所以,$f^{-}(\tau)$等于$e^{-i(x_{20}-x_{10})\tau}\theta(-k_0+\tau)\delta((k-\tau)^2+m^2)$乘上不带$\theta(\pm(x_{10}-x_{20}))$和$k-\tau$切割线的切割图。

于是,当$\tau > k_0$,则$f^{+}(\tau)=0$;

当$\tau < k_0$,则$f^{-}(\tau)=0$。

此地k_0最大不超过所有自外线流入无阴影区的能量。

现在来证明,在(7.111)中,如果所有的次级发散(包括所有的子图发散)都已减除掉,则所有的切割图f',$f^{+}(\tau)$,$f^{-}(\tau)$都是不发散的。

证明:由于

1. 子图的发散都已去掉,所以子图是有限的。
2. 切割联接线所贡献的因子都含有阻止发散的因子

$$\theta(p_0 \pm k_0)\delta(p \pm k)^2 + m^2)。$$

例如图7.16,它显示切割线中的一小段,其中有一个k的小回路圈。在这个小回路上,当k_0给定时,由于

$$\delta((p \pm k)^2 + m^2) = \delta((\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{k})^2 - (p_0 \pm k_0)^2 + m^2)$$

的限制,同时,k_0,p_0不参与$d^3\boldsymbol{k}$积分的动量、能量,所以$d^3\boldsymbol{k}$积分必定是有限的。其次,由于因子

$$\theta(p_{20} - k_0)\theta(p_{10} + k_0)$$

的限制,积分k_0的区间是

$$p_{20} > k_0 > -p_{10},$$

也是有限的。所以在给定 p_1, p_2 的情况下,被切割的这个小回路圈的 d^4k 积分是不发散的。

3. 再考察整条切割线的两邻侧。图 7.17 上下两端的 p_1, p_2 代表流入阴影区的总的能量、动量,是不参与积分的。由于和 2. 一样的理由,每个 $d^3\boldsymbol{k}_i (i=1,2,\cdots,n)$ 的积分都

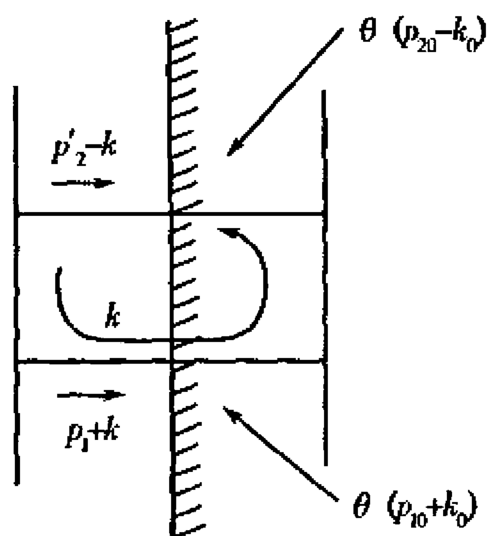


图 7.16

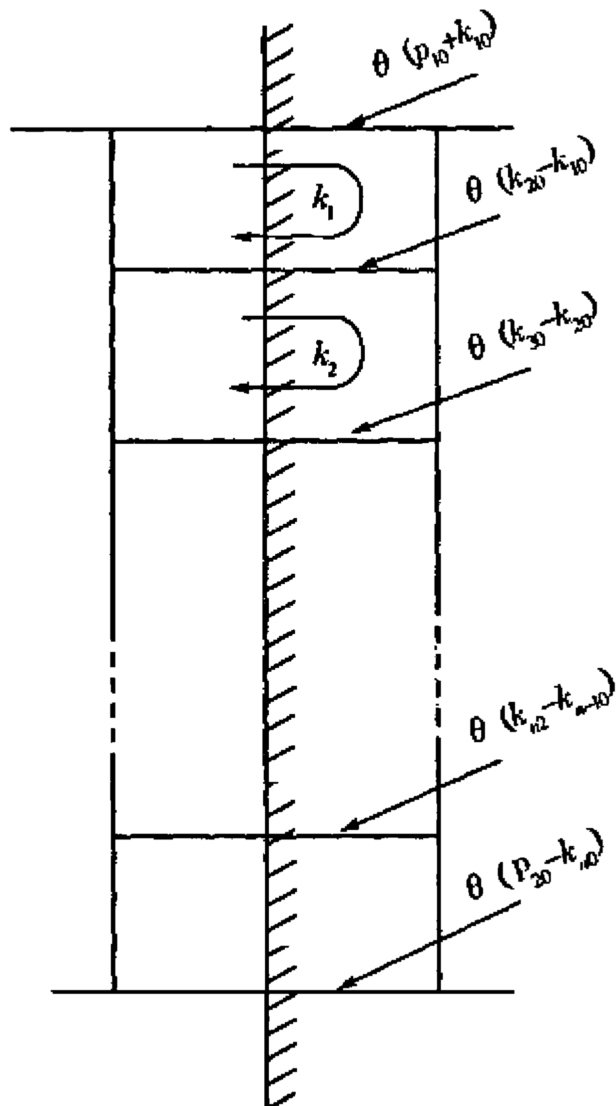


图 7.17

是有限的。其次,由于图上所求的 θ 函数,可以看到由上到下一圈一圈地作 $k_{10}, k_{20}, \cdots, k_{n0}$ 的积分时,每一个积分区都是有限的:

固定 $k_{20}, k_{30}, \cdots, k_{n0}$, $\quad k_{20} > k_{10} > -p_{10}$,

$\therefore$ k_{10} 积分区有限。可把 k_{10} 积分积掉。

固定 $k_{30}, \cdots, k_{n0}$, $\quad k_{30} > k_{20} > -p_{10}$,

$\therefore$ k_{20} 积分区有限。可把 k_{20} 积分积掉。

……

最后积 k_{n0}, $\quad p_{20} > k_{n0} > -p_{10}$

$\therefore$ k_{n0} 积分区也有限。

所以总的来说,每个 d^4k_i 积分都是一个没有紫外发散的积分。

4. $f', f^+(\tau), f^-(\tau)$ 都是由切割线两侧的子图和切割线上的 d^4k_i 积分做成的。既然子图不发散(已假设减除了次级发散),d^4k_i 积分不发散,则 $f', f^+(\tau), f^-(\tau)$ 就是不发散的(更严密地说,是没有紫外发散)。

因此,(7.111)左端的 f 的紫外发散只有来自 $d\tau$ 的积分。

关于(7.110)的一个具体例子

为了说明紫外发散来自 $d\tau$ 的积分，我们举一个标量场自能图的例子。图 7.15 现在简化成只有 f^+ 和 f^-，没有 f'。

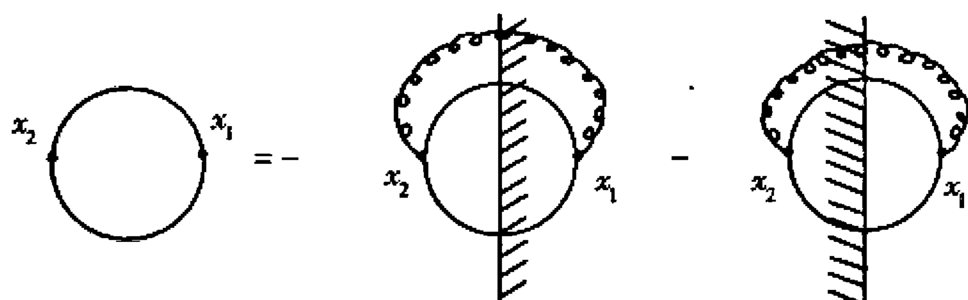


图 7.18

定义：

左图 $= f^+(k)$

$$\sim -\int d^n p\theta(-p_0)\delta(p^2+m^2)\theta(p_0+k_0)\delta((p+k)^2+M^2) \tag{7.114}$$

（(−)号来自 x_1 是下加横线的顶点）。注意这里的 $f^+(k)$ 与(7.111)的 $f^+(\tau)$ 稍有不同，它不是 τ 的函数，因为现在还没有引入 $\theta(x_{10}-x_{20})$ 和 $\theta(x_{20}-x_{10})$，后面再引入。

为了方便，不妨取静止系来计算 $f^+(k)$：

$$\mathbf{k}=0, k_0=\mu;$$

$$\omega^2=p_1^2+p_2^2\cdots+p_{n-1}^2, \qquad p^2=-p_0^2+\omega^2$$

$$\therefore (p+k)^2=-(p_0+\mu)^2+\omega^2$$

$$\begin{aligned} f^+(\mu) &\sim -\int d^{n-1}pdp_0\theta(-p_0)\delta(-p_0^2+\omega^2+m^2) \\ &\quad\cdot\theta(p_0+\mu)\delta(-p_0^2-\mu^2-2p_0\mu+\omega^2+M^2) \\ &= -\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\int_0^\infty \omega^{n-2}d\omega\int_{-\infty}^\infty dp_0\theta(-p_0)\delta(-p_0^2+\omega^2+m^2) \\ &\quad\cdot\theta(p_0+\mu)\delta(-2p_0\mu+M^2-m^2-\mu^2) \end{aligned} \tag{7.115}$$

这里利用了(6.1)的角度积分公式。

定义：

右图 $= f^-(k)$

$$\sim -\int d^n p\theta(p_0)\delta(p^2+m^2)\theta(-p_0-k_0)\delta((p+k)^2+M^2) \tag{7.116}$$

也取静止系来计算 $f^-(k)$：

$$f^-(\mu) \sim -\int d^{n-1}p dp_0 \theta(p_0)\delta(-p_0^2+\omega^2+m^2)$$
$$\cdot\theta(-p_0-\mu)\delta(-p_0^2-\mu^2-2p_0\mu+\omega^2+M^2)$$
$$=-\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{n-2}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\theta(p_0)\delta(-p_0^2+\omega^2+m^2)$$
$$\cdot\theta(-p_0-\mu)\delta(-2p_0\mu+M^2+m^2-\mu^2) \tag{7.117}$$

为了把图 7.18 用算式表达出来，我们首先必须把 $f^+(k)$，$f^-(k)$ 换成 $f^+(x_1-x_2)$，$f^-(x_1-x_2)$ 如下：

$$\begin{aligned} f^+(x_1-x_2) &= \int d^4k e^{ik(x_1-x_2)} f^+(k) \\ f^-(x_1-x_2) &= \int d^4k e^{ik(x_1-x_2)} f^-(k) \end{aligned} \tag{7.118}$$

其物理意义可从(7.114)、(7.116)左边的图中看出来：k 就是从 x_2 传播到 x_1 的净能量、动量，而 p 则是(要作积分的)内部能量、动量。

其次，还要给 $f^+(x_1-x_2)$ 装上 $\theta(x_{10}-x_{20})$，给 $f^-(x_1-x_2)$ 装上 $\theta(x_{20}-x_{10})$。这样就得出图 7.16 的表达式：

$$f(x_1-x_2)=\theta(x_{10}-x_{20})f^+(x_1-x_2)+\theta(x_{20}-x_{10})f^-(x_1-x_2) \tag{7.119}$$

相应的 k 表示则是

$$f(k)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x e^{-ikx}f(x)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\pi i}\int d^4x e^{-ikx}\int d\tau\frac{e^{i\tau x_0}}{\tau-i\varepsilon}e^{ik'x}f^+(k')d^4k'$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\pi i}\int d^4x e^{-ikx}\int d\tau\frac{e^{-i\tau x_0}}{\tau-i\varepsilon}e^{ik'x}f^-(k')d^4k'$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{f^+(\mathbf{k},k_0+\tau)}{\tau-i\varepsilon}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{f^-(\mathbf{k},k_0-\tau)}{\tau-i\varepsilon} \tag{7.120}$$

请注意这里的 $f^+(\mathbf{k},k_0+\tau)$，$f^-(\mathbf{k},k_0-\tau)$ 就是在(7.111)中的 $f^+(-\tau)$，$f^-(\tau)$，只是在(7.111)中我们没有把 $f^+(\tau)$，$f^-(\tau)$ 中的 k 标出。

按照上面的讨论，$f^+(\mathbf{k},k_0+\tau)$ 和 $f^-(\mathbf{k},k_0-\tau)$ 都不发散，$d\tau$ 积分后才出现发散。因此，为了讨论(7.120)的发散，可以先把 $f^+(\mathbf{k},k_0+\tau)$，$f^-(\mathbf{k},k_0-\tau)$ 求出来。

考虑到整个传播子以及自能图是 Lorentz 不变的，发散性质也是 Lorentz 不变的，不妨仍取静止系 $k=(0,\mu)$。于是，$f(k)$ 写成 $f(\mu)$；$f^+(\mathbf{k},k_0+\tau)$，$f^-(\mathbf{k},k_0-\tau)$ 写成 $f^+(0,\mu+\tau)$，$f^-(0,\mu-\tau)$。在这里 $f^+(0,\mu+\tau)$ 就是把(7.114)中的 $f^+(\mu)$ 换成 $f^+(\mu+\tau)$，$f^-(0,\mu-\tau)$ 就是把(7.116)中的 $f^-(\mu)$ 换成 $f^-(\mu-\tau)$。下面我们只需讨论 $f(\mu)$ 的发散性质，因为 $f(\mu)$ 的发散性质和 $f(k)$ 的是相同的。

现在先把(7.114)中的 dp_0 积分求出来：

$$\int_{-\infty}^{\infty}dp_0\theta(-p_0)\delta(-p_0^2+\omega^2+m^2)$$
$$\cdot\theta(p_0+\mu)\delta(-2p_0\mu+M^2-m^2-\mu^2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_0 \theta(-p_0) \delta(-p_0^2 + \omega^2 + m^2)$$

$$\cdot \theta(p_0 + \mu) \frac{1}{2|\mu|} \delta\left(p_0 - \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2\mu}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} \theta(-p_0)\theta(p_0+\mu) \text{ 要求} \\ p_0 < 0, \mu > 0。\end{matrix}\right)$$

$$= \theta\left(\frac{\mu^2 + m^2 - M^2}{2\mu}\right) \delta\left(\omega^2 + m^2 - \left(\frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2\mu}\right)^2\right) \theta\left(\frac{\mu^2 - m^2 + M^2}{2\mu}\right) \frac{1}{2|\mu|}$$

$$= \theta\left(\frac{\mu^2 - (M-m)^2 - 2m(M-m)}{2\mu}\right) \cdot \theta\left(\frac{\mu^2 - (M-m)^2 - 2M(m-M)}{2\mu}\right)$$

$$\cdot \delta\left(\omega^2 - \frac{(\mu^2 - (M-m)^2)(\mu^2 - (M+m)^2)}{4\mu^2}\right) \cdot \frac{1}{2|\mu|} \qquad (7.121)$$

M, m 都为正，或者 $M > m$，或者 $m > M$，两个 θ 函数中总有一个给出

$$\mu^2 - (M-m)^2 > 0 \qquad (7.122)$$

另一个不起作用。同时，$\omega^2 > 0$，δ 函数要求

$$(\mu^2 - (M-m)^2)(\mu^2 - (M+m)^2) > 0$$

利用(7.21)又得知

$$\mu^2 - (M+m)^2 > 0 \qquad (7.123)$$

所以，在 $\omega^2 > 0$ 的情况下，两个 θ 函数等价于一个 θ 函数：

$$\begin{aligned} \theta(\mu^2 - (M+m)^2) &= \theta((\mu - M - m)(\mu + M + m)) \\ &= \theta(\mu - M - m) \end{aligned} \qquad (7.124)$$

（由于 $\mu > 0$，故 $\mu + M + m > 0$，从而必须 $\mu - M - m > 0$）。于是

$$(7.121) = \theta(\mu - M - m)$$

$$\cdot \delta\left(\omega^2 - \frac{(\mu^2 - (M-m)^2))(\mu^2 - (M+m)^2)}{4\mu^2}\right) \cdot \frac{1}{2|\mu|} \qquad (7.125)$$

相仿再把(7.117)中的 dp_0 积分求出来：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p_0 \theta(p_0) \delta(-p_0^2 + \omega^2 + m^2) \cdot \theta(-p_0 - \mu) \frac{1}{2|\mu|} \delta\left(p_0 - \frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2\mu}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} \theta(p_0)\theta(-p_0-\mu) \text{ 要求} \\ p_0 > 0, \mu < 0 \end{matrix}\right)$$

$$= \theta\left(\frac{\mu^2 + m^2 - M^2}{2|\mu|}\right) \delta\left(\omega^2 + m^2 - \left(\frac{M^2 - m^2 - \mu^2}{2\mu}\right)^2\right) \theta\left(\frac{\mu^2 - m^2 + M^2}{2|\mu|}\right) \frac{1}{2|\mu|}$$

$$= \theta\left(\frac{\mu^2 - (M-m)^2 - 2m(M-m)}{2|\mu|}\right) \cdot \theta\left(\frac{\mu^2 - (M-m)^2 - 2M(m-M)}{2|\mu|}\right)$$

$$\cdot \delta\left(\omega^2 - \frac{(\mu^2 - (M-m)^2)(\mu^2 - (M+m)^2}{4\mu^2}\right) \cdot \frac{1}{2|\mu|} \qquad (7.126)$$

根据和上面同样的讨论，两个 θ 函数也归结为一个 θ 函数

$$\begin{aligned} \theta(\mu^2 - (M-m)^2) &= \theta((-|\mu| - M - m)(-|\mu| + M + m)) \\ &= \theta(-\mu - M - m) \end{aligned} \qquad (7.127)$$

（由于 $\mu<0$，故要求 $|\mu|-M-m=-\mu-M-m>0$。）
于是

$$
\begin{aligned}
(7.126) &= \theta(-\mu-M-m) \\
&\quad \cdot \delta\left(\omega^2-\frac{(\mu^2-(M-m)^2)(\mu^2-(M+m)^2)}{4\mu^2}\right)\cdot\frac{1}{2|\mu|}
\end{aligned}
\tag{7.128}
$$

再把(7.125)和(7.128)代入(7.115)和(7.117)，得到：

$$
\begin{aligned}
f^+(\mu) &\sim -\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\int_0^\infty \omega^{n-2}d\omega\cdot\theta(\mu-M-m)\delta(\omega^2-K^2)\frac{1}{2|\mu|} \\
&= -\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\theta(\mu-M-m)\frac{K^{n-3}}{4|\mu|}
\end{aligned}
\tag{7.129}
$$

$$
\begin{aligned}
f^-(\mu) &\sim -\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\int_0^\infty \omega^{n-2}d\omega\cdot\theta(-\mu-M-m)\delta(\omega^2-K^2)\frac{1}{2|\mu|} \\
&= -\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\theta(-\mu-M-m)\frac{K^{n-3}}{4|\mu|}
\end{aligned}
\tag{7.130}
$$

此地 $K^2>0(\omega^2>0)$，

$$
K=\sqrt{\frac{(\mu^2-(M-m)^2)(\mu^2-(M+m)^2)}{4\mu^2}}
\tag{7.131}
$$

取正值，因为 ω 在 $0—\infty$ 区间积分。

再把 $f^\pm(\mu)$ 中的 μ 分别换成 $\mu+\tau,\mu-\tau$，就得到

$$
f^+(0,\mu+\tau)=f^+(\mu+\tau)\sim-\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\theta(\mu+\tau-M-m)\frac{K^{n-3}}{4|\mu+\tau|}
\tag{7.132}
$$

$$
f^-(0,\mu-\tau)=f^-(\mu-\tau)\sim-\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\theta(-\mu+\tau-M-m)\frac{K^{n-3}}{4|\mu-\tau|}
\tag{7.133}
$$

在(7.120)中把 k 取静止系，并把(7.132)，(7.133)代入，则有

$$
\begin{aligned}
f(\mu) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{f^+(0,\mu+\tau)}{\tau-i\varepsilon}+\frac{1}{2\pi}i\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\frac{f^-(0,\mu-\tau)}{\tau-i\varepsilon} \\
&\sim -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\cdot\theta(\mu+\tau-M-m)\frac{K_+^{n-3}}{4|\mu+\tau|}\frac{d\tau}{\tau-i\varepsilon} \\
&\quad -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}\cdot\theta(-\mu+\tau-M-m)\frac{K_-^{n-3}}{4|\mu-\tau|}\frac{d\tau}{\tau-i\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{7.134}
$$

在(7.131)中把 μ^2 换成 $(\mu+\tau)^2$，就得 K_+；把 μ^2 换成 $(\mu-\tau)^2$，就得 K_-。

现在在第一项中把 $\tau+\mu$ 换成 τ'，在第二项中把 $\tau-\mu$ 换成 τ'，则 K_+，K_- 也都换成 K_τ（K_τ 就是在(7.131)中把 μ^2 换成 τ'^2）：

$$
\begin{aligned}
f(\mu) \sim & -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \theta(\tau'-M-m) \frac{K_\tau^{n-3}}{4|\tau'|} \frac{d\tau'}{\tau'-\mu-i\varepsilon} \\
& -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \theta(\tau'-M-m) \frac{K_\tau^{n-3}}{4|\tau'|} \frac{d\tau'}{\tau'-\mu-i\varepsilon} \\
= & -\int_{M+m}^{\infty} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \cdot \frac{K_\tau^{n-3}}{4\tau'} \frac{d\tau'}{\tau'-\mu-i\varepsilon} \\
& -\int_{M+m}^{\infty} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \cdot \frac{K_\tau^{n-3}}{4\tau'} \frac{d\tau'}{\tau'+\mu-i\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{7.135}
$$

考察(7.135)：先看红外发散。由于

$$
K_\tau^2 = \frac{1}{4\tau'^2}(\tau'-M-m)(\tau'+M+m)(\tau'-M+m)(\tau'+M-m), \tag{7.136}
$$

当 $n=1$，K_τ^{n-3} 就给出 $\frac{1}{K_\tau^2} \sim \frac{1}{\tau'-M-m}$ 因子，从而在 $\tau'=M+m$ 处，(7.135)有红外发散。但是事实上我们要使 n 趋于4，所以在(7.135)中并不出现红外发散。

再看紫外发散。当 $n \geqslant 4$，(7.135)有紫外发散，因为 τ' 大时，$K_\tau \sim \frac{\tau'}{4}$。因此，我们要用如下的减除办法把(7.135)的紫外发散分出来：

$$
\begin{aligned}
f(\mu) \sim & -\int_{M+m}^{\infty} d\tau' \frac{1}{\tau'} \frac{K_\tau^{n-3}}{4\tau'\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \\
& -\int_{M+m}^{\infty} d\tau' \left(\frac{1}{\tau'-\mu-i\varepsilon} - \frac{1}{\tau'}\right) \frac{K_\tau^{n-3}}{4\tau'\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \\
& -\int_{M+m}^{\infty} d\tau' \frac{1}{\tau'} \frac{K_\tau^{n-3}}{4\tau'\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \\
& -\int_{M+m}^{\infty} d\tau' \left(\frac{1}{\tau'+\mu-i\varepsilon} - \frac{1}{\tau'}\right) \frac{K_\tau^{n-3}}{4\tau'\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \\
= & -2\int_{M+m}^{\infty} d\tau' \frac{K_\tau^{n-3}}{4\tau'^2\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)} \\
& -\int_{M+m}^{\infty} d\tau' \left(\frac{\mu}{\tau'(\tau'-\mu-i\varepsilon)} - \frac{\mu}{\tau'(\tau'+\mu-i\varepsilon)}\right) \frac{K_\tau^{n-3}}{4\tau'\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)}
\end{aligned}
\tag{7.137}
$$

后一积分中的每一项积分函数都是(当 $\tau' \sim \infty$):

$$\sim \frac{1}{\tau'^3}\cdot\tau'^{n-3} = \tau'^{n-6},$$

$n=4$ 时没有紫外发散。所以对(7.137)只需考察第一个积分的紫外发散。略去常数因子(7.137)的第一个积分具有如下形式:

$$g = \int_{M+m}^{\infty} d\tau' \frac{K_\tau^{n-3}}{\tau'^2} \tag{7.138}$$

也用部分积分方法把 n 从 $4>n>3$ 区域延拓到 $n>4$:

$$\begin{aligned} g &= \int_{M+m}^{\infty} d\tau' \frac{d\tau'}{d\tau'}\frac{K_\tau^{n-3}}{\tau'^2} \\ &= \frac{\tau' K_\tau^{n-3}}{\tau'^2}\Bigg|_{\tau'=M+m}^{\tau'=\infty} - \int_{M+m}^{\infty} d\tau'\cdot\tau'\cdot\frac{d}{d\tau'}\left(\frac{K_\tau^{n-3}}{\tau'^2}\right) \end{aligned} \tag{7.139}$$

第一项在 $4>n>3$ 区域为0。为了求第二项,我们先求出

$$\begin{aligned} \frac{dK_\tau}{d\tau'} &= \frac{d}{d\tau'}\left(\frac{1}{2\tau'}\sqrt{(\tau'^2-(M-m)^2)(\tau'^2-(M+m)^2)}\right) \\ &= -\frac{K_\tau}{\tau'} + \frac{1}{2\tau'}\frac{\tau'(\tau'^2-(M+m)^2)+\tau'(\tau'^2-(M-m)^2)}{\sqrt{(\tau'^2-(M-m)^2)(\tau'^2-(M+m)^2)}} \\ &= \frac{K_\tau}{\tau'} + \frac{(M^2+m^2)\tau'^2-(M^2-m^2)^2}{\tau'^2\sqrt{(\tau'^2-(M-m)^2)(\tau'^2-(M+m)^2)}} \end{aligned} \tag{7.140}$$

代入(7.139):

$$\begin{aligned} g &= -\int_{M+m}^{\infty} d\tau'\left(-\frac{2K_\tau^{n-3}}{\tau'^2} + \frac{K_\tau^{n-4}}{\tau'}(n-3)\frac{dK_\tau}{d\tau'}\right) \\ &= -(n-5)g - (n-3)\int_{M+m}^{\infty} d\tau' \frac{K_\tau^{n-4}}{\tau'^3} \\ &\qquad\cdot\frac{1}{2\tau' K_\tau}((M^2+m^2)\tau'^2-(M^2-m^2)^2) \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad g = -\frac{n-3}{n-4}\int_{M+m}^{\infty} d\tau' \frac{K_\tau^{n-5}}{2\tau'^4}((M^2+m^2)\tau'^2-(M^2-m^2)^2) \tag{7.141}$$

讨论:

$n>3$,g 在 $\tau'=M+m$ 处不会有红外发散。

$n<6$,g 不会有紫外发散。

(7.141)的积分在 $6>n>3$ 的区域(我们需要的是 $n=4$ 邻近区域)收敛,是一个常数。所以,g 提供的正好是一个无害极点。这就证实了我们在这一节开头部分的设想,即 $f(k)$(或 $f(\mu)$)的发散部分来自 $d\tau$ 的积分,它在维数正常化的情况下表现为无害极点。

§7-6 逐级抵消与有害极点的不出现

从上节看到,我们的证明中假设了(7.111)中的 f',f^+,f^- 不发散(子图的发散都已被减除掉)。这就是说,这个证明是以逐级减除为前提的。现在让我们再看一看逐级减

除的必要性。

逐级减除的必要性

首先说清楚,在用维数正常化的方法进行重正化时,因为要保持规范不变性,微扰论的展开都是按圈数的多少来展开的。为求得醒目,我们引入参数 η,叫做圈数参数:对一圈图给以系数 η,对二圈图给以系数 $\eta^2,\cdots$,对 i 圈图给以系数 η^i,等等。

这里的 η 可以写成 $\hbar$,原因是在第一章的(1.59),(1.60),(1.98)等泛函积分式中,都含有

$$\frac{1}{\hbar}\mathscr{L} \quad 或 \quad \frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_{eff}$$

就是说,$\mathscr{L}$ 或 $\mathscr{L}_{eff}$ 是以和 $\frac{1}{\hbar}$ 相乘的形式出现的。第八章将看到,如果 $\mathscr{L}$ 或 $\mathscr{L}_{eff}$ 和 $\frac{1}{\hbar}$ 相乘,则自动地会使一圈图带有系数 $\hbar$,二圈图带有系数 $\hbar^2,\cdots,i$ 圈图带有系数 $\hbar^i,\cdots$。所以,$\hbar$ 事实上自动地起 η 的作用,不必另外再找 η。不过,为了表明这是一个圈数参数,我们有时不写 $\hbar$ 而写 η。

如果引入了抵消项,则在谈论"圈数"展开时要更小心一些。例如,对于量子电动力学,一圈图的抵消项 $\Delta\mathscr{L}$ 也要给以系数 η(否则就不能抵消带 η 系数的一圈图的极点项):

$$\Delta\mathscr{L} = \eta\frac{1}{4-n}\left\{\frac{e^2}{24\pi^2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{e^2}{8\pi^2}\bar{\psi}\left(\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}+4m\right)\psi - \frac{ie^3}{8\pi^2}\bar{\psi}\hat{A}\psi\right\} \tag{7.142}$$

在图 7.19 中我们用 × 记号来代表这三个抵消项所提供的顶点,叫做 η 顶点(一圈图抵消项顶点),并在每个含 η 顶点的图下面画出与它们相对应的一圈发散图。一圈图抵消项顶点(注意在图上它们是 ×,不是圈)都带有系数 η,和一圈图一样。

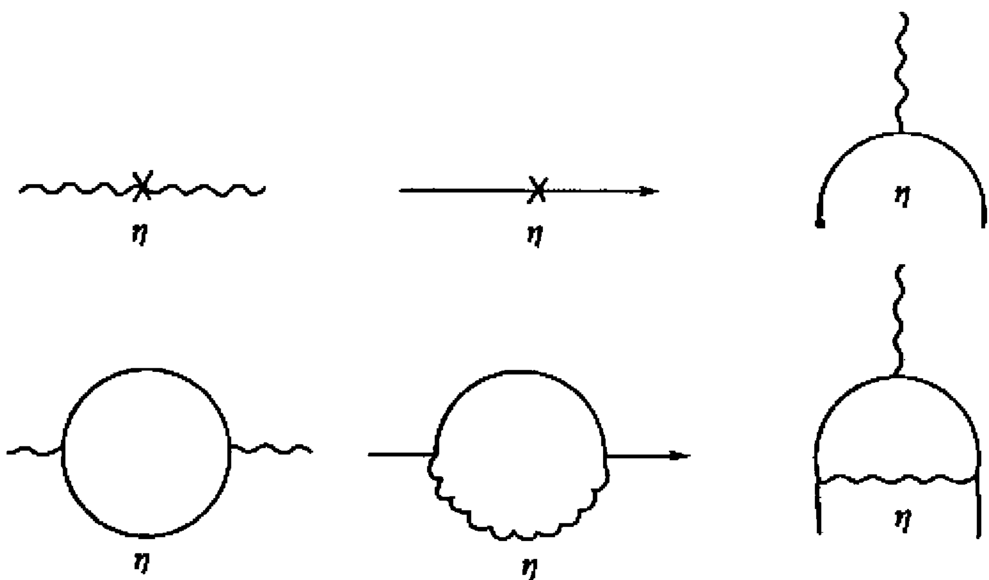


图 7.19

于是看到,引入了抵消项后,"圈数" i 就有了两重含意:一重含意就是图的圈数为 i;另一重含意是带有 η^i 系数的抵消项顶点,它是与 i 圈图的整体发散相抵消的。

引入圈数参数 η 后,圈数展开就是 η 的幂展开:一级项就是带有 η 系数的项,包括一圈图和一圈图的抵消项。二级项就是带有 η^2 系数的项,以光子的自能图为例,这种项包

括图 7.20 的各个图：

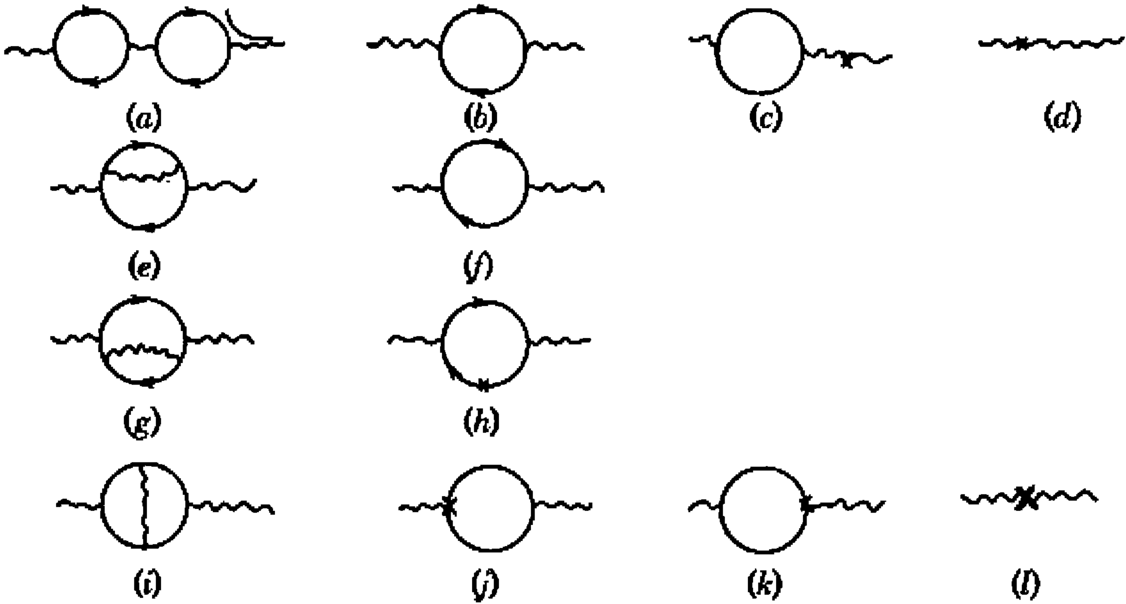


图 7.20

这里我们看到，7.20 图中的每一个图都有 η^2 系数，有的 η 来自单圈图，有的 η 来自一圈抵消项顶点。请注意 e,g,i 都是双圈图，它们在减除了单圈子图（例如 i 减去 j 和 k，e 减去 f，g 减去 h）的发散后仍有整体发散。这种发散需要用二圈图的抵消项来抵消。l 就代表这种二圈图的抵消项，它带有 η^2 系数，所提供的顶点叫做 η^2 顶点（二圈图抵消项顶点）。另外，按照以前说过的定义，e,f,g,h,i,j,k,l 都是 1PI 图；a,b,c,d 都不是 1PI 图。相仿，三级项就是带有 η^3 系数的项，也包括带有 η^3 系数的抵消项，……以后依此类推。

逐级减除的意思就是先引入带 η 系数的一圈图抵消项，把一圈图的发散都抵消掉；然后再引入带 η^2 系数的二圈图抵消项，把（一圈图抵消项所不能抵消的）二圈图的发散都抵消掉；然后又引入带 η^3 系数的三圈图抵消项，把（一圈图、二圈图抵消项所不能抵消的）三圈图的发散都抵消掉……依此类推。微扰论按图展开每提高一级，抵消项所带 η 的幂也增加一次。

逐级减除和简单地把极点项抛掉是很不一样的。请看图 7.21 的并列两圈的例子。单圈时：

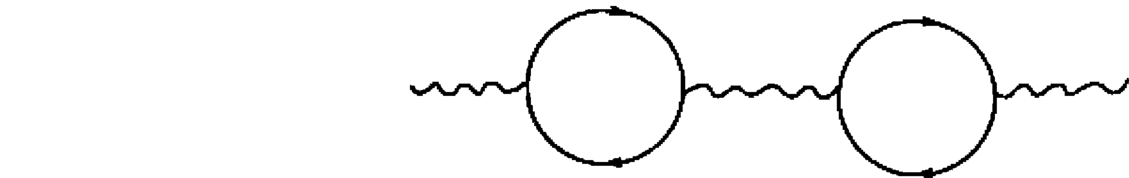
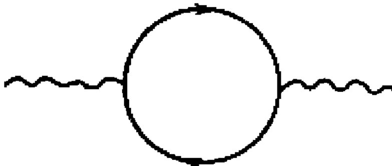


图 7.21



$$f(k^2) = \frac{1}{n-4}f_1(k^2) + f_2(k^2) + (n-4)f_3(k^2) + O(n-4)^2 \tag{7.143}$$

（此地省略了 $(\delta_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu)$ 因子）。去掉极点项，$n=4$ 时，得到的是 $f_2(k^2)$。

两圈时：

如果不是逐级减除，则有

$$(f(k^2))^2 = \left(\frac{1}{n-4}\right)^2 f_1^2 + 2\frac{1}{n-4}f_1 f_2 + f_2^2 + 2f_1 f_3 + O(n-4) \tag{7.144}$$

若简单地一次把所有的极点项都抛掉，则 $n=4$ 时得到的是 $f_2^2(k^2)+2f_1(k^2)f_3(k^2)$。于是，链式图的规律在这里破坏了。而且链越长，破坏越严重（例如三圈链会出 $f_1^2 f_4$ 项），这是不合理的。

合理的做法是逐级抵消，首先把一级的极点项消去，见图 7.22.A。

然后再做二级，如图 7.22.B。依此类推，这就符合链式图的规律，从而可把加法重正化与乘法重正化等价起来。

总之，逐级减除的必要性在于：

1. 当 $n\to4$，可以保证具有链式图的性质，链再长也不破坏。

$\sim f_2+O\ (n-4)$

图 7.22.A

$\sim f_2^2+O\ (n-4)$

图 7.22.B

2. 可以保证有规律地把各级子图的发散不多不少地全部减除（见第五章关于 Zimmerman 定理的讨论），使加法重正化得以与乘法重正化等价。

逐级减除还能够保证：

1. 每级减除的都是无害极点（下面就要证明这一点。这是可重正化的必要条件）。

2. 减除后，每级的重正化了的拉氏量都满足相应一级的重正化了的规范不变性，规范群在重正化前后是同构的（第八章将讨论这个问题）。

有害极点的不出现

在维数正常化的前提下，一个费曼积分如果是收敛的，就没有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项；如果是发散的，只要是逐级减除，就可以证明虽然有 $\frac{1}{n-4}$ 极点，但都是无害极点。现在证明如下（由于只要 $1PI$ 图没有有害极点，则任何费曼图都不会有有害极点，所以这里只须证明 $1PI$ 图没有害极点就足够了）：

任意取一个 $1PI$ 费曼图，它包含 $x_1,\cdots,x_l$ 等顶点。前已证明，取其中两个顶点 x_i、x_j，则总可以写出切割方程（见 §7-4）如下：

$$F(x_1,\cdots,x_l)=F'(x_1,\cdots,x_l)+\theta(x_{j0}-x_{i0})F^-(x_1,\cdots,x_l)+\theta(x_{i0}-x_{j0})F^+(x_1,\cdots,x_l) \tag{7.145}$$

$F(x_1,\cdots,x_l)$ 乘有外线的 $e^{ik_ix_i}$ 因子，这些因子反映了能量动量流入 $1PI$ 图或流出 $1PI$ 图（如

图7.8 ~ 7.11 所示)。积分$\int F(x_1\cdots,x_l)\mathrm{d}x_1^4\cdots\mathrm{d}x_l^4$ 就是我们要讨论的费曼积分。$F'(x_1,\cdots,x_l)$,$F^{\pm}(x_1,\cdots,x_l)$ 都是切割图之和,它们也都乘有外线的 $e^{ik_ix_i}$ 因子。按照 §7 - 4 切割图的画法:

$F'(x_1,\cdots,x_l)$的切割图中,x_i、x_j 都在无阴影区。

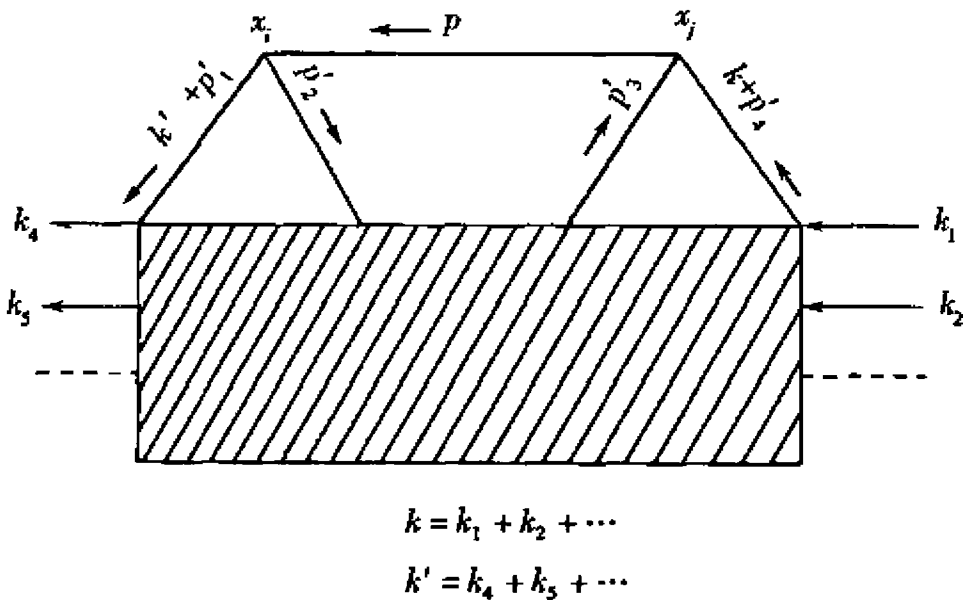
$F^+(x_1,\cdots,x_l)$的切割图中,x_j 在阴影区,x_i 在无阴影区。

$F^-(x_1,\cdots,x_l)$的切割图中,x_i 在阴影区,x_j 在无阴影区。

为了进一步的讨论,我们来考察

$$\int F(x_1,\cdots,x_l)\mathrm{d}x_1^4\cdots\mathrm{d}x_l^4$$

积分。只要适当地选择并写好内部能量动量,总可以做到流进1PI的k_i之和$k=\sum\limits_{流入}k_i$全部都流向x_j,流出1PI的k_i之和$k'=\sum\limits_{流出}k_i$全部都自x_i流出,如下图:



$$k=k_1+k_2+\cdots$$
$$k'=k_4+k_5+\cdots$$

图 7.23

又由于已经积分的每一个顶点都给出δ函数保证能量动量守恒(流出的能量动量等于流入的能量动量),所以划线区域(其中x都已积分)流出的应等于流入的,因此

$$p_3'+p_4'=p_1'+p_2'\rightarrow p_4'=p_1'+p_2'-p_3'$$

于是(把画线区域积分后必定出现的$\delta^4(p_1'+p_2'-p_3'-p_4')$也写出来。以下讨论立刻可推广到更多$p_i'$情况):

$$\begin{aligned}
&\int F(x_1,\cdots,x_l)\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_l\\
=&\int e^{i(p-p_1'-p_2'-k')x_i}e^{i(-p+p_3'+p_4'+k)x_j}\mathrm{d}^4x_i\mathrm{d}^4x_j\\
&\cdot\frac{1}{(2\pi)^8}F(p,p_1',p_2',p_3',p_4',k,k')\delta^4(p_1'+p_2'-p_3'-p_4')\\
&\cdot\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'\mathrm{d}^4p_4'\\
=&\int e^{i(p-p_1'-p_2'-k')(x_i-x_j)}\cdot e^{i(k-k')x_j}\mathrm{d}^4(x_i-x_j)\mathrm{d}^4x_j\\
&\cdot\frac{1}{(2\pi)^8}F(p,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k')\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'
\end{aligned}$$

$$= \delta^4(k-k')\int F(p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3' \quad (7.146)$$

这里的积分($F(\cdots,k,k')$是简写,代表$F(\cdots,k_1,k_2,k_3\cdots)$)

$$\int F(p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3' \quad (7.147)$$

就是我们要讨论的费曼积分。

相仿有自(7.62—7.64)和(7.95)可证明各顶点给出的δ函数和F中的相同

$$\int F'(x_1,\cdots,x_l)\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_l$$

$$= \int e^{i(p-p_1'-p_2'-k')(x_i-x_j)}\cdot e^{i(k-k')x_j}\mathrm{d}^4(x_i-x_j)\mathrm{d}^4x_j$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi)^8}F'(p,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k')\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'$$

$$= \delta^4(k-k')\int F'(p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3' \quad (7.148)$$

$$\int F^{*}(x_1,\cdots,x_l)\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_l$$

$$= \int e^{i(p-p_1'-p_2'-k')(x_i-x_j)}\cdot e^{i(k-k')x_j}\mathrm{d}^4(x_i-x_j)\mathrm{d}^4x_j$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi)^8}F^{*}(p,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k')\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'$$

$$= \delta^4(k-k')\int F^{*}(p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3' \quad (7.149)$$

(7.148)和(7.149)中的积分

$$\int F'(p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3' \quad (7.150)$$

和

$$\int F^{*}(p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3' \quad (7.151)$$

都是与(7.147)有关的切割图积分。

回到(7.145),做$\mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_{i-1}\mathrm{d}^4x_{i+1}\cdots\mathrm{d}^4x_{j-1}\mathrm{d}^4x_{j+1}\cdots\mathrm{d}^4x_l$积分,但是,$\mathrm{d}^4x_i\mathrm{d}^4x_j$不积分,并在两端分别以(7.146),(7.148),(7.149)的积分式代入,就得到(其中我们约去了共同因子$e^{i(k-k')x_j}$):

$$\int e^{i(p-p_1'-p_2'-k')(x_i-x_j)}F(p,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k')\mathrm{d}^4p^4\mathrm{d}p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'$$

$$= \int e^{i(p-p_1'-p_2'-k')(x_i-x_j)}F'(p,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k')\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{i\tau(x_{i0}-x_{j0})}}{\tau-i\varepsilon}\mathrm{d}\tau$$

$$\cdot\int e^{i(p-p_1'-p_2'-k')(x_i-x_j)}F^{+}(p,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2',p_3',k,k')\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{-i\tau(x_{i0}-x_{j0})}}{\tau-i\varepsilon}\mathrm{d}\tau$$

$$\cdot\int e^{i(p-p_1'-p_2'-k')(x_i-x_j)}F^{-}(p,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k')\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3' \quad (7.152)$$

在(7.152)中，k,k' 都是不积分的参数，所以可以取 $k=k'$（$F(\cdots,k,k)$ 代表 $\sum\limits_{流入} k_i=\sum\limits_{流出} k_i$ 情况下的 $F(\cdots,k_1,k_2,k_3,\cdots)$），并定义 $F(x_i-x_j)$ 如下：

$$F(x_i-x_j,k)=\int e^{i(p-p_1'-p_2'-k)(x_i-x_j)}F(p,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'=\int e^{iq(x_i-x_j)}F(q+p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'$$

$$（换变数，q=p-p_1'-p_2'-k）\tag{7.153}$$

相仿可再定义

$$F'(x_i-x_j,k)=\int e^{iq(x_i-x_j)}F'(q+p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'p_3'\tag{7.154}$$

$$F^{\pm}(x_i-x_j,k)=\int e^{iq(x_i-x_j)}F^{\pm}(q+p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}p_3'\tag{7.155}$$

于是 $k=k'$ 时，(7.152)就可写成：

$$F(x_i-x_j,k)=F'(x_i-x_j,k)+\theta(x_{i0}-x_{j0})F^{+}(x_i-x_j,k)+\theta(x_{j0}-x_{i0})F^{-}(x_i-x_j,k)\tag{7.156}$$

现在我们再求出 $F(q,k)$，$F'(q,k)$，$F^{\pm}(q,k)$：

$$F(q,k)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-iq(x_i-x_j)}F(x_i-x_j,k)\mathrm{d}^4(x_i-x_j)=\int F(q+p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'\tag{7.157}$$

$$F'(q,k)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-iq(x_i-x_j)}F'(x_i-x_j,k)\mathrm{d}^4(x_i-x_j)=\int F'(q+p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'\tag{7.158}$$

$$F^{\pm}(q,k)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-iq(x_i-x_j)}F^{\pm}(x_i-x_j,k)\mathrm{d}^4(x_i-x_j)=\int F^{\pm}(q+p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3'\tag{7.159}$$

现在来对比(7.147)，(7.150)，(7.151)和(7.157)，(7.158)(7.159)。在§7－5中已经证明，经过了逐级减除后，切割图积分(7.150)，(7.151)都是不发散的。我们又看到(7.158)，(7.159)的发散或收敛性质与(7.150)，(7.151)完全一样（因为 q 是常数，$p_i'\to\infty$ 时，(7.150)，(7.151)与(7.158)，(7.159)的行为相同。$F'(q,k)$ 与 $F'(q,k)_{q=0}$ 有相同的发散或收敛性质，$F^{\pm}(q,k)$ 与 $F^{\pm}(q,k)_{q=0}$ 也有相同的发散或收敛性质）。所以 $F'(q,k)$ 和 $F^{\pm}(q,k)$ 也是不发散的。换句话说，把(7.158)，(7.159)换成 n 维积分，都不会出现 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。

但是，(7.147)是发散的（经过逐级减除后，子图的发散都已去掉，但还有整体发散）。

(7.157)的积分函数在 $p_i' \to \infty$ 时，其行为和(7.147)完全相同，所以 $F(q,k)$ 也是发散的。换句话说，把(7.157)换成 n 维积分，将会出现 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。

采用(7.157)，(7.158)，(7.159)，可以把(7.153)，(7.154)，(7.155)写成：

$$F(x_i - x_j, k) = \int e^{iq(x_i - x_j)} F(q,k) \mathrm{d}^4 q \tag{7.160}$$

$$F'(x_i - x_j, k) = \int e^{iq(x_i - x_j)} F'(q,k) \mathrm{d}^4 q \tag{7.161}$$

$$F^{\pm}(x_i - x_j, k) = \int e^{iq(x_i - x_j)} F^{\pm}(q,k) \mathrm{d}^4 q \tag{7.162}$$

所以知道，(7.156)的左方的 $F(x_i - x_j, k)$ 含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项；(7.156)的右方的 $F'(x_i - x_j, k)$ 和 $F^{\pm}(x_i - x_j, k)$ 则不含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。

现在我们看(7.156)式。

如果 $x_i - x_j$ 是类时间隔，$x_{i0} - x_{j0}$ 在 Lorentz 变换下不改号，也不能等于0，所以在任何惯性系，(7.156)都写成

$$F(x_i - x_j, k) = F'(x_i - x_j, k) + F^{+}(x_i - x_j, k) \qquad x_{i0} - x_{j0} > 0$$

或

$$F(x_i - x_j, k) = F'(x_i - x_j, k) + F^{-}(x_i - x_j, k) \qquad x_{i0} - x_{j0} < 0$$

右方都没有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。所以，$x_i - x_j$ 是类时间隔时，$F(x_i - x_j, k)$ 不含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。

如果 $x_i - x_j$ 是类空间隔，则在 Lorentz 变换下，可能是 $x_{i0} - x_{j0} \gtrless 0$，也可能是 $x_{i0} - x_{j0} = 0$。若是 $x_{i0} \gtrless x_{j0}$，就有

$$F(x_i - x_j, k) = F'(x_i - x_j, k) + F^{\pm}(x_i - x_j, k)$$

和上面讨论的类时间隔的情况一样，$F(x_i - x_j, k)$ 不会含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。若是 $x_{i0} = x_{j0}$，则由于 $F(x_i - x_j, k)$ 具有相对论协变性（我们采用了协变规范），所以可以由协变张量（或矢量、标量）$F(x_i - x_j, k)_{x_{i0} \gtrless x_{j0}}$ 经过 Lorentz 变换而得到 $F(x_i - x_j, k)_{x_{i0} = x_{j0}}$。既然 $F(x_i - x_j, k)_{x_{i0} \gtrless x_{j0}}$ 如上述不含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项，Lorent$_2$ 变换后得到的 $F(x_i - x_j, k)_{x_{i0} = x_{j0}}$ 就也不会含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。所以，$x_i - x_j$ 是类空间隔时，$F(x_i - x_j, k)$ 也不含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。

如果 $x_i - x_j$ 是类光间隔，也有两种可能性，一种是 $x_{i0} - x_{j0} \gtrless 0$，$(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \neq 0$；一种是 $x_{i0} - x_{j0} = 0$，$(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = 0$。前一种情况也和类时间隔的情况一样，$F(x_i - x_j, k)$ 不会含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点项。于是，唯一剩下的可能性就是

$$F(x_i - x_j, k) \text{ 中的} \frac{1}{n-4} \text{ 极点项} \begin{cases} = 0 & x_i \neq x_j \text{ 时} \\ \neq 0 & x_i = x_j \text{ 时} \end{cases} \tag{7.163}$$

所以，根据(5.46)，(5.47)的广义函数的定理，在 $F(x_i - x_j, k)$ 中，$\frac{1}{n-4}$ 极点项

$\left(对于 m 圈图,最高幂次的极点是\frac{1}{(n-4)^m}\right)$必定取

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\frac{1}{(n-4)^{\alpha}}P_{\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_{\mu}},k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots\right)\delta^4(x_i-x_j) \tag{7.164}$$

的形式($\mu=1,2,3,4$)。这里$P_{\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_{\mu}},k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots\right)$是$\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_{\mu}}$($\mu=1,2,3,4$)的多项式。其中正如在(7.152)下面一段所说的,把k所代表的$k_{1\mu},k_{2\mu}\cdots$都写出来。

于是,(7.153)中的极点项可写出如下:

$F(x_i-x_j,k)$中的极点项

$$=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\frac{1}{(n-4)^{\alpha}}P_{\alpha}\left(-i\frac{\partial}{\partial(x_i-x_j)_{\mu}},k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots\right)\int\frac{e^{iq(x_i-x_j)}}{(2\pi)^4}\mathrm{d}^4q$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\frac{1}{(n-4)^{\alpha}}\int\frac{e^{iq(x_i-x_j)}}{(2\pi)^4}P_{\alpha}(q_{\mu},k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots)\mathrm{d}^4q$$

而且从(7.164)可知,$P_{\alpha}(q_{\mu},k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots)$是$q_{\mu}$($\mu=1,2,3,4$)的多项式。

那么,$P_{\alpha}(q_{\mu},k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots)$是否也是$k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots$的多项式呢?为了弄清这一点,我们看(7.153)的右方的$\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^{4'}p_3'$积分:

$$\int F(q+p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)\mathrm{d}^4p_1'\mathrm{d}^4p_2'\mathrm{d}^4p_3' \tag{7.165}$$

由于采用了费曼参数法合并了分母(见(7.46)),又由于协变规范的传播子的形式,所以在

$$F(q+p_1'+p_2'+k,p_1',p_2',p_3',p_1'+p_2'-p_3',k,k)$$

的分母中,q_{μ}和$k_{i\mu},p_{i\mu}',m_i$是齐次的。(μ都包括1,2,3,4)分子是$m_i,k_{i\mu},p_{i\mu}',q_{\mu}$的多项式。

像§7-3那样对p_i'逐一作d^np_i'的n维积分,把$p_1',p_2',p_3',\cdots$都积掉($\cdots$表示有可能p_i'不止这几个),则在得到的结果中,分母里的q_{μ}和每一个$k_{i_{\mu}}$、m_i必定仍是齐次的。分子仍是$q_{\mu},k_{i\mu},m_i$的多项式。前面已经证明,(7.165)中的极点项部分

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\frac{1}{(n-4)^{\alpha}}P_{\alpha}(q_{\mu},k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots) \tag{7.166}$$

是q_{μ}($\mu=1,2,3,4$)的多项式,分母中不含q_{μ},所以也不含$k_{i\mu}$。于是,这个极点部分必定是$q_{\mu},k_{i\mu},m_i$的多项式。

再对比(7.146)和(7.165),立刻知道(7.147)费曼积分的极点项部分是

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m}\frac{1}{(n-4)^{\alpha}}P_{\alpha}(0,k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots) \tag{7.167}$$

它是$k_{1\mu},k_{2\mu},\cdots$($\mu=1,2,3,4$)和m_i的多项式。

这样,我们就证明了在协变规范的情况下,任意多圈(m圈)图的有害极点的消失。

讨论两点

1. F',F^{*}都是不发散的,F的发散来自$\theta(x_{i0}-x_{j0})$和$\theta(x_{j0}-x_{i0})$。这和§7-5所讨论的发散来自$d\tau$积分相一致,因为$\theta(x_{i0}-x_{j0})$和$\theta(x_{j0}-x_{i0})$给出了$d\tau$积分。

2. 上述有害极点消失的证明只适用于协变规范，因为我们采用的手段，包括维数正常化积分公式，Källen - Lehmann 表示，切割传播子与切割方程，以及$(x_i - x_j)$为类空间隔情况下 $F(x_i - x_j, k)$ 不含$\frac{1}{n-4}$极点项的证明，都有相对论协变的前提。这里我们将不讨论非协变规范下有害极点的消去。

参考文献

1 G. t'Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. , B44(1972)189.

2 G. t'Hooft, M. Veltman, Diagrammar, CERN yellow preprint 1973.

第八章　重正化后的规范不变性

这一章将证明一个量子规范理论在重正化之后仍有规范不变性，而且重正化前后的定域规范群相互同构。这是非常重要的，否则量子规范理论就不成为可重正化的理论了。

§8-1　S°，ΔS，S^R 和一些定义

我们把裸的作用量 S 记作 $S\,[\varphi^\circ,\ u^\circ,\ \bar{u}^\circ,\ K^\circ,\ L^\circ]$；把重正化的作用量 S 记作 $S\,[\varphi,\ u,\ \bar{u},\ K,\ L]$。此地带"$\circ$"的 φ°，u°，$\bar{u}^\circ$，K°，L° 以及 g°，m° 都是裸的物理量；而 φ，u，$\bar{u}$，K，L 以及 g，m 则是重正化了的物理量。按照第五章的办法，又可定义 S°，ΔS 和 S^R：

$$\begin{aligned} S^\circ &= S\,[\varphi^\circ,\ u^\circ,\ \bar{u}^\circ,\ K^\circ,\ L^\circ] \\ &= S\,[\varphi,\ u,\ \bar{u},\ K,\ L] + \Delta S\,[\varphi,\ u,\ \bar{u},\ K,\ L] \\ &= S^R\,[\varphi,\ u,\ \bar{u},\ K,\ L] \end{aligned} \tag{8.1}$$

ΔS 是抵消项，它保证消去发散项（在最小重正化时，ΔS 中只包括与发散项相对应的 $\frac{1}{n-4}$ 极点项）。在 S^R 和 ΔS 中要出现重正化系数 (Z_i)。如果只要求准确到 L 图为止，则 ΔS 写成 $\Delta_L S$，(Z_i) 写成 $(Z_i)_L$，S^R 写成 S^R_L。于是（8.1）式写成 L 圈近似：

$$\begin{aligned} S^\circ &= S\,[\varphi^\circ,\ u^\circ,\ \bar{u}^\circ,\ K^\circ,\ L^\circ] \\ &= S\,[\varphi,\ u,\ \bar{u},\ K,\ L] + \Delta_L S\,[\varphi,\ u,\ \bar{u},\ K,\ L] \\ &= S^R_L\,[\varphi,\ u,\ \bar{u},\ K,\ L] \end{aligned} \tag{8.2}$$

其中 $\Delta_L S$ 和 S^R_L 中都含有重正化到 L 圈的重正化系数 $(Z_i)_L$；$S\,[\varphi^\circ,\ u^\circ,\ \bar{u}^\circ,\ K^\circ,\ L^\circ]$ 就是把 $S\,[\varphi,\ u,\ \bar{u},\ K,\ L]$ 中的 $\varphi\cdots$ 换成 $\varphi^\circ\cdots$：

$$\varphi^\circ \simeq \varphi^0_{(L)} = (Z_{\varphi L})^{1/2}\varphi \quad \text{etc。} \tag{8.2$'$}$$

第五章中还看到，S 中的二次项为

$$\Gamma_{ij}\varphi_i\varphi_j + m^2\varphi_i\varphi_i + \cdots$$

$\Delta_L S$ 中的二次项为（省略 L 记号）

$$(Z_\varphi - 1)\ (\Gamma_{ij}\varphi_i\varphi_j + m^2\varphi_i\varphi_i)\ + Z_\varphi\delta m^2\varphi_i\varphi_i + \cdots$$

（费米场的情况，m^2，δm^2 应换成 M，δM）。相加：

$$\begin{aligned} &Z_\varphi\ (\Gamma_{ij}\varphi_i\varphi_j + m^2\varphi_i\varphi_i)\ + Z_\varphi\delta m^2\varphi_i\varphi_i + \cdots \\ &= Z_\varphi\ (\Gamma_{ij}\varphi_i\varphi_j + m_0^2\varphi_i\varphi_i)\ + \cdots \end{aligned}$$

$(m_0^2 = m^2 + \delta m^2)$。由于（8.2）$'$，此式右方立刻写成

$$\Gamma_{ij}\varphi_i^0\varphi_j^0 + m_0^2\varphi_i^0\varphi_i^0 + \cdots$$

与 S 中的二次项形式完全一样，只是 φ 和 m 换成 φ° 和 m_0。三次项、四次项也有类似情况。

在这里，S^0可看作真正的作用量。取 L 圈近似时，它可以分成 S 和 $\Delta_L S$ 两部分。用 S 计算出来的矩阵元中会出现发散项$\left(\text{即}\frac{1}{n-4}\text{极点项}\right)$，$\Delta_L S$ 的贡献则是把这一级一级的发散项（到 L 级为止）消去，得到不发散的结果。要能够做到这一点，首先要 S 是可重正化的，这包括两个内容：

1. 取可重正化规范，当 $k\to\infty$ 时，玻色子的传播子$\to\frac{1}{k^2}$，而费米子的传播子$\to\frac{1}{k}$（这些是第五章计算幂次的出发点）。

2. 所有的顶点都满足 $\delta_i\leqslant 0$（见（5.8）），因此，所有的图形 Γ 的表现发散度 $D(\Gamma)$ 都满足下式（见（5.7））：

$$D(\Gamma)+E_B+\frac{3}{2}E_F-4=\sum_i n_i\delta_i\leqslant 0$$

或

$$D(\Gamma)\leqslant 4-E_B-\frac{3}{2}E_F。$$

若 Γ 是重正化图形，即发散图形，$D(\Gamma)\geqslant 0$，而且通常 $\delta_i=0$，则重正化图形中的 E_B 和 E_F 必定满足

$$4-E_B-\frac{3}{2}E_F\geqslant 0 \tag{8.3}$$

于是，与发散图形相抵消的抵消项 $\Delta_L S$ 中只含有两条、三条、四条外线相交的顶点，不含有超过四条外线相交的项点。而且四条外线相交时只能是四条玻色子线。

后面我们要证明在量子规范理论的情况，S 和 S^0 都是具有定域规范不变性的（在 L 圈近似下，L 是有限正整数）；而且两者的规范群是同构的。在证明之前，先做一些准备工作。

为了方便，我们可以定义（8.2）的 L 圈近似下的 S^0 为 S_L^0，则有

$$L=0:\ S^0_{L=0}=S;\quad L=\infty:\ S^0_{L=\infty}=S^B。$$

这里 S 就是重正化了的没有发散的作用量，S^B 则是完全裸的（发散的）作用量。从（4.64）和（4.65）已知

$$\widetilde{S}^0_{L=0}*\widetilde{S}^0_{L=0}=0$$

$$-F_i^a\frac{\delta\widetilde{S}^0_{L=0}}{\delta k_i}-\frac{\delta\widetilde{S}^0_{L=0}}{\delta\overline{u}_a}=0$$

为了按圈数展开时把圈数标志出来，我们把 S 换成$\frac{1}{\eta}S\left(\text{记得在第一章我们有}\frac{1}{\hbar}S\right)$，则有

$$\begin{aligned}
W[j,\xi,\overline{\xi},k,L]&=e^{iZ[j,\xi,\overline{\xi},K,L]}\\
&=\int d(\varphi)d(u)d(\overline{u})\cdot e^{i\left(\frac{1}{\eta}S+\varphi_a j_a+\overline{\xi}_a u_a+\overline{u}_a\xi_a\right)}\\
&\sim\exp\left\{i\cdot\frac{1}{\eta}\cdot S_i\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_a},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\overline{\xi}_a},-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi_a},K,L\right]\right\}\\
&\cdot\exp\left\{-\int d^4x d^4y\left[\frac{\eta}{2}j_a(x)\Delta_{\alpha\beta}(x-y)j_\beta(y)\right.\right.
\end{aligned}$$

$$+ \eta\bar{\xi}_a(x)\Delta_{ab}(x-y)\xi_b(y) + \cdots\Big]\Big\} \tag{8.4}$$

这里 + …代表 Higgs 场的传播子项、费米场的传播子项，等等。S_i 代表 S 中的相互作用部分，其中有各个顶点项，包括 K 顶点，L 顶点。

(8.4) 告诉我们，S 换成 $\frac{1}{\eta}S$ 后，每一个顶点获得一个因子 $\frac{1}{\eta}$；而每一条内部线（传播子）获得一个因子 η。如果像第一章那样（例如见 §1－4，(1.91) 式）取 $\frac{1}{\hbar}S$，则每一个顶点获得一个因子 $\frac{1}{\hbar}$；每一条内部线获得一个因子 $\hbar$。

一个拓扑关系

取 S 矩阵的任意一个费曼图，当 $\eta\fallingdotseq 1$ 时，看一看它获得什么因子。首先，外线不贡献 η 因子。其次，若有 I 条内线，V 个顶点，L 个圈，则可证明有如下关系。

$$I - V = L - 1 \tag{8.5}$$

证明：

先看树图。对于一个顶点的树图，$I=0$，$V=1$，$L=0$：$I-V=L-1$。

∴ (8.5) 成立（见图 8.1 (a)）。

两个顶点的树图，在 V 加 1 的同时，I 也加 1，$I=1$，$V=2$，$L=0$：$I-V=L-1$。

∴ (8.5) 成立（见图 8.1 (b)）。

如果出现一个圈，则在 V 不变的同时，I 加 1，L 加 1，∴ (8.5) 仍成立（见图 8.1 (c)）。总之，每增加一个圈，而顶点个数不变，则是 L 加 1，I 加 1；每增加一个顶点，而圈数不变，则是 V 加 1，I 加 1。所以，如果 $L=1$ 时 (8.5) 成立，则 $L=1+1$ 时，(8.5) 也成立。

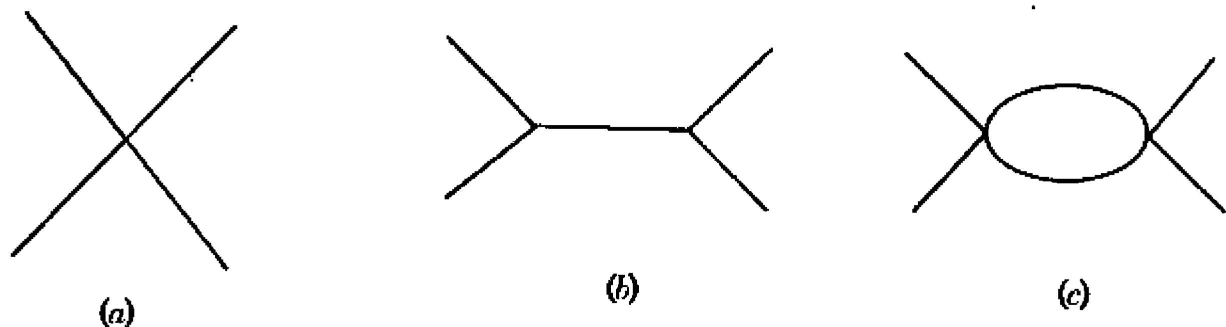


图 8.1

证毕

每多一个圈的意思是在两顶点之间多连一条内线，从而多增加一组独立的 d^4p 积分。

这个拓扑关系使得任意一个 S 矩阵元都有如下因子：

$$\eta^{I-V} = \eta^{L-1} \tag{8.6}$$

从而看到，把 S 矩阵元按圈数展开，在取 $\frac{1}{\eta}$S 代替 S 时，就等价于 η 的幂次展开。若 η

取做1，就回到普通的S矩阵元①。

按η幂次展开（即按圈数展开）的好处是$\frac{1}{\eta}$乘上了整个的S，从而可以在η的每一级都保持S的以及$\mathscr{L}$的各种对称性，包括规范不变性，等等。反之，如果是按耦合常数的幂次展开，则耦合常数（例如g）幂次相同的项集合在一起，并不能保证具有规范不变性。因此不能期望规范不变性在按耦合常数幂次展开的每一级微扰中显示出来。特别在非Abel规范场本身的拉氏量中，就有带有耦合常数的项和不带有耦合常数的项，它们分别都不是规范不变的，合在一起才规范不变。

有η的顶角生成泛函

由于抵消项都是与$1PI$发散项对应的，$1PI$发散项都是去肢的正规顶角（包括两个顶角的$1PI$图，例如自能图），所以，为了表达各个η幂次的抵消项，我们要借助于$1PI$顶角生成泛函Γ。

现在，Z中取$\frac{1}{\eta}S$，则相应地（4.51）的顶角生成泛函Γ可定义为：

$$\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},k,L] = Z[j,\xi,\bar{\xi},k,L] - j_\alpha\varphi_\alpha - \bar{u}_\alpha\xi_\alpha - \bar{\xi}_\alpha u_\alpha \tag{8.7}$$

在这样的定义下，各个正规顶角的零次项（在$L=0$时没有抵消项）都不含有$\eta$$\left(\text{因为}\frac{1}{\eta}S\text{提供的各个顶角的零次贡献都乘上了}\frac{1}{\eta}\text{因子}\right)$，而$L$圈的顶角图正好有$\eta^L$因子。

和（2.144），（4.52）相仿，如下定义的$\varphi_i(x)$是一个经典场（是j、ξ、$\bar{\xi}$，K，L的泛函）：

$$\varphi_i(x) = \frac{\delta Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j_i(x)} \text{ etc.} \tag{8.8}$$

当j，ξ，$\bar{\xi}$，K，L都$\to 0$时，$\varphi_i(x)$趋于$\hat{\varphi}_i(x)$的真空期待值（这里K，L也可看做外源）。

§8-2　蝌蚪图和有K、L时Γ中的场的线性项

$\hat{\varphi}(x)$的真空期待值

也采用η幂次微扰展开，先取K，L为零（然后j，ξ，$\bar{\xi}\to 0$）。

零级近似：除Higgs场外，所有的$\hat{\varphi}(x)$（包括$F-P$场）的真空期待值为零。设Higgs场$\hat{\chi}(x)$的真空期待值$\langle 0|\hat{\chi}(x)|0\rangle = v \neq 0$（零级近似，$v$是常数），则可重新定义$\hat{\hat{\chi}}(x) = \hat{\chi}(x) - v$，而在零级近似下：

① 若不取$\hbar=1$，则s换成$\frac{1}{\hbar}s$，圈数展开就等价于$\hbar$的幂次展开。

$$\langle 0|\hat{\hat{\chi}}(x)|0\rangle=0$$

一级近似：一个圈，只可能有蝌蚪图的贡献（图8.2a）。

多级近似：多个圈，有多圈蝌蚪图以及蝌蚪树（见图8.2b，图中"×"代表抵消项）的贡献。

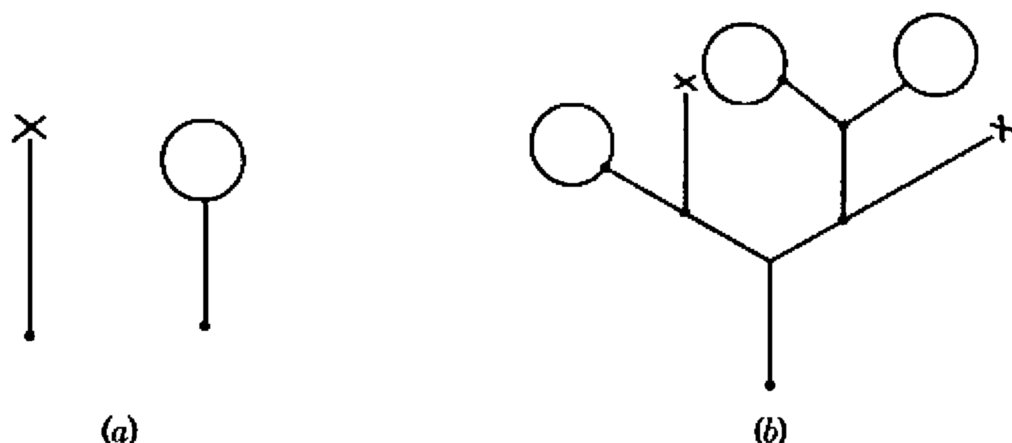


图 8.2

这些蝌蚪图（包括蝌蚪树，下同）在j，ξ，$\bar{\xi}\to 0$时贡献的都是常数（见第一章）。可重新定义（i圈近似）：

$$\hat{\hat{\chi}}(x)=\hat{\chi}(x)-(v)_i$$

$$(v)_i=v_{(0)}+\eta v_{(1)}+\cdots+\eta^i v_{(i)}\quad (v_{(0)}=v)$$

在重正化的过程中，逐级令$\eta^\alpha v_{(\alpha)}$与蝌蚪图贡献抵消，则在任意一个i级，都有

$$\langle 0|\hat{\hat{\chi}}(x)|0\rangle=0$$

现在就具体看一看各种场的蝌蚪图，但暂不考虑含K，L的项。

1. 费米子（包括$F-P$场u，$\bar{u}$）线不能被一般顶点所挡住，所以费米子的$\langle 0|\psi(x)|0\rangle$（$\psi(x)$也包括$F-P$场$u$，$\bar{u}$在内）没有蝌蚪图贡献，即各级真空期待值都是零。

2. 规范场A的蝌蚪图：若圈是A内部线，则圈的传播子有δ^{ab}，而Γ是

$$\Gamma^{abc}\sim\varepsilon^{abc}\quad\therefore\quad\delta^{ab}\Gamma^{abc}=0$$

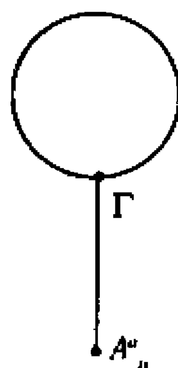


图 8.3

若图是$F-P$内部线，则圈的传播子也有δ^{ab}，而Γ是

$$\gamma^{abc}\sim\varepsilon^{abc}\qquad\therefore\delta^{ab}\gamma^{abc}=0$$

若圈是费米线，则有

$$\int\frac{S_p\gamma_\mu(\hat{k}+im)}{(k^2+m^2)}\mathrm{d}^4k=\int\frac{4k_\mu}{k^2+m^2}\mathrm{d}^4k=0$$

若圈是Higgs线，则也有

$$\int\frac{k_\mu}{k^2+\mu^2}\mathrm{d}^4k=0$$

对于A^a_μ的高次蝌蚪图（例如见图8.4），可以从协变性质推知，其总的积分结果应归结为$k_\mu f(k^2)\,d^4k$的积分，不再出现别的动量，其中$f(k^2)$是标量函数。原因在于把其他的圈的内部动量积分以后，只剩下最后一个圈的内部动量k。但这个积分为零。所以，A^a_μ的高次蝌蚪图的贡献也是零。

3. Higgs场的蝌蚪图：8.5图的圈可以是$W^\pm$，z^0，μ，e，Higgs场以及$F-P$场的圈。

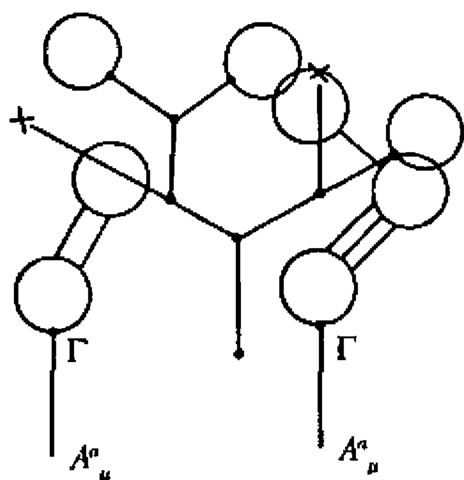


图 8.4

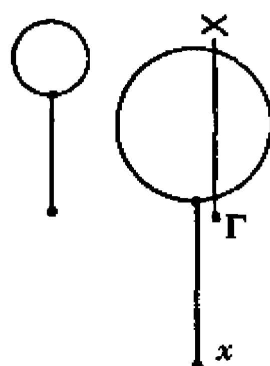


图 8.5

若 $\bar{\chi}$ 是破缺的 Higgs 场，则 $v_{(0)}\neq 0$，蝌蚪图贡献将会 $\neq 0$。

若 $\bar{\chi}$ 换成 $\varphi_\alpha\neq\chi$，φ_α 是零级近似下不破缺的 Higgs 场，相应的 $v_{(0)}=0$，则其蝌蚪图的贡献是否为零，依赖于所取规范。例如，在后面将要讨论的一般线性规范的情况下，$v_{(1)}$，$v_{(2)}$，……就不一定为零。但这些与规范有关的不等于零的蝌蚪图贡献，在重正化中可以抵消，所以是无害的。同时，我们还注意到，在常用的 R_ξ 规范的情况下，φ_α（$\neq\chi$）的蝌蚪图贡献是零。原因是 S 中没有图上的 Γ 这样的顶点（没有 φ 三次项和 $u_a\varphi_a u_a$ 项①）。第二章、第九章的例子，包括 $W-S$ 模型所取 R_ξ 规范（或叫做推广的't Hooft 规范），都属于这种情况。

总之，在 j，ξ，$\bar{\xi}$，K，$L\to 0$ 时，只有 Higgs 场才有不为零的蝌蚪图贡献。这种贡献将会使得 $\Gamma[\varphi, u, \bar{u}, K, L]$ 含有 Higgs 场的一次项。为了说明这一点，我们假定 $\bar{\chi}$ 是蝌蚪图有贡献的 Higgs 场。取

$$\Gamma[\varphi_\alpha, \bar{\chi}, u, \bar{u}, K, L]=Z[j_\alpha, j_{\bar{\chi}}, \xi, \bar{\xi}, K, L]-j_\alpha\varphi_\alpha-j_{\bar{\chi}}\bar{\chi}-\bar{\xi}_\alpha u_\alpha-\bar{u}_\alpha\xi_\alpha \tag{8.9}$$

这里特地把 $\bar{\chi}$ 和 $j_{\bar{\chi}}$ 同 φ_α 和 j_α 分开来写。类似于（4.52），（4.54）又有

$$\begin{aligned}&\frac{\delta Z}{\delta j_\alpha}=\varphi_\alpha,\quad \frac{\delta Z}{\delta j_{\bar{\chi}}}=\bar{\chi},\quad \frac{\delta Z}{\delta\bar{\xi}_\alpha}=u_\alpha,\quad \frac{\delta Z}{\delta\xi_\alpha}=-\bar{u}_\alpha\\&\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_\alpha}=-j_\alpha,\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\chi}}=-j_{\bar{\chi}},\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta u_\alpha}=\bar{\xi}_\alpha,\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_\alpha}=-\xi_\alpha\end{aligned} \tag{8.10}$$

当 j，ξ，$\bar{\xi}\to 0$，则 φ_α，u_α，$\bar{u}_\alpha\to 0$，但 $\bar{\chi}\to A\neq 0$。这里要说明两点：

1. S 中有 $K_i\Delta_i^a u_a$，是 u_a 一次项。若 $K\neq 0$，则 j、ξ，$\bar{\xi}\to 0$ 时，$\bar{u}_\alpha\to\Delta_a K_i\Delta_i^a\neq 0$。关于这个 u_a 一次项，后面还要讨论。

2. A 包括用微扰法做出的 $\bar{\chi}$ 的所有蝌蚪图贡献。如果 S 中有蝌蚪图抵消项，则 A 也包括蝌蚪图抵消项的贡献，从而把 A 中发散部分消去，但不发散部分不一定为零。先设 $A\neq 0$。

现在再把 Γ 写成如下形式（现在 K，$L\neq 0$）：

$\Gamma[\varphi_\alpha, x, u, \bar{u}, K, L]$

---

① 参看（2.94）的 c^i 和（9.62）的 L_{F-P}。

$$= \frac{i}{2}\varphi_\alpha \Delta_\varphi'^{-1}\varphi_\alpha + \frac{i}{2}\bar{\chi}\Delta_{\bar{\chi}}'^{-1}\bar{\chi} + i\bar{u}_\alpha \Delta_u'^{-1}u_\alpha + \cdots + \Gamma_I\,[\varphi_\alpha, x, u, \bar{u}, K, L] \tag{8.11}$$

再说明两点：

1. $\Delta_\varphi'^{-1}$，$\Delta_{\bar{\chi}}'^{-1}$，$\Delta_u'^{-1}$中的“′”表示传播子中包括全部自能图。至于为什么Γ中包含了$\frac{i}{2}\varphi_\alpha \Delta_\varphi'^{-1}\varphi_\alpha$，$\frac{i}{2}\bar{\chi}\Delta_{\bar{\chi}}'^{-1}\bar{\chi}$，$i\bar{u}_\alpha \Delta_u'^{-1}u_\alpha$，…这种二次项，第二章（2.160）已有推导，后面将给出更详细的说明（见（8.46））。

2. $\Gamma_I\,[\varphi_\alpha, \chi, u, \bar{u}, K, L]$ 代表Γ中的所有相互作用顶角项以及含K，L的项。

由于（8.10）和（8.11），立刻得到

$$i\Delta_{\bar{\chi}}'^{-1}\bar{\chi} + \frac{\delta}{\delta\bar{\chi}}\Gamma_I\,[\varphi_\alpha, x, u, \bar{u}, K, L] = -j_{\bar{\chi}}$$

从而又得到：

$$\bar{\chi} = i\Delta_{\bar{\chi}}'\left(j_{\bar{\chi}} + \frac{\delta}{\delta\bar{\chi}}\Gamma_I[\varphi_\alpha, \bar{\chi}, u, \bar{u}, K, L]\right) \tag{8.12}$$

相仿还得到：

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha &= i\Delta_\varphi'\left(j_\alpha + \frac{\delta}{\delta\varphi_\alpha}\Gamma_I[\varphi_\alpha, \bar{\chi}, u, \bar{u}, K, L]\right) \\
u_\alpha &= i\Delta_u'\left(\xi_\alpha + \frac{\delta}{\delta\bar{u}_\alpha}\Gamma_I(\varphi_\alpha, \bar{\chi}, u, \bar{u}, K, L]\right) \\
\bar{u}_\alpha &= i\left(\bar{\xi}_\alpha - \frac{\delta}{\delta u_\alpha}\Gamma_I[\varphi_\alpha, \bar{\chi}, u, \bar{u}, K, L]\right)\Delta_u'
\end{aligned} \tag{8.13}$$

把（8.12），（8.13）中的φ_α，$\bar{\chi}$，u_α，$\bar{u}_\alpha$反复叠代，就可以得到φ_α，$\bar{\chi}$，u_α，$\bar{u}_\alpha$作为j_α，$j_{\bar{\chi}}$，ξ，$\bar{\xi}$，K，L的泛函的显示表式（是j_α，$j_{\bar{\chi}}$，ξ，$\bar{\xi}$，K，L的无穷级数）。

迭代后有两种情况：一种是φ_α，u_α，$\bar{u}_\alpha$的情况，反复叠代后，成为各式各样蝌蚪图之和，每一枝都挂上一个j_α或$j_{\bar{\chi}}$，…$\bar{\xi}$，K，而L则连接两条u线，K也可以同时连接一条u线和一条φ线。不存在不挂j，ξ，$\bar{\xi}$，K，L的蝌蚪图。所以，当j，ξ，$\bar{\xi}$，$K\to 0$时就有φ_α，u_α，$\bar{u}_\alpha\to 0$。显然，Γ_I中没有带有常系数的φ_α，u_α，$\bar{u}_\alpha$的一次项，也没有与K，L无关的函数与φ_α，u_α，$\bar{u}_\alpha$做成的一次项。否则（8.13）右方泛函微分后会出现与j，ξ，$\bar{\xi}$，K，L无关的项，当j，ξ，$\bar{\xi}$，$K\to 0$时，右方不为零。（L_α与两个u相接，两个u不能自己连成圆圈，必定要连出去，并挂上ξ_α，所以$\xi_\alpha\to 0$就足够使蝌蚪图$\to 0$，不必要求$L_\alpha\to 0$）。

另一种是$\bar{\chi}$的情况，在j，ξ，$\bar{\xi}$，$K\to 0$时，$\bar{\chi}\to A\neq 0$。所以$\Gamma_I\,[\varphi_\alpha, \chi, u, \bar{u}, K, L]$中必定有$\bar{\chi}$的一次项，即$A\bar{\chi}$。而且如上所说，$A$是用微扰论做出的$\bar{\chi}$的所有蝌蚪图的贡献。由于包括$S$中抵消项的贡献，$A$是有限的，但一般不为零。

Γ中（以及在S中）出现$\bar{\chi}$一次项，以及$\bar{\chi}$的蝌蚪图贡献不为0，都是由于Higgs场$\hat{\chi}$的真空期待值$\langle 0|\hat{\chi}|0\rangle = v\neq 0$，从而我们定义了$\hat{\chi} = \hat{\bar{\chi}} + v$。在（8.1）的重正化的$S(\varphi, u, \bar{u}, K, L)$中，$\chi$换成$\bar{\chi}+v$，于是$S$中含有$-v(\mu^2+\lambda v^2)\bar{\chi}$一次项。

在（8.1）的带有抵消项的 S_L^R（φ, u, $\bar{u}$, K, L）中，χ 换成 $\bar{\chi}$ + $(v)_L$，

$$(v)_L = v_{(0)} + \eta v_{(1)} + \cdots + \eta^L v(L) \tag{8.14}$$

这里 $v_{(0)}$ 就是原先的 v，而 $v_{(1)}\cdots v_{(L)}$ 是一圈到 L 圈的蝌蚪图抵消项，从而在 $\Gamma_{(L)}$ （s_L^0）中，出现的 $\bar{\chi}$ 一次项的系数在到 L 圈为止是有限的。（见第八章后面具体例子的说明）它的具体形式应是（见第九章（9.5）式和（9.17）式）：

$$-v(\mu^2 + \lambda v^2 + G_L')\bar{\chi} \tag{8.15}$$

相应地还有（$J=0$ 包括 j, ξ, $\bar{\xi}\to 0$。参看（9.16）$_1$ 和（9.17），在（9.16）$_1$ 两端取 $\gamma=0$）

$$\left.\frac{\delta Z[j_\alpha, j_x, \xi, \bar{\xi}, K, L]}{\delta j_{\bar{\chi}}}\right|_{J=0} = \langle 0 | \hat{\bar{\chi}} | 0\rangle^{J=0}$$

$$= -i\frac{1}{m_{\bar{\chi}}^2} v(\mu^2 + \lambda v^2 + G_L') \tag{8.16}$$

（8.15）和（8.16）中有相同的系数 v（$\mu^2+\lambda v^2+G_L'$），这是（8.12）的结果，$m_{\bar{\chi}}^2$ 来自 $\Delta_{\bar{\chi}}'$（$k=0$）。G_L' 是微扰计算 $\langle 0 | \hat{\bar{\chi}} | 0\rangle^{J=0}$ 所做出的结果，有蝌蚪图抵消项贡献，到 L 图为止是有限的。

现在，这个 $\langle 0 | \hat{\bar{\chi}} | 0\rangle^{J=0}$ 应等于0，而 $v\neq 0$，所以要求

$$\mu^2 + \lambda v^2 + G_L' = 0 \tag{8.17}$$

Γ 的 $\bar{\chi}$ 一次项就消去，保证了 Γ 中的 Higgs 位能在 $\bar{\chi}=0$，$\varphi_\alpha=0$ 时为极小。

又由于在 Γ 中 $-v$（$\mu^2+\lambda v^2+G_L'$）$\bar{\chi}$ 一次项与质量项 $-\frac{1}{2}$（$\mu^2+\lambda v^2+G_L'$）（$\varphi_\alpha^2+\bar{\chi}^2$）同时出现，所以在消去 $\bar{\chi}$ 一次项的同时，φ_α^2 质量项也消去，成为 Goldstone 粒子场（见第九章）。

其次还要说明一下，S 中的 K, L 项对蝌蚪图有什么贡献。

1. S 中的 $L_a f_{abc} u_b u_c$。由于只有 $\bar{u}_a\xi_a$ 可以阻挡自 u_a 引出的线，所以与 L_a 相伴出现的或者是两个 ξ，或者是一个 ξ（见图 8.6）：

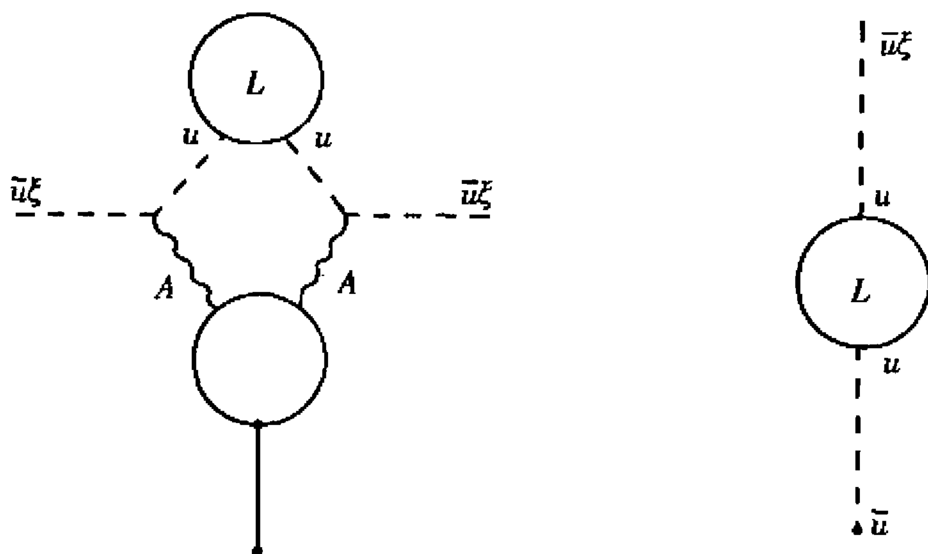


图 8.6

当 j, ξ, $\bar{\xi}\to 0$，贡献为零。显然 L 的出现不会改变上面的结论，即只有 Higgs 场才有在 j, ξ, $\bar{\xi}$, $K\to 0$ 时不为零的蝌蚪图贡献。

2. S 中的 KSu（取 S 代表 Higgs 场）。它对 Higgs 场 S 的蝌蚪图的贡献也是乘上了 ξ 的，因为要靠 $\bar{u}\xi$ 来阻挡自 u 引出的线。当 j，ξ，$\bar{\xi}\to 0$，贡献为零。

它对 $\bar{u}$ 的蝌蚪图的贡献在 $K\neq 0$ 时可能不为零，因为 Higgs 场 S 可能有不为零的蝌蚪图（当 j，ξ，$\bar{\xi}\to 0$ 时），见图 8.7。这种图连上 $\bar{u}Su$ 顶角后，对 $\Gamma_{(L)}$ 以及 S_L^R 贡献 KSu 项，其后果是使 K 也获得重正比。

3. S 中的 KAu（取 A 代表规范场）。它对 $\bar{u}$ 的蝌蚪图也可能有贡献，见图 8.8。这个图也对 K 的重正化有贡献。

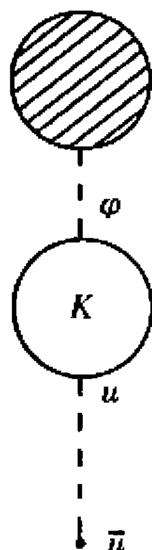


图 8.7

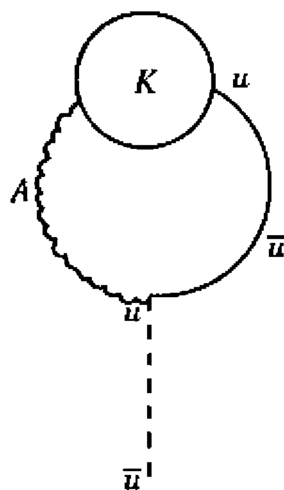


图 8.8

KAu 对 A 的蝌蚪图贡献是乘上 ξ 的，因为多出一条 u 线要靠 $\bar{u}\xi$ 来阻挡。当 $\xi\to 0$，贡献为零，不影响 A 的真空期待值为零。

4. S 中的 $K_i^A\,\Delta_i^{Aa}u_a$ 项。相当于有一个源 K_i^A，源不为 0，则真空期待值 $\langle 0\mid\bar{u}\mid 0\rangle^{J=0}$ 不为零。与此项有关的微扰展开的贡献，也是使 K 获得重正比。

总起来，如果 j，ξ，$\bar{\xi}\to 0$ 时只有 Higgs 场有蝌蚪图贡献，则 $L\neq 0$ 时不改变这种情况。而 K 则不然，它 $\neq 0$ 时，会出现 $\langle 0\mid\bar{u}\mid 0\rangle^{J=0}\neq 0$。但我们注意到，在算具体物理过程时，不但取 j，ξ，$\bar{\xi}\to 0$，而且取 K，$L\to 0$。另外，u，$\bar{u}$ 是非物理的，我们不去算它们的矩阵元。

§8－3　树图近似下 $\Gamma=S$

第四章曾说过，S 是 Γ 的最低次近似（树图近似）。这是后面关于重正化的证明的出发点。现在就来证明，我们取（4.40）的 S：

$$S\,[\varphi,\,u,\,\bar{u},\,K,\,L]$$

$$=L\,[\varphi,\,u,\,\bar{u}]\;+K_i\;(\Delta_i^a+gt_{ij}^a\varphi_j)\;u_a+\frac{g}{2}L_af_{abc}u_bu_c \tag{8.18}$$

注意其中有 u_a 的一次项 $K_i\Delta_i^a u_a$。自（4.44），把积分（即对重复出现的 x 求和）写出来：

$$e^{iZ[j,\xi,\bar{\xi},k,L]}=\int d\;(\varphi)\;d\;(u)\;d\;(\bar{u})$$

$$\exp\left\{iS[\varphi,u,\bar{u},K,L]+i\int d^4x(j_\alpha(x)\varphi_\alpha(x)+\bar{\xi}_a(x)u_a(x)+\bar{u}_a(x)\xi_a(x))\right\}\tag{8.19}$$

为了考察树图近似下的 Γ，我们把（8.19）中的 φ，u，$\bar{u}$ 在 Φ，U，$\bar{U}$ 的邻近展开，则有（此地略去了指标）：

$$S[\varphi,u,\bar{u},K,L]+\int d^4x(j(x)\varphi(x)+\bar{\xi}(x)u(x)+\bar{u}(x)\xi(x))$$

$$=S[\Phi,U,\bar{U},K,L]+\int d^4x(j(x)\Phi(x)+\bar{\xi}(x)U(x)+\bar{U}(x)\xi(x)$$

$$+\int d^4x\left(\frac{\delta S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta\Phi(x)}+j(x)\right)(\varphi(x)-\Phi(x))$$

$$+\int d^4x\left(-\frac{\delta S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta U(x)}+\bar{\xi}(x)\right)(u(x)-U(x))^{①}$$

$$+\int d^4x(\bar{u}(x)-\bar{U}(x))\left(\frac{\delta S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta\bar{U}(x)}+\xi(x)\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\int d^4xd^4y\frac{\delta^2S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta\Phi(x)\delta\Phi(y)}(\varphi(x)-\Phi(x))(\varphi(y)-\Phi(y))$$

$$+\text{其他二次微商项}+\text{三次以上微商项} \tag{8.20}$$

取如下的近似，要求 Φ，U，$\bar{U}$ 满足：

$$\frac{\delta S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta\Phi_a(x)}=-j_a(x)$$

$$\frac{\delta S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta U_a(x)}=\bar{\xi}_a(x) \tag{8.21}$$

$$\frac{\delta S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta\bar{U}_a(x)}=-\xi_a(x)$$

解出来 Φ，U，$\bar{U}$ 就是 j，ξ，$\bar{\xi}$ 的泛函。而且此时（8.20）简化成为：

$$S[\varphi,u,\bar{u},K,L]+\int d^4x(j(x)\varphi(x)+\bar{\xi}(x)u(x)+\bar{u}(x)\xi(x))$$

$$=S[\Phi,U,\bar{U},K,L]+\int d^4x(j(x)\Phi(x)+\bar{\xi}(x)U(x)+\bar{U}(x)\xi(x))$$

$$+\text{二次和二次以上微商项} \tag{8.22}$$

在这个近似中，先略去二次和二次以上微商项，于是自（8.19）有（d（φ）d（u）d（$\bar{u}$）积分得常数）：

$$e^{iZ(j,\xi,\bar{\xi},K,L)}=e^{iS[\Phi,U,\bar{U},K,L]+i\int d^4x(j\Phi+\bar{\xi}U+\bar{U}\xi)}$$

（这里略去不起作用的积分常数）从而

$$Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]=S[\Phi,U,\bar{U},K,L]+j_a\Phi_a+\bar{\xi}_aU_a+\bar{U}_a\xi_a \tag{8.23}$$

（对重复出现的 x 求和，不再写出积分符号）。于是，在这种近似下，由于（8.21），有

---

① 注意到反对易关系和 S 中 $\bar{\xi}$，$\bar{u}$ 在左，ξ，u 在右。$\frac{\delta}{\delta u}$ 是从左边作用。

$$\frac{\delta Z}{\delta j_\alpha}=\frac{\delta\Phi_\beta}{\delta j_\alpha}\frac{\delta S}{\delta\Phi_\beta}+\frac{\delta\Phi_\beta}{\delta j_\alpha}j_\beta+\Phi_\alpha=\Phi_\alpha$$

$$\frac{\delta Z}{\delta\bar{\xi}_a}=\frac{\delta S}{\delta U_b}\frac{\delta U_b}{\delta\bar{\xi}_a}-\bar{\xi}_b\frac{\delta U_b}{\delta\bar{\xi}_a}+U_a=U_a \tag{8.24}$$

$$\frac{\delta Z}{\delta\xi_a}=\frac{\delta\bar{U}_b}{\delta\xi_a}\frac{\delta S}{\delta\bar{U}_b}+\frac{\delta\bar{U}_b}{\delta\xi_a}\xi_b-\bar{U}_a=-\bar{U}_a$$①

现在，作为一个例子，不妨取 $S\,[\Phi,\ U,\ \bar{U},\ K,\ L]$ 为如下形式：

$$S\,[\Phi,\ U,\ \bar{U},\ K,\ L]=\frac{i}{2}\Phi_\alpha\Delta^{\varphi^{-1}}_{\alpha\beta}\Phi_\beta+i\,\bar{U}_a\Delta^{u^{-1}}_{ab}U_b+K_i\Delta^a_iU_a+\cdots$$
$$+S_I[\Phi,U,\bar{U},K,L] \tag{8.25}$$

(8.25) 中的$\Delta^\varphi\Delta^u$，等都是未经过微扰修正的费曼传播子，因这里 S 是 $S=S^R_{L=0}$，没有发散抵消项。$+\cdots$代表其他的二次项，例如费米场的二次项。Φ 包括规范场，Higgs 场等。S_I 代表各种耦合项，也包括 $K_\alpha gt^a_{\alpha\beta}\Phi_\beta U_a+\frac{g}{2}L_af_{abc}U_bU_c$ 项，参看 (4.40)。

把 (8.25) 代入 (8.21)，得到（考虑到$\Delta^\varphi_{\alpha\beta}$的对称性）：

$$i\Delta^{\varphi^{-1}}_{\alpha\beta}\Phi_\beta+\frac{\delta S_I}{\delta\Phi_\alpha}=-j_\alpha$$

$$-i\bar{U}_b\Delta^{u^{-1}}_{ba}-K_i\Delta^a_i+\frac{\delta S_I}{\delta U_a}=\bar{\xi}_a \tag{8.26}$$

$$i\Delta^{u^{-1}}_{ab}U_b+\frac{\delta S_I}{\delta\bar{U}_a}=-\xi_a$$

由此得到：

$$\Phi_\alpha=i\Delta^\varphi_{\alpha\beta}j_\beta+i\Delta^\varphi_{\alpha\beta}\frac{\delta S_I\,[\Phi,\ U,\ \bar{U},\ K,\ L]}{\delta\Phi_\beta}$$

$$\bar{U}_a=i\,(\bar{\xi}_b+K_i\Delta^b_i)\,\Delta^u_{ba}-i\,\frac{\delta S_I\,[\Phi,\ U,\ \bar{U},\ K,\ L]}{\delta U_b}\Delta^u_{ba}$$

$$U_a=i\Delta^u_{ab}\xi_b+i\Delta^u_{ab}\frac{\delta S_I[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta\bar{U}_b} \tag{8.27}$$

把 (8.27) 中的 Φ_α，$\bar{U}_a$，U_a 反复往右面迭代，就得到 Φ_α，$\bar{U}_a$，U_a 的作为 j，ξ，$\bar{\xi}$，K，L 的泛函的解。这个解显然是树图解，它没有圈，除了根部有一个传播子Δ^φ 或Δ^u 外，每一个树枝的端点挂有一个 j_α 或 ξ_a 或 $(\bar{\xi}_a+K_i\Delta^a_i)$，还有 φ，u 两枝共挂的 K，和 uu 两枝共挂的 L。而节点与节点之间则是一个传播子Δ^φ 或Δ^u。

同时，把 (8.27) 反复迭代到 (8.23) 的右方，把 S 也写出来（例如写成 (8.25)），也进行反复迭代，就得到 $Z\,[j,\ \xi,\ \bar{\xi},\ K,\ L]$ 的作为 j，ξ，$\bar{\xi}$，K，L 的泛函

① 注意到反对易关系和 s 中 $\bar{\xi}$，$\bar{u}$ 在左，ξ，u 在右。$\frac{\delta}{\delta\xi_a}$是从左边作用。

的近似解。这个近似解显然也是树图解（它没有圈），全部挂满了 j，ξ，$(\bar{\xi}+K\Delta)$，还有两枝共挂的 K 和 L，没有一个空着的端点（这里不讨论 θ 真空）。

而且，根据第二章（2.127）式，真空到真空的矩阵元可定义为

$$\left.\frac{\delta^n Z[j,\ \xi,\ \bar{\xi},\ K,\ L]}{\delta j_\alpha(x_1)\ \cdots\ (-\delta\xi_a(x_i))\ \cdots\delta\bar{\xi}_b(x_n)}\right|_{J=K=L=0}$$

$$=i^{(n-1)}\langle 0\mid T(\hat{\varphi}_\alpha)(x_1)\cdots\hat{\bar{u}}_a(x_i)\cdots\hat{u}_b(x_n)\mid 0\rangle_{\text{连接}} \tag{8.28}$$

（J 包括 j，ξ，$\bar{\xi}$）。由于这里取的 $Z[j,\ \xi,\ \bar{\xi},\ K,\ L]$ 是树图近似，所以（8.28）给出的连接图矩阵元必定也是树图近似。于是我们很快可以得到一个结论，就是（8.20）和（8.22）中略去二次和二次以上微商项，就得到树图近似。不过，在肯定这个结论之前还必须证明二次和二次以上微商项不给出树图，只给出圈图。

这关系到后面的证明，所以我们这里花一点篇幅来证明一下。首先，考虑到（8.20），可把（8.19）写成：

$$e^{iZ[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}$$

$$=e^{iS[\Phi,U,\bar{U},K,L]+i\int d^4x(j_\alpha(x)\Phi_\alpha(x)+\bar{\xi}_a(x)U_a(x)+\bar{U}_a(y)\xi_a(x))}\cdot\int d(\varphi)d(u)d(\bar{u})$$

$$\cdot\exp\Big[\frac{i}{2}\int d^4xd^4y(\varphi_\alpha(x)-\Phi_\alpha(x))\frac{\delta^2S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta\Phi_\alpha(x)\delta\Phi_\beta(y)}(\varphi_\beta(y)-\Phi_\beta(y))$$

$$+i\int d^4xd^4y(\bar{u}_a(x)-\bar{U}_a(x))\frac{\delta^2S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta U_b(y)\delta\bar{U}_a(x)}(u_b(y)-U_b(y))$$

$$+iS'[\varphi-\Phi,u-U,\bar{u}-\bar{U},K,L]\Big]^{①} \tag{8.29}$$

其中 $\Phi,U,\bar{U}$，是由（8.21）定下来的 $j,\xi,\bar{\xi},K,L$ 的泛函。S' 包括展开中所有不能写成 Gauss 型的二次项（如 $L_i f_{abc}(u_b-U_b)(u_c-U_c)$）以及三次，四次项（$S$ 中最高为四次项），各项的系数中有的含有 $\Phi,U,\bar{U}$。（8.29）又可写成如下形式：

$$e^{iZ[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}$$

$$=e^{iS[\Phi,U,\bar{U},K,L]+i\int d^4x(j_\alpha(x)\Phi_\alpha(x)+\bar{\xi}_a(x)U_a(x)+\bar{U}_a(x)\xi_a(x))}$$

$$\cdot\lim_{j',\xi',\bar{\xi}'\to0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left(S'\Big[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j'},\frac{-1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi'},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}'},K,L\Big]\right)^n$$

$$\cdot\int d(\varphi)d(u)d(\bar{u})$$

$$\cdot\exp\Big[\frac{i}{2}\int d^4xd^4y(\varphi_\alpha(x)-\Phi_\alpha(x))\frac{\delta^2S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta\Phi_\alpha(x)\delta\Phi_\beta(y)}(\varphi_\beta(y)-\Phi_\beta(y))$$

$$+i\int d^4xd^4y(\bar{u}_a(x)-\bar{U}_a(x))\frac{\delta^2S[\Phi,U,\bar{U},K,L]}{\delta U_b(y)\delta\bar{U}_a(x)}(u_b(y)-U_b(y))$$

---

① $(\bar{u}_A(x)-\bar{U}a(x))\dfrac{\delta^2S}{\delta U_b(y)\delta\bar{U}_a(x)}(ub(y)-U_b(y))$ 是如下得来的：$(\bar{u}_a(x)-\bar{U}_a(x))\dfrac{\delta}{\delta\bar{U}_a(x)}\times(u_b(y)-U_b(y))\dfrac{\delta}{\delta U_b(y)}S=(\bar{u}_a(x)-\bar{U}_a(x))(u_b(y)-U_b(y))\dfrac{\delta^2S}{\delta U_b(y)\delta U_a(x)}$

$$+ i\int d^4x[j_\alpha'(x)(\varphi_\alpha(x) - \Phi_\alpha(x)) + \bar{\xi}_a'(x)(u_a(x) - U_a(x))$$

$$+ (\bar{u}_a(x) - \bar{U}_a(x))\xi_a'(y)]] \tag{8.29$_1$}$$

在(8.29)$_1$ 中,我们把 $e^{iS'}$ 作了展开,并把$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j'}, \frac{-1}{i}\frac{\delta}{\delta \xi'}, \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta \xi'}$放到 $\varphi - \Phi, \bar{u} - \bar{U}, u - U$ 的位置上,以便进行积分。

由于(8.25),我们有(也考虑 $\Delta_{\alpha\beta}^{\varphi}$ 的对称性):

$$\frac{\delta^2 S[\Phi, U, \bar{U}, K, L]}{\delta\Phi_\alpha(x)\delta\Phi_\beta(y)} = i\Delta_{\alpha\beta}^{\varphi-1}(x-y) + \delta^4(x-y)G_{\alpha\beta}(y)$$

$$\frac{\delta^2 S[\Phi, U, \bar{U}, K, L]}{\delta U_b(y)\delta \bar{U}_a(x)} = i\Delta_{ab}^{u-1}(x-y) + \delta^4(x-y)F_{ab}(y) \tag{8.30}$$

这里 $G(y)$,$F(y)$ 中出现的是 $\Phi, U, \bar{U}$(作为 $j, \xi, \bar{\xi}, K, L$ 的泛函)以及 L, K。第二项的 $\delta^4(x-y)$ 的产生是定域相互作用的结果,例如:

$$\sigma[A] = \frac{1}{2}\int d^4x' A(x')A(x')g(x')$$

$$= \frac{1}{2}\int d^4x' A(x')\delta(x'-y')d^4y' A(y')\delta^4(y'-z')d^4z' g(z')$$

则

$$\frac{\delta\sigma[A]}{\delta A(x)} = A(x)g(x)$$

$$\frac{\delta^2\sigma[A]}{\delta A(x)\delta A(y)} = \delta(x-y)g(x)$$

这是 $\sigma[A]$ 只含有 A 二次的情况,$g(x)$ 中不含有 $A(x)$。若 $\sigma[A]$ 含有 A 三次、四次,则微商后仍是 $\delta^4(x-y)g'(x)$ 形式,只是现在 $g'(x)$ 中含有 $A(x)$(例如 A 三次顶点,A 四项顶点)。

以下为了简化,把 $P_{\alpha\beta}, Q_{ab}$ 符号引入(8.30):

$$P_{\alpha\beta} = i\Delta_{\alpha\beta}^{\varphi-1}(x-y) + \delta^4(x-y)G_{\alpha\beta}(y) = \frac{\delta^2 S[\Phi, U, \bar{U}, K, L]}{\delta\Phi_\alpha(x)\delta\Phi_\beta(y)}$$

$$Q_{ab} = i\Delta_{ab}^{u-1}(x-y) + \delta^4(x-y)F_{ab}(y) = \frac{\delta^2 S[\Phi, U, \bar{U}, K, L]}{\delta U_b(y)\delta \bar{U}_a(x)} \tag{8.30$_1$}$$

这里 $P_{\alpha\beta}$ 中的 α, β 包括了 x, y;Q_{ab} 中的 a, b 也包括了 x, y。在四维欧氏空间中积分,把积分换成小体积 ε^4 求和,则为了求逆方便可定义:

$$\frac{P_{\alpha\beta}^{-1}}{\varepsilon^8} = -i\Delta_{\alpha\beta}^{\varphi}(x-y) - \int(-i)\Delta_{\alpha\sigma}^{\varphi}(x-z)G_{\sigma\tau}(z)d^4z(-i)\Delta_{\tau\beta}^{\varphi}(z-y)$$

$$+ \int(-i)\Delta_{\alpha\sigma}^{\varphi}(x-z)G_{\sigma\tau}(z)d^4z(-i)\Delta_{\tau\rho}^{\varphi}(z-w)G_{\rho\xi}(w)d^4w\Delta_{\xi\beta}^{\varphi}(w-y) - \cdots$$

$$\frac{Q_{ab}^{-1}}{\varepsilon^8} = -i\Delta_{ab}^{u}(x-y) - \int(-i)\Delta_{ae}^{u}(x-z)F_{ef}(z)d^4z(-i)\Delta_{fb}^{u}(z-y)$$

$$+ \int(-i)\Delta_{ae}^{u}(x-z)F_{ef}(z)d^4z(-i)\Delta_{fg}^{u}(z-w)F_{gh}(w)d^4w\Delta_{hb}^{u}(w-y) - \cdots \tag{8.31}$$

而且由于要利用

$$\int \Delta^{\varphi}_{\alpha\beta}(x-y)\mathrm{d}^4y\Delta^{\varphi-1}_{\beta\gamma}(y-z) = \delta_{\alpha\gamma}\delta^4(x-z)$$

$$\int \Delta^{u}_{ab}(x-y)\mathrm{d}^4y\Delta^{u-1}_{bc}(y-z) = \delta_{ac}\delta^4(x-z) \tag{8.32}$$

又把 $P_{\alpha\beta}, Q_{ab}$ 中的 x, y 写出来：

$$P_{\alpha\beta} = \tilde{P}_{\alpha\beta}(x-y), \qquad Q_{ab} = \tilde{Q}_{ab}(x-y) \tag{8.33}$$

则有（当 $\varepsilon \to 0$）：

$$\sum_{\beta}\varepsilon^4 P_{\alpha\beta}\frac{P^{-1}_{\beta\gamma}}{\varepsilon^8} = \int \mathrm{d}^4y\tilde{P}_{\alpha\beta}(x-y)\tilde{P}^{-1}_{\beta\gamma}(y-z) = \frac{\delta_{\alpha\gamma}}{\varepsilon^4} = \delta_{\alpha\gamma}\delta^4(x-z)$$

$$\sum_{b}\varepsilon^4 Q_{ab}\frac{Q^{-1}_{bc}}{\varepsilon^8} = \int \mathrm{d}^4y\tilde{Q}_{ab}(x-y)\tilde{Q}^{-1}_{bc}(y-z) = \frac{\delta_{bc}}{\varepsilon^4} = \delta_{ac}\delta^4(x-z) \tag{8.34}$$

于是，(8.29) 的 Gauss 型积分可以按第一、二章所说明的方法积出来，考虑到 φ 是实的，而 $u, \bar{u}$ 是反对易的，所以有（略去无关重要的常数）：

$$e^{iZ[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}$$

$$= \exp\left[iS[\Phi,U,\bar{U},K,L] + \int i\mathrm{d}^4x(j(x)\Phi(x) + \bar{\xi}(x)U(x) + \bar{U}(x)\xi(x))\right]$$

$$\cdot \lim_{j',\xi',\bar{\xi}'\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\left(S'\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j'},\frac{-1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi'},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}'},K,L\right]\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}P_{\alpha\beta}}}\cdot\mathrm{Det}Q_{ab}$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y j'_{\alpha}(x)\frac{P^{-1}_{\alpha\beta}}{\varepsilon^8}j'_{\beta}(y) - i\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\xi}_a(x)\frac{Q^{-1}_{ab}}{\varepsilon^8}\xi'_b(y)\right) \tag{8.35}$$

其中$\frac{P^{-1}_{\alpha\beta}}{\varepsilon^8}$和$\frac{Q^{-1}_{ab}}{\varepsilon^8}$见(8.31)，而自(8.30)，有

$$\mathrm{Det}P_{\alpha\beta} = \mathrm{Det}[i\Delta^{\varphi-1}_{\alpha\beta}(x-y) + \delta^4(x-y)G_{\alpha\beta}(y)]$$

$$= \mathrm{Det}\left[\int \mathrm{d}^4z\sum_{\xi}i\Delta^{\varphi-1}_{\alpha\xi}(x-z)(\delta(z-y)\delta_{\xi\beta} - i\Delta^{\varphi}_{\xi\zeta}(z-y)G_{\zeta\beta}(y))\right]$$

$$= \mathrm{Det}\sum_{\xi}i\Delta^{\varphi-1}_{\alpha\xi}(x-z)\varepsilon^4\left(\frac{\delta_{\zeta\beta}}{\varepsilon^4} - i\Delta^{\varphi}_{\xi\zeta}(z-y)G_{\zeta\beta}(y)\right)$$

（把四维欧氏空间划分成小格子，四维体积是 ε^4。积分换写成对小格子求和。$x, z, y\cdots$ 分别代表 $\alpha, \xi, \zeta\cdots$ 小格子的中心点）。于是有（[①]分出与场无关的常数 $\mathrm{Det}(i\Delta^{\varphi-1}_{\alpha\beta}(x-z))$）：

$$\mathrm{Det}P_{\alpha\beta} = \mathrm{Det}(\delta_{\alpha\beta} - i\Delta^{\varphi}_{\alpha\zeta}(x-y)G_{\zeta\beta}(y)\varepsilon^4) \times \text{常数}$$

$$= \text{常数} \times \exp(T_r\ln(I - i\Delta^{\varphi}_{\alpha\zeta}(x-y)G_{\zeta\beta}(y)\varepsilon^4)$$

$$= \text{常数} \times \exp\left(-\int i\Delta^{\varphi}_{\alpha\zeta}(x-x)G_{\zeta\beta}(x)d^4x\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int i\Delta^{\varphi}_{\alpha\zeta}(x-y)G_{\zeta\eta}(y)\mathrm{d}^4y i\Delta^{\varphi}_{\eta\rho}(y-x)G_{\rho\alpha}(x)\mathrm{d}^4x - \frac{1}{3}\int\cdots\right)$$

$$= \text{常数} \times \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\Delta^{\varphi}_{\alpha\beta}(x_1-x_2)G_{\beta\gamma}(x_2)\right.$$

---

① 利用 $\mathrm{Det}(1-L) = \exp Tr\ln(1-L) = \exp\left[-Tr\left(L + \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{3} + \frac{L^4}{4} + \cdots\right)\right]$。

$$\cdots\Delta^{\varphi}_{\chi\omega}(x_n - x_1)G_{\omega\alpha}(x_1)\big)\text{（都是单圈）} \tag{8.36}$$

相仿还有

$$\mathrm{Det}Q_{ab} = \text{常数} \times \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\Delta^{u}_{ab}(x_1 - x_2)F_{bc}(x_2)$$
$$\cdots\Delta^{u}_{yz}(x_n - x_1)F_{za}(x_1)\Big)\text{（也都是单圈）} \tag{8.37}$$

这里$(i)^n$ 中的 i 正好充当微扰顶点 $i\mathscr{L}I$ 提供的 i。把(8.36),(8.37) 和(8.13) 代入(8.35),即得(常数不写出来)：

$$e^{iZ[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}$$
$$= \exp\Big[iS[\Phi,U,\bar{U},K,L] + i\int \mathrm{d}^4x(j(x)\Phi(x) + \bar{\xi}(x)U(x) + \bar{U}(x)\xi(x))\Big]$$
$$\cdot\exp\Big(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\Delta^{\varphi}_{\alpha\beta}(x_1 - x_2)G_{\beta\gamma}(x_a)\cdots\Delta^{\varphi}_{\chi\omega}(x_n - x_1)G_{\omega\alpha}(x_1)$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(i)^n}{n}\int \mathrm{d}^4x_1\cdots\mathrm{d}^4x_n\Delta^{u}_{ab}(x_1 - x_2)F_{ba}(x_2)\cdots\Delta^{u}_{yz}(x_n - x_1)F_{za}(x_1)\Big)$$
$$\cdot\lim_{j',\xi',\bar{\xi}'\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n}{n!}\Big(S'\Big[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j'},\frac{-1}{j}\frac{\delta}{\delta\xi'},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}'},K,L\Big]\Big)^n$$
$$\cdot\exp\Big(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y j'_{\alpha}(x)\Big[(-i)\Delta^{\varphi}_{\alpha\beta}(x-y)$$
$$-\int(-i)\Delta^{\varphi}_{\alpha\sigma}(x-z)G_{\sigma\tau}(x)\mathrm{d}^4z(-i)\Delta^{\varphi}_{\tau\beta}(z-y) + \cdots\Big]j'_{\beta}(y)$$
$$- i\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\xi}'_a(x)\Big[(-i)\Delta^{u}_{ab}(x-y)$$
$$-\int(-i)\Delta^{u}_{ae}(x-z)F_{ef}(z)\mathrm{d}^4z(-i)\Delta^{u}_{fb}(z-y) + \cdots\Big]\xi'_b(y)\Big) \tag{8.38}$$

从(8.38) 可以看到：

1. $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}P_{\alpha\beta}}}\cdot\mathrm{Det}Q_{ab}$ 部分(式中第二行和第三行)给出的全都是单圈图,没有树图。圈上有树枝,枝上挂满了$j,\xi,\bar{\xi},K,L$。〔见(8.30) 及说明〕

2. 第四行以下的

$$\lim_{j',\xi',\bar{\xi}'\to}\sum_{n}\frac{(i)^n}{n!}\Big(S'\Big[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j'},\frac{-1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi'},\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}'},K,L\Big]\Big)^n$$
$$\cdot\exp\Big(-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y j'_{\alpha}(x)\frac{P^{-1}_{\alpha\beta}}{\varepsilon^8}j'_{\beta}(y)$$
$$- i\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bar{\xi}'_a(x)\frac{Q^{-1}}{\varepsilon^8}\xi'_b(y)\Big)$$

也是只给出不带$j',\xi',\bar{\xi}'$ 的圈图,因为树图都带$j',\xi',\bar{\xi}'$,当$\lim\limits_{j',\xi',\bar{\xi}'}\to 0$,树图$\to 0$。$S'$ 中含有三线顶点,四线顶点,它们可以造成像图 8.9 这种双圈图、三圈图以及多圈图。圈上也连着树枝枝上挂满了$j,\xi,\bar{\xi},K,L$。

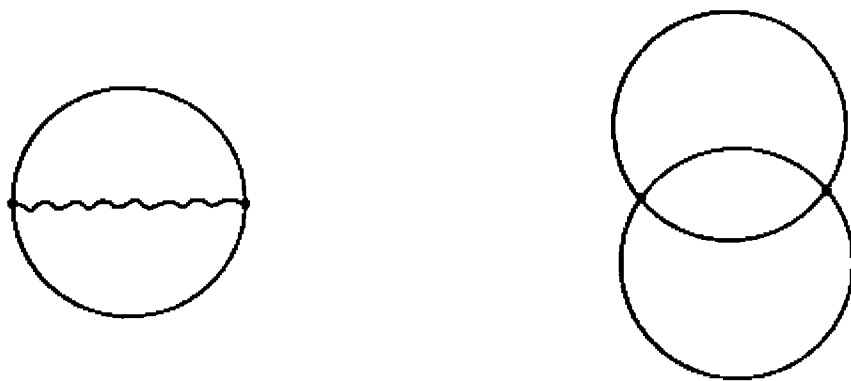


图 8.9

因此,我们证明了二次和二次以上的微商项不贡献树图,只贡献圈图。从而证明了应该取(8.23)作为树图近似,因为它包括了 Z 中所有的树图。

(8.38)看起来似乎比普通微扰论复杂,但如果取 $\Phi,U,\bar{U}$ 为(8.27)的迭代树图解,并把(8.38)全部展开,取 $j',\xi',\bar{\xi}'\to 0$,就可以发现所有的图都和普通微扰展开的图一一对应(都是作为 $j,\xi,\bar{\xi},K,L$ 的泛函)——包括树图一一对应,所有的圈图也一一对应(顶点相同,连接方式相同)。因此,在(8.38)中略去二次和二次以上微商项的这种近似,和微扰论中只取树图的近似是等价的。这也就是说,在微扰论中取树图近似,等价于取(8.23),从而有

$$\begin{aligned}\Gamma_{(0)}[\varphi,u,\bar{u},K,L] &= Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]-j_\alpha\varphi_\alpha-\bar{\xi}_a u_a-\bar{u}_a\xi_a\\ &= S[\varphi,u,\bar{u},K,L]\\ &= S_0^R[\varphi,u,\bar{u},K,L]\end{aligned}\tag{8.39}$$

其中取 $\varphi=\varphi_{树}=\Phi,u=u_{树}=U,\bar{u}=\bar{u}_{树}=\bar{U}$。这正是我们要证明的。同时还看到,如果 $K_i\neq 0$,则 Γ 和 S 一样,也含有 u 一次项 $K_i\Delta_i^a u_a$。

§8-4　再看 1*PI* 顶角函数的生成泛函 $\Gamma[\Phi]$

Γ 和 1PI 图

现在来看一看 Γ 是怎样给出各种去枝的 1*PI* 顶角的。先对(8.8)作泛函微商,得到(根据(8.10),并以 $\frac{1}{\eta}\Gamma$ 代替 Γ,如(8.7)):

$$\begin{aligned}\delta_{\alpha\beta}\delta^4(x-y) &= \frac{\delta^2 Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta\varphi_\beta(y)\delta j_\alpha(x)}=\int\frac{\delta^2 Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j_\alpha(x)\delta j_\lambda(z)}\mathrm{d}^4z\,\frac{\delta j_\lambda(z)}{\delta\varphi_\beta(y)}\\ &= -\int\frac{\delta^2 Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j_\alpha(x)\delta j_\lambda(z)}\mathrm{d}^4z\,\frac{\delta^2\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi_\lambda(z)\delta\varphi_\beta(y)}\end{aligned}\tag{8.40}$$

于是,第二章中由 Z 导出传播子的关系式现在写在(利用(8.8),并考虑到(8.4)提供的传播子是 $\eta\Delta'^{IJ}(x-y)$。这里 Δ'^{IJ} 带"′",表示是完全传播子,包括自能图贡献):

$$\eta\Delta'^{IJ}_{\alpha\beta}(x-y)=-i\frac{\delta^2 Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j_\alpha(x)\delta j_\beta(y)}=-i\frac{\delta\varphi_\alpha(x)}{\delta j_\beta(y)}\tag{8.41}$$

(8.41)的逆是(自(8.40)和(8.41),取 $\frac{1}{\eta}\Gamma$ 代替 Γ):

$$\frac{1}{\eta}\Delta'^{J-1}_{\alpha\beta}(x-y) = -i\frac{\delta^2\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi_\alpha(x)\delta\varphi_\beta(y)} = i\frac{\delta j_\alpha(x)}{\delta\varphi_\beta(y)} \tag{8.42}$$

以下在上述基础上来考察各正规顶角(1*PI* 图)。

两条腿的图

$$i\frac{\delta^2 Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j(x)\delta j(y)} = -\langle 0|T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)|0\rangle^J$$

(这里略去了 $j_\alpha(x)$,$j_\beta(y)$ 的 α,β 指标)

$$= -\eta\Delta'^J(x-y)$$

$$= -\eta\int\Delta'^J(x-z)\Delta'^{J-1}(z-w)\Delta'^J(w-y)\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4w$$

$$= -\int\eta\Delta'^J(x-z)\frac{-i\delta^2\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(w)}\eta\Delta'^J(w-y)\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4w$$

(利用了(8.42)式)。

当 $J=0$(即 $j=\xi=\bar{\xi}=K=L=0$),$u,\bar{u}=0,\varphi=v$,则有(取 $\bar{\varphi}=\varphi-v$):

$$i\langle 0|T(\hat{\bar{\varphi}}(x)\hat{\bar{\varphi}}(y))|0\rangle_{\text{连接}} = i\eta\Delta'(x-y)$$

$$= \int\eta\Delta'(x-z)\left.\frac{\delta^2\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(w)}\right|_{\substack{\varphi=v\\u,\bar{u}=0}}\eta\Delta'(w-y)\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4w \tag{8.43}$$

然而 $i\eta\Delta'(x-y) = \int\eta\Delta'(x-z)\frac{i\Delta'^{-1}(z-w)}{\eta}\eta\Delta(w-y)\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4w$

所以

$$\left.\frac{\delta^2\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi(z)\delta\varphi(w)}\right|_{\substack{\varphi=v\\u,\bar{u}=0}} = \frac{i}{\eta}\Delta'^{-1}(z-w) \tag{8.44}$$

又由于

$$\eta\Delta' = \eta\Delta+\eta\Delta\Sigma\eta\Delta' = \eta\Delta+\eta\Delta'\Sigma\eta\Delta \qquad (\Delta\Sigma\Delta'=\Delta'\Sigma\Delta)$$

$$\frac{1}{\eta}\Delta'^{-1} = \frac{1}{\eta}\Delta^{-1}-\Sigma$$

(这是严格的,因为:

$$\eta\Delta'\cdot\frac{1}{\eta}\Delta'^{-1} = \Delta\cdot\Delta^{-1}+n\Delta'\Sigma-\eta\Delta'\Sigma = \Delta\cdot\Delta^{-1})$$

Σ 都是圈图贡献:

$$\Sigma = \frac{1}{\eta}(\eta\Sigma_{(1)}+\eta^2\Sigma_{(2)}+\cdots) \tag{8.45}$$

所以

$$\left.\frac{\delta^2\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi_\alpha(z)\delta\varphi_\beta(w)}\right|_{\substack{\varphi=v\\u,\bar{u}=0}}$$

$$= \frac{i}{\eta}(\Delta^{-1}_{\alpha\beta}(z-w)-\eta\Sigma^{\alpha\beta}_{(1)}(z,w)-\eta^2\Sigma^{\alpha\beta}_{(2)}(z,w)-\cdots) \tag{8.46}$$

(此地恢复 α,β 指标)。在(8.45)中,$\Sigma_{(1)},\Sigma_{(2)},\cdots$ 分别是一圈,二圈,$\cdots$ 的两顶点去肢 1PI 图的贡献。而从(8.43)来看,$\Delta'(x-z),\Delta'(w-y)$ 都是带自能的完全传播子。从而,(8.46)也应该是一个两点正规(1PI)格林函数,可见前后一致。如果 φ 换成费米场或 $F-P$ 场,上述讨论也是成立的。

三条腿的图

利用(8.41):

$$\frac{\delta}{\delta j_\alpha(z)}=\int\frac{\delta\varphi_\beta(w)}{\delta j_\alpha(z)}\mathrm{d}^4w\frac{\delta}{\delta\varphi_\beta(w)}=\int i\eta\Delta'^J_{\alpha\beta}(z-w)\mathrm{d}^4w\frac{\delta}{\delta\varphi_\beta(w)}\tag{8.47}$$

再利用(8.41)(省略 α,β 等指标):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i^3}\frac{\delta^3Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j(x)\delta j(y)\delta j(z)}&=-\frac{\delta}{\delta j(x)}(\eta\Delta'^J(y-z))\\
&=-\frac{\delta}{\delta j(x)}\eta\int\Delta'^J(y-r)\mathrm{d}^4r\Delta'^{J-1}(r-s)\mathrm{d}^4s\Delta'^J(s-z)\\
&=-\eta\int\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\Delta'^J(y-r)\right)\mathrm{d}^4r\Delta'^{J-1}(r-s)\mathrm{d}^4s\Delta'^J(s-z)\\
&\quad-\eta\int\Delta'^J(y-r)\mathrm{d}^4r\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\Delta'^{J-1}(r-s)\right)\mathrm{d}^4s\Delta'^J(s-z)\\
&\quad-\eta\int\Delta'^J(y-r)\mathrm{d}^4r\Delta'^{J-1}(r-s)\mathrm{d}^4s\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\Delta^J(s-z)\right)\\
&=-2\frac{\delta}{\delta j(x)}(\eta\Delta'^J(y-z))-\eta\int\Delta'^J(y-r)\mathrm{d}^4r\Delta'^J(z-s)\mathrm{d}^4s\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\Delta'^{J-1}(r-s)\right)\\
&\qquad\qquad(\text{玻色子},\Delta'^J(s-z)=\Delta'^J(z-s))\\
&=\frac{2}{i^3}\frac{\delta^3Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j(x)\delta j(y)\delta j(z)}\\
&\quad-\eta\int\Delta'^J(y-r)\mathrm{d}^4r\Delta'^J(z-s)\mathrm{d}^4s\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\Delta'^{J-1}(r-s)\right)
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{i^3}\frac{\delta^3Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j(x)\delta j(y)\delta j(z)}\\
&=\eta\int\Delta'^J(y-r)\mathrm{d}^4r\Delta'^J(z-s)\mathrm{d}^4s\left(\frac{\delta}{\delta j(x)}\Delta'^{J-1}(r-s)\right)\\
&\qquad\qquad(\text{根据}(8.44)\text{和}(8.47))\\
&=\int\eta\Delta'^J(y-r)\mathrm{d}^4r\cdot\eta\Delta'^J(z-s)\mathrm{d}^4s\cdot\eta\Delta'^4(x-t)\mathrm{d}^4t\\
&\quad\cdot\frac{\delta^3\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi(r)\delta\varphi(s)\delta\varphi(t)}=-i<0|T\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\hat{\varphi}(z)|0>^J
\end{aligned}\tag{8.48}$$

当 $J=0(j=\xi=\bar{\xi}=K=L=0)$,$\varphi\underset{u,\bar{u}=0}{=}v$,则有(取 $\bar{\varphi}=\varphi-v$):

$$\begin{aligned}
&-i<0|T\hat{\bar{\varphi}}(x)\hat{\bar{\varphi}}(y)\hat{\bar{\varphi}}(z)|0>_{\text{连接}}\\
&\qquad=\int\eta\Delta'(y-r)\mathrm{d}^4r\cdot\eta\Delta'(z-s)\mathrm{d}^4s\cdot\eta\Delta'(x-t)\mathrm{d}^4t
\end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\delta^3 \frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi(r)\delta\varphi(s)\delta\varphi(t)}\Bigg|_{\substack{\varphi=v\\ u,\bar{u}=v}} \tag{8.49}$$

这里 $\Delta'(y-r)$, $\Delta'(z-s)$, $\Delta'(x-t)$ 都是带自能的完全传播子，所以(8.49) 左右对比后，知道有

$$\frac{\delta^3 \frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi_\alpha(r)\delta\varphi_\beta(s)\delta\varphi_\gamma(t)}\Bigg|_{\substack{\varphi=v\\ u,\bar{u}=0}} = \frac{1}{\eta}\Gamma^{\alpha\beta\gamma}(r,s,t) \tag{8.50}$$

$\frac{1}{\eta}\Gamma^{\alpha\beta\gamma}(r,s,t)$ 是一个三顶点正规($1PI$) 格林函数(恢复了 α,β,γ 指标)，其中最低次项是树图贡献(见图 8.10)，然后依次是单圈图、双圈图，等等。

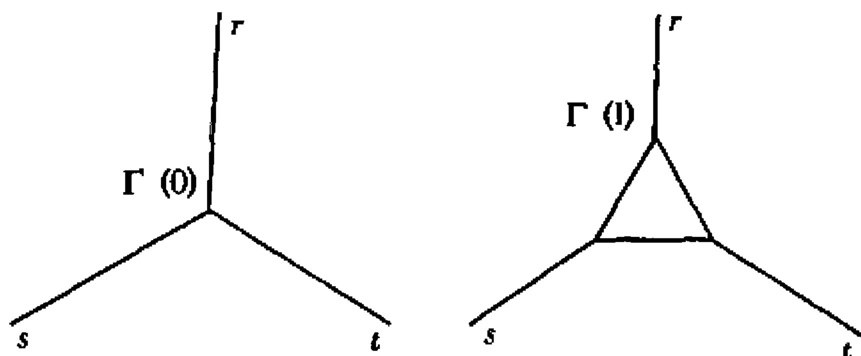


图 8.10

总起来是

$$\frac{\delta^3 \frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi_\alpha(r)\delta\varphi_\beta(s)\delta\varphi_\gamma(t)}\Bigg|_{\substack{\varphi=v\\ u,\bar{u}=0}} = \frac{1}{\eta}\Big(\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{(0)}\delta^4(r-s)\delta^4(r-t) + \eta\Gamma^{\alpha\beta\gamma}_{(1)}(r,s,t) + \cdots\Big) \tag{8.51}$$

n 条腿的图

用归纳法来证明。

$$\frac{\delta^n \frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\delta\varphi_{\alpha_n}(x_n)}\Bigg|_{\substack{\varphi=v\\ u,\bar{u}=0}} = \frac{1}{\eta}\Gamma^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1,\cdots,x_n) \tag{8.52}$$

是正规($1PI$)n 点顶角函数。

证明：设已知在(仍省去 j_α, φ_α 中的 α 指标)

$$\frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j(x_1)\cdots\delta j(x_n)}$$

$$= \int \eta\Delta'^J(x_1-x_1')\cdots\eta\Delta'^J(x_n-x_n')\frac{\delta^n \frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi(x_1')\cdots\delta\varphi(x_n')}\mathrm{d}^4x_1'\cdots\mathrm{d}^4x_n'$$

$+$ 单粒子可约项(非 $1PI$ 项)

之中，$\frac{\delta^n \frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi(x_1')\cdots\delta\varphi(x_n')}\Bigg|_{\substack{\varphi=v\\ u=\bar{u}=0\ \ K=L=0}}$ 是单粒子不可约($1PI$)n 点顶角函数。把(8.47) 在

两边作用上去，得到：

$$\frac{1}{i^{n+1}}\frac{\delta^{n+1}Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j(x_1)\cdots\delta j(x_n)\delta j(x_{n+1})} = -i < 0|T\hat{\varphi}(x_1)\cdots\hat{\varphi}(x_n)\hat{\varphi}(x_{n+1})|0>^J$$

$$= \int\eta\Delta'^J(x_{n+1}-x'_{n+1})d^4x'_{n+1}$$

$$\cdot\frac{\delta}{\delta\varphi(x'_{n+1})}\int\eta\Delta'^J(x_1-x'_1)\cdots\eta\Delta'^J(x_n-x'_n)\frac{\delta^n\frac{1}{\eta}[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi(x'_1)\cdots\delta\varphi(x'_n)}d^4x'_1\cdots d^4x'_n$$

$$+\eta\int\Delta'^J(x_{n+1}-x'_{n+1})d^4x'_{n+1}\frac{\delta}{\delta\varphi(x'_{n+1})}\cdot(\text{非 }1PI\text{ 项})$$

当 $J=0$（即 $j=\xi=\bar{\xi}=K=L=0$），$\varphi\underset{u;\bar{u}=0}{=}v$，则有（取 $\bar{\varphi}=\varphi-v$）：

$$-i < 0|T\hat{\bar{\varphi}}(x_1)\cdots\hat{\bar{\varphi}}(x_n)\hat{\bar{\varphi}}(x_{n+1})|0>_{\text{连接}}$$

$$= \int\eta\Delta'(x_{n+1}-x'_{n+1})\mathrm{d}^4x'_{n+1}$$

$$\times\frac{\delta}{\delta\varphi(x'_{n+1})}\int\eta\Delta'^J(x_1-x'_1)\cdots\eta\Delta'^J(x_n-x'_n)$$

$$\times\frac{\delta^n\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi(x'_1)\cdots\delta\varphi(x'_n)}\mathrm{d}^4x'_1\cdots\mathrm{d}^4x'_n\Bigg|_{\substack{\varphi=0\\u,\bar{u}=0\\K,L=0}}+(\text{非 }1PI\text{ 项})$$

等式右方的第一项又包括两个部分：

一部分是 $\int\eta\Delta'(x_{n+1}-x'_{n+1})\mathrm{d}^4x'_{n+1}\frac{\delta}{\delta\varphi(x'_{n+1})}$ 作用在某一个 $\Delta'^J(x_i-x'_i)$ 上，也就是 $\frac{\delta}{\delta j(x_{n+1})}$ 作用在 $\Delta'^J(x_i-x'_i)$ 上（见(8.48)）。结果和(8.49)一样，产生了一个新的三条腿的顶角，如图 8.11，是非 1PI 的。

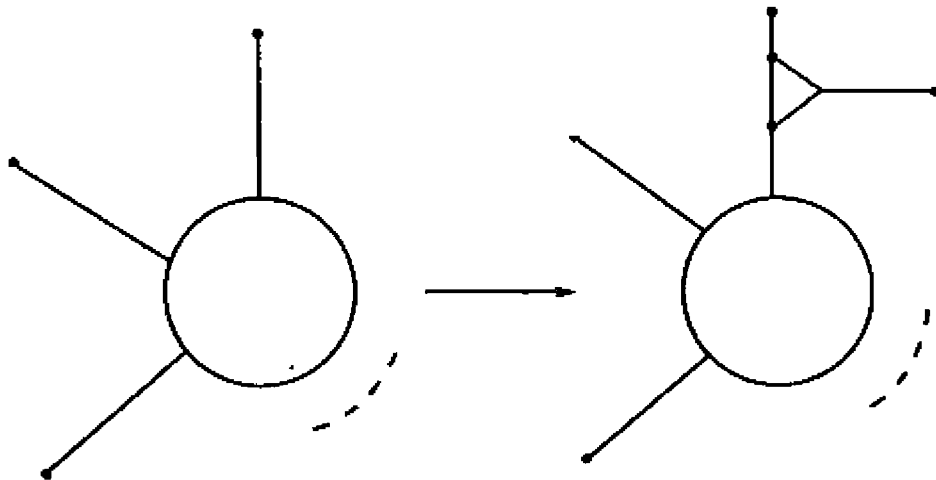


图 8.11

另一部分是 $\frac{\delta}{\delta\varphi(x'_{n+1})}$ 作用在 $\frac{\delta^n\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta\varphi(x'_1)\cdots\delta\varphi(x'_n)}$ 上。这一部分在取 $J=0$；$\varphi\underset{u,\bar{u}=0}{=}v$ 时，是一个 $1PI$ 图。（因为原先在 $J=0,u,\bar{u}=0$ $\varphi=0$ 时是一个 $1PI$ 图，作用后不会产生非 $1PI$ 图——当 $J=0,u,\bar{u}=0$ $\varphi=v$ 时）。见图 8.12：

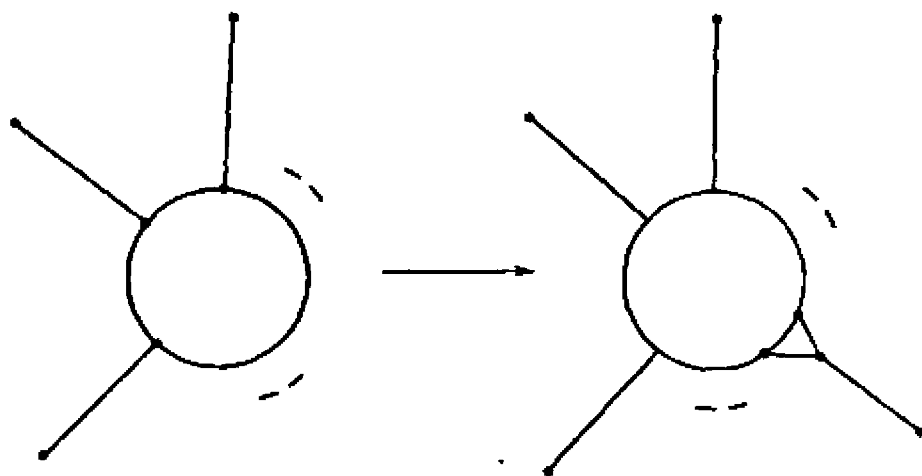


图 8.12

所以总起来有：

$$\frac{1}{i^{n+1}}\left.\frac{\delta^{n+1}Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j(x_1)\cdots\delta j(x_n)\delta j(x_{n+1})}\right|_{j=0}=-i<0|T\hat{\hat{\varphi}}(x_1)\cdots\hat{\hat{\varphi}}(x_n)\hat{\hat{\varphi}}(x_{n+1})|0>_{连接}$$

$$=\int\eta\Delta'(x_1-x_1')\cdots\eta\Delta'(x_n-x_n')\cdot\eta\Delta'(x_{n+1}-x_{n+1}')$$

$$\times\left.\frac{\delta^{n+1}\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi(x_1')\cdots\delta\varphi(x_n')\delta\varphi(x_{n+1}')}\right|_{\substack{\varphi=v\\u,\bar{u}=0}}\mathrm{d}^4x_1'\cdots\mathrm{d}^4x_n'\mathrm{d}^4x_{n+1}'+(\text{非 }1PI\text{ 项})$$

这样就看到，如果 $\left.\frac{\delta^{n}\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)}\right|_{\substack{\varphi=v\\u,\bar{u}=0}}$ 包括了全部的 n 点 $1PI$ 图的贡献，则 $\left.\frac{\delta^{n+1}\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_n)\delta\varphi(x_{n+1})}\right|_{\substack{\varphi=v\\u,\bar{u}=0}}$ 就包括了全部的 $n+1$ 点 $1PI$ 图的贡献。然而前已知道，$n=2,n=3$ 时前提成立，∴ (8.52) 的命题得证。

(8.52) 右方 n 顶点 $1PI$ 格林函数 $\Gamma^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 可按圈数(即 η 的幂次) 展开：

$$\Gamma^{\alpha_1\cdots\alpha_n}=(\Gamma_{(0)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}+\eta\Gamma_{(1)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}+\eta^2\Gamma_{(2)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}+\cdots)\tag{8.53}$$

说明两点：

1. $\Gamma_{(0)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 是树图部分。由于 $\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]$ 的树图部分前已证明等于 $S[\varphi,u,\bar{u}]=S_{(0)}^R[\varphi,u,\bar{u}]$ (见(8.39))，而在一个可重正化的理论中，$S_{(0)}^R$ 至多有四线(玻色子线) 顶点，所以 $\Gamma_{(0)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 中的 n 只能是 $n=2,3,4$。$n\geqslant5$ 时没有 $\Gamma_{(0)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$。另外，在有自发破缺时，$n=1$ 也有贡献，此时 $S_{(0)}^R$ 中有 $\bar{\chi}$ 一次项($\sim -v(\mu^2+\lambda v^2)\bar{\chi}$，例如见(8.15))，$\Gamma$ 的树图近似中也有相同的 $\bar{\chi}$ 一次项(我们注意到，在(8.17) 中，由于要求($\mu^2+\lambda v^2$) 与高次图抵消掉极点项后的有限贡献 G_L' 相加为零，所以 $-v(\mu^2+\lambda v^2)\bar{\chi}\neq0$。然而经过微扰修正的 Γ 中则是消去 $\bar{\chi}$ 一次项的)。

2. $\Gamma_{(1)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 是 n 顶点不可约单圈图之和(在重正化的情况下，也包括 η 一次的抵消项，抵消后 $\Gamma_{(1)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 不发散)。$\Gamma_{(2)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$，$\Gamma_{(3)}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 也依此类推。

既然(8.46)，(8.51)，(8.52)，(8.53) 告诉我们，正规顶角生成泛函 Γ 的微商

$$\left.\frac{\delta^{n}\frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u}]}{\delta\varphi_{\alpha_1}(x_1)\cdots\delta\varphi_{\alpha_n}(x_n)}\right|_{\substack{\varphi=v\\u,\bar{u}=0}}=\frac{1}{\eta}\Gamma^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1,\cdots,x_n)$$

提供$j,\xi,\bar{\xi},K,L\to 0$时全部的n顶点$1PI$图的贡献,那么,正规顶角生成泛函$\Gamma[\varphi]$就应该可以写成(注意,这里为了方便,只写一个符号φ,它代表所有的场,也包括$F-P$场$u,\bar{u}$):

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\Gamma^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(\varphi-v)_{\alpha_1}\cdots(\varphi-v)_{\alpha_n} \tag{8.54}$$

(8.54)当然满足(8.52)。

注意$\Gamma[\varphi]$中没有$n=1$的贡献,因为正如前面(8.15)和(8.17)所说的,如果包括了微扰修正和抵消项的贡献,则$\bar{\chi}$一次项消去。

§8-5　$K,L\neq 0$时Γ中增添了什么

1. 在$j,\xi,\bar{\xi}\to 0$时,$Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]$对$j,\xi,\bar{\xi}$的微商仍是连接图。理由见§2-4。

2. 现在

$$\left.\frac{\delta Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta\xi_a(x)}\right|_{j,\xi,\bar{\xi}=0} = -\langle 0|\hat{\bar{u}}_a|0\rangle^J\Big|_{j,\xi,\bar{\xi}=0}$$

$$= -\bar{u}_a(x)\Big|_{j,\xi,\bar{\xi}=0} = \begin{matrix} -i(K_i^A - F_i^c\bar{u}_c)(1PI\text{图})_i^b\Delta_{ba}^{u'}\Big|_{j,\xi,\bar{\xi}=0} \\ -i(K_l^i - c_l^c\bar{u}_c)(1PI\text{图})_l^b\Delta_{ba}^{u'J}\Big|_{j,\xi,\bar{\xi}\to 0}\end{matrix} \tag{8.55}$$

此地以§8-8的规范,(8.116)的S为例。其他规范类推,图8.13是$1PI$图一例。

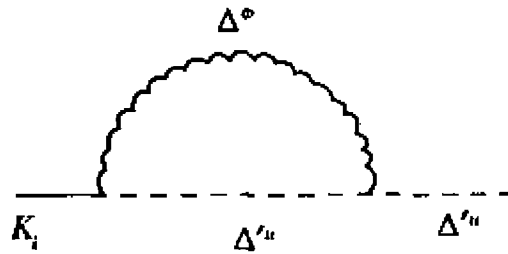


图　8.13

和(8.11)~(8.13)相仿,令$\Gamma_I[\bar{\varphi},u,\bar{u},K,L]$代表$\Gamma$中各种耦合项以及有圈图的项之和,则有(参考(8.11)):

$$\frac{\delta\Gamma[\bar{\varphi},u,\bar{u},K,L]}{\delta u_a} = -i\bar{u}_b\Delta'^{uJ-1}_{ba} + \frac{\delta\Gamma_I[\bar{\varphi},u,\bar{u},K,L]}{\delta u_a} = \bar{\xi}_a$$

(也和以前一样,$\bar{u}_b$和Δ'^{uJ-1}都是$j,\xi,\bar{\xi},K,L$的泛函。Γ_I中有圈图贡献。)于是

$$\bar{u}_a = i\left(\bar{\xi}_b - \frac{\delta\Gamma_I[\bar{\varphi},u,\bar{u},K,L]}{\delta u_b}\right)\Delta'^{uJ}_{ba}$$

取$j,\xi,\bar{\xi}=0$,相应地有$\bar{\varphi}=0,u_a=0,\bar{u}_a=e_a$,而

$$\bar{u}_a\Big|_{j,\xi,\bar{\xi}=0} = e_a = -i\frac{\delta\Gamma_I[\bar{\varphi},u,\bar{u},K,L]}{\delta u_b}\Big|_{\substack{\bar{\varphi}=0\\u=0}}\cdot\Delta'^{uJ}_{ba}\Big|_{j,\xi,\bar{\xi}=0} \tag{8.56}$$

对比(8.55)和(8.56),并由于K,u反对易,可看到Γ_I中增添如下的u一次项:

$$(K_i^A - F_i^c\bar{u}_c)(1PI\text{图})_i^b u_b + (K_l^i - c_l^c\bar{u}_c)(1PI\text{图})_l^b u_b \tag{8.57}$$

3. 出现了图 8.14 这一类的图：

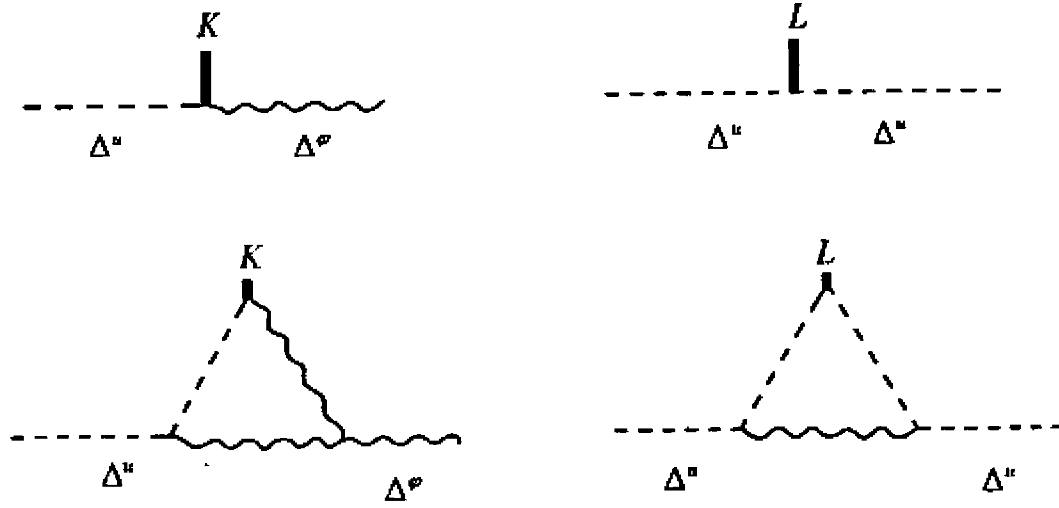


图 8.14

所以相应地有

$$\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta j_\alpha \delta \xi_a}\right|_{j,\xi,\bar{\xi}=0} = -i < 0 | T\hat{\bar{\varphi}}_\alpha \hat{\bar{u}}_a | 0 >_{\text{连接}} \neq 0 \tag{8.58$_1$}$$

$$\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta \xi_a \delta \xi_b}\right|_{j,\xi,\bar{\xi}=0} = i < 0 | T\hat{\bar{u}}_a \hat{\bar{u}}_b | 0 >_{\text{连接}} \neq 0 \tag{8.58$_2$}$$

$(8.58)_1$ 和 $(8.58)_2$ 可称为混合传播子，它们由 K,L 和 Δ^u,Δ^φ 组成。在 $K,L=0$ 时，混合传播子也就没有了。

4. 由于有 K,L，还出现了新的 $1PI$ 图，也是由 Γ 的泛函微商产生。先看新产生的两点的 $1PI$ 图。自

$$Z[j,\xi,\bar{\xi},K,L] = \Gamma[\bar{\varphi},u,\bar{u},K,L] + j_\alpha \bar{\varphi}_\alpha + \bar{\xi}_a u_a + \bar{u}_a \xi_a$$

有

$$\frac{\delta Z}{\delta \xi_a} = \int\left[\frac{\delta u_c}{\delta \xi_a}\frac{\delta \Gamma}{\delta u_c} + \frac{\delta \bar{\varphi}_\alpha}{\delta \xi_a}\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_\alpha} + \frac{\delta \bar{u}_b}{\delta \xi_a}\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{u}_b} + j_\alpha \frac{\delta \bar{\varphi}_\alpha}{\delta \xi_a} - \bar{\xi}_b \frac{\delta u_b}{\delta \xi_a} - \bar{u}_a + \frac{\delta \bar{u}_b}{\delta \xi_a}\xi_b\right] d^4 x \tag{8.59}$$

其中

$$\frac{\delta \bar{u}_a}{\delta \xi_b} - \frac{\delta^2 Z}{\delta \xi_a \delta \xi_b} = i\langle 0 | T\hat{\bar{u}}_a \hat{\bar{u}}_b | 0\rangle^J$$

$$\frac{\delta u_c}{\delta \xi_a} = \frac{\delta^2 Z}{\delta \xi_a \delta \bar{\xi}_c} = i\langle 0 | T\hat{u}_c \hat{\bar{u}}_a | 0\rangle^J$$

$$\frac{\delta \bar{\varphi}_\alpha}{\delta \xi_a} = \frac{\delta^2 Z}{\delta \xi_a \delta j_\alpha} = -i\langle 0 | T\hat{\bar{\varphi}}_\alpha \hat{\bar{u}}_a | 0\rangle^J$$

于是自(8.59)：

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta j_\alpha \delta \xi_a} = -i\langle 0 | T\varphi_{\hat{\alpha}} \hat{\bar{u}}_a | 0\rangle^J$$

$$= \int\left[\frac{\delta u_c}{\delta \xi_a}\frac{\delta \varphi_\beta}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi_\beta \delta u_c} + \frac{\delta \bar{\varphi}_\gamma}{\delta \xi_a}\frac{\delta \bar{\varphi}_\beta}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_\beta \delta \bar{\varphi}_\gamma} + \frac{\delta \bar{u}_b}{\delta \xi_a}\frac{\delta \bar{\varphi}_\beta}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_\beta \delta \bar{u}_b}\right.$$

$$+ \frac{\delta^2 u_c}{\delta j_\alpha \delta \xi_a}\frac{\delta \Gamma}{\delta u_c} + \frac{\delta^2 \bar{\varphi}_\gamma}{\delta j_\alpha \delta \xi_a}\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_\gamma} + \frac{\delta^2 \bar{u}_b}{\delta j_\alpha \delta \xi_a}\frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{u}_b}$$

$$+ \frac{\delta u_c}{\delta \xi_a}\frac{\delta \bar{u}_d}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{u}_d \delta u_c} + \frac{\delta \bar{\varphi}_\gamma}{\delta \xi_a}\frac{\delta \bar{u}_d}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{u}_d \delta \bar{\varphi}_\gamma} + \frac{\delta \bar{u}_b}{\delta \xi_a}\frac{\delta \bar{u}_d}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{u}_d \delta \bar{u}_b}$$

$$+\frac{\delta u_b}{\delta\xi_a}\frac{\delta u_d}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_b\delta u_c}+\frac{\delta_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta u_d}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_c\delta\bar{u}_d}+\frac{\delta\bar{\varphi}_\gamma}{\delta\xi_a}\frac{\delta u_d}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{u}_d\delta\bar{\varphi}_\gamma}$$

$$+j_\beta\frac{\delta^2\bar{\varphi}_\beta}{\delta j_\alpha\delta\xi_a}+\frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_a}-\bar{\xi}_b\frac{\delta^2 u_b}{\delta j_\alpha\delta\xi_a}-\frac{\delta\bar{u}_a}{\delta j_\alpha}+\frac{\delta^2\bar{u}_b}{\delta j_\alpha\delta\xi_a}\xi_b\Big]\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y$$

由于$\frac{\delta\Gamma}{\delta u_c}=\bar{\xi}_c$， $\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\alpha}=-j_\alpha$， $\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_b}=-\xi_b$，当$j,\xi,\bar{\xi}\to 0$，第二行整个为0；第五行只剩下$\frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_a}=\frac{\delta^2 Z}{\delta j_\alpha\delta\xi_a}$，和$-\frac{\delta\bar{u}_a}{\delta j_\alpha}=\frac{\delta^2 Z}{\delta j_\alpha\delta\xi_a}$。(积分中省写了一些δ函数)

由于Γ中$\bar{u}$与u或与ξ配对，只微商去掉$\bar{u}$，而留下u或ξ，则在$j,\xi,\bar{\xi}\to 0,u\to 0$时，这个微商为零，从而第一行第三项，第三行第二项和第三项都$\to 0$。

第一行第二项：

$$\frac{\delta\bar{\varphi}_\beta}{\delta j_\alpha}=i\Delta^{\varphi J}_{\beta\alpha}\qquad\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\beta\delta\varphi_\gamma}=i\Delta^{\varphi J^{-1}}_{\gamma\beta}$$

$$\therefore\qquad\int\frac{\delta\bar{\varphi}_\gamma}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{\varphi}_\beta}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\beta\delta\bar{\varphi}_\gamma}\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y=\frac{\delta\bar{\varphi}_\gamma}{\delta\xi_a}(-1)\delta_{\alpha\gamma}=-\frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_a}=-\frac{\delta^2 Z}{\delta j_\alpha\xi_a}$$

第三行第一项：

$$\frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}=i\langle 0|\,T\hat{u}_c\hat{\bar{u}}_a\,|0\rangle^J=i\Delta^{uJ}_{ca}$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{u}_b(x)\delta\xi_a(y)}=-\delta_{ab}\delta^4(x-y)=\int\frac{\delta\bar{\xi}_c(z)}{\delta\bar{u}_b(x)}\mathrm{d}^4z\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\xi}_c(z)\delta\xi_a(y)}$$

$$=\int\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{u}_b(x)\delta u_c(z)}\mathrm{d}^4z\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\xi}_c(z)\delta\xi_a(y)}$$

$$\therefore\qquad\int\frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{u}_d}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{u}_d\delta u_c}\mathrm{d}^4z\mathrm{d}^4w=\int\frac{\delta\bar{u}_d}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{u}_d\delta u_c}\mathrm{d}^4z\left(-\frac{\delta^2 Z}{\delta\bar{\xi}_c\delta\xi_a}\right)\mathrm{d}^4w$$

$$=\frac{\delta\bar{u}_d}{\delta j_\alpha}\delta_{da}=\frac{\delta\bar{u}_a}{\delta j_\alpha}=-\frac{\delta^2 Z}{\delta j_\alpha\delta\xi_a}$$

因此，第一行第二项和第三行第一项同第五行剩下的两项正好互相抵消。第四行 = 0，因为在$j,\xi,\bar{\xi}\to 0,\varphi,u\to 0$时，$\frac{\delta u_a}{\delta j_\alpha}=\frac{\delta^2 Z}{\delta j_\alpha\delta\xi_d}=0$ 所以有

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta j_\alpha\delta\xi_a}\bigg|_{j,\xi,\bar{\xi}=0}=-i\langle 0|\,T\hat{\bar{\varphi}}_\alpha\hat{\bar{u}}_a\,|0\rangle$$

$$=\int\frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{\varphi}_\beta}{\delta j_\alpha}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\beta\delta u_c}\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\bigg|_{j,\xi,\bar{\xi}=0}$$

$$=\int i\langle 0|\,T\hat{u}_c\hat{\bar{u}}_\alpha\,|0\rangle\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_c\delta\bar{\varphi}_\beta}\bigg|_{\substack{\bar{\varphi}=0\\ \bar{u}=0,\bar{u}_a=\epsilon_a}}i\langle 0|\,T\hat{\bar{\varphi}}_\beta\hat{\bar{\varphi}}_\alpha\,|0\rangle d^4zd^4w$$

$$\therefore\qquad i\langle 0|\,T\hat{\bar{\varphi}}_\alpha(x)\hat{\bar{u}}_a(y)\,|0\rangle$$

$$=\int\langle 0|\,T\hat{\bar{\varphi}}_\alpha(x)\hat{\bar{\varphi}}_\beta(z)\,|0\rangle\mathrm{d}^4z\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\beta(z)\delta u_c(w)}\bigg|_{\substack{\bar{\varphi}=0\\ u=0,\bar{u}_a=\epsilon_a}}$$

$$\cdot\, d^4w\langle 0|\,T\hat{u}_c(w)\hat{\bar{u}}_a(y)\,|0\rangle\tag{8.60}$$

可用费曼图8.15来表示(直接用微扰论做出来),两侧是完全传播子Δ^{φ}和Δ^{u},当中是一个两点(一点接$\bar{\varphi}_\beta$,一点接u_c)的$1PI$格林函数(此外只有自能图,都已归入完全传播子Δ^{φ}和Δ^{u})。与右方对比,正好当中的$1PI$与$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\beta(z)\delta u_c(w)}$相等。所以说

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\beta\delta u_c} = \text{两点 }1PI\text{ 格林函数}\begin{pmatrix}\text{一点接 }\bar{\varphi}_\beta\\ \text{一点接 }u_c\end{pmatrix}\text{之和。}$$

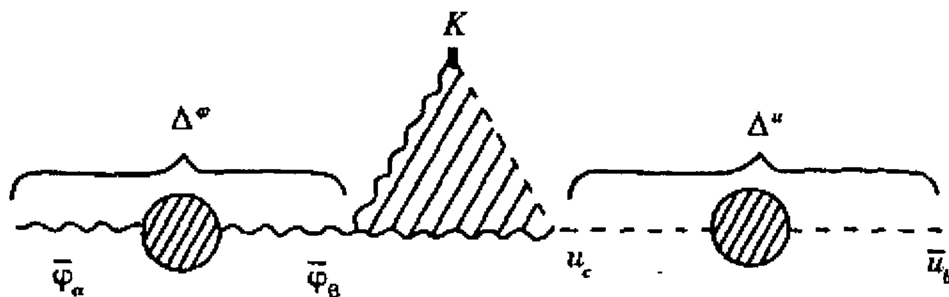


图 8.15

现在再看另一个新产生的两点$1PI$图。也是自(8.59):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 Z}{\delta\xi_b\delta\xi_a} &= -i\langle 0|\,T\hat{\bar{u}}_a\hat{\bar{u}}_b\,|0\rangle^J \\
&= \iint\Big[\frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta u_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_d\delta u_c} - \frac{\delta\varphi_\alpha}{\delta\xi_a}\frac{\delta u_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_d\delta\bar{\varphi}_\alpha} + \frac{\delta\bar{u}_c}{\delta\xi_\alpha}\frac{\delta u_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_d\delta\bar{u}_c} \\
&\quad + \frac{\delta^2 u_c}{\delta\xi_b\delta\xi_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta u_c} + \frac{\delta^2\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_b\delta\xi_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\alpha} + \frac{\delta^2\bar{u}_b}{\delta\xi_b\delta\xi_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_b} \\
&\quad + \frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{u}_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{u}_d\delta u_c} - \frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{u}_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{u}_d\delta\bar{\varphi}_\alpha} + \frac{\delta\bar{u}_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{u}_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{u}_d\delta\bar{u}_c} \\
&\quad + \frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\alpha\delta u_c} - \frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_a}\frac{\xi\bar{\varphi}_\beta}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\beta\delta\bar{\varphi}_\alpha} + \frac{\delta\bar{u}_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\alpha\delta\bar{u}_c} \\
&\quad + j_\alpha\frac{\delta^2\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_b\delta\xi_a} + \bar{\xi}_c\frac{\delta^2 u_c}{\delta\xi_b\delta\xi_a} - \frac{\delta\bar{u}_a}{\delta\xi_b} + \frac{\delta\bar{u}_b}{\delta\xi_a} + \frac{\delta^2\bar{u}_c}{\delta\xi_b\delta\xi_a}\xi_c\Big]\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y
\end{aligned}$$

和前一样,当$j,\xi,\bar{\xi}\to 0$,第二行整个为0;第五行只剩下$-\frac{\delta\bar{u}_a}{\delta\xi_b}+\frac{\delta\bar{u}_b}{\delta\xi_a}=2\frac{\delta^2 Z}{\delta\xi_b\delta\xi_a}$。(积分中省写了一些δ函数)当$j,\xi,\bar{\xi}\to 0$,只微商$\bar{u}$,不微商$u$,这种项也$\to 0$(和前一样),从而第三行的第二项和第三项,第四行的第三项都$\to 0$。

于是,整理一下后得到:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta\xi_a\,\delta\xi_b}\right|_{j,\xi,\bar{\xi}=0} &= i\langle 0|\,T\hat{\bar{u}}_a\hat{\bar{u}}_b\,|0\rangle \\
&= \iint\Big[\frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta u_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_d\delta u_c} - \frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_a}\frac{\delta u_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_d\delta\bar{\varphi}_\alpha} + \frac{\delta\bar{u}_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta u_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_d\delta\bar{u}_c} \\
&\quad + \frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{u}_d}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{u}_d\delta u_c} + \frac{\delta u_c}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\alpha\delta u_c} - \frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_a}\frac{\delta\bar{\varphi}_\alpha}{\delta\xi_b}\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\beta\delta\bar{\varphi}_\alpha}\Big]\mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y
\end{aligned} \tag{8.61}$$

等式左方可直接用微扰论做出来,其费曼图见图8.16:

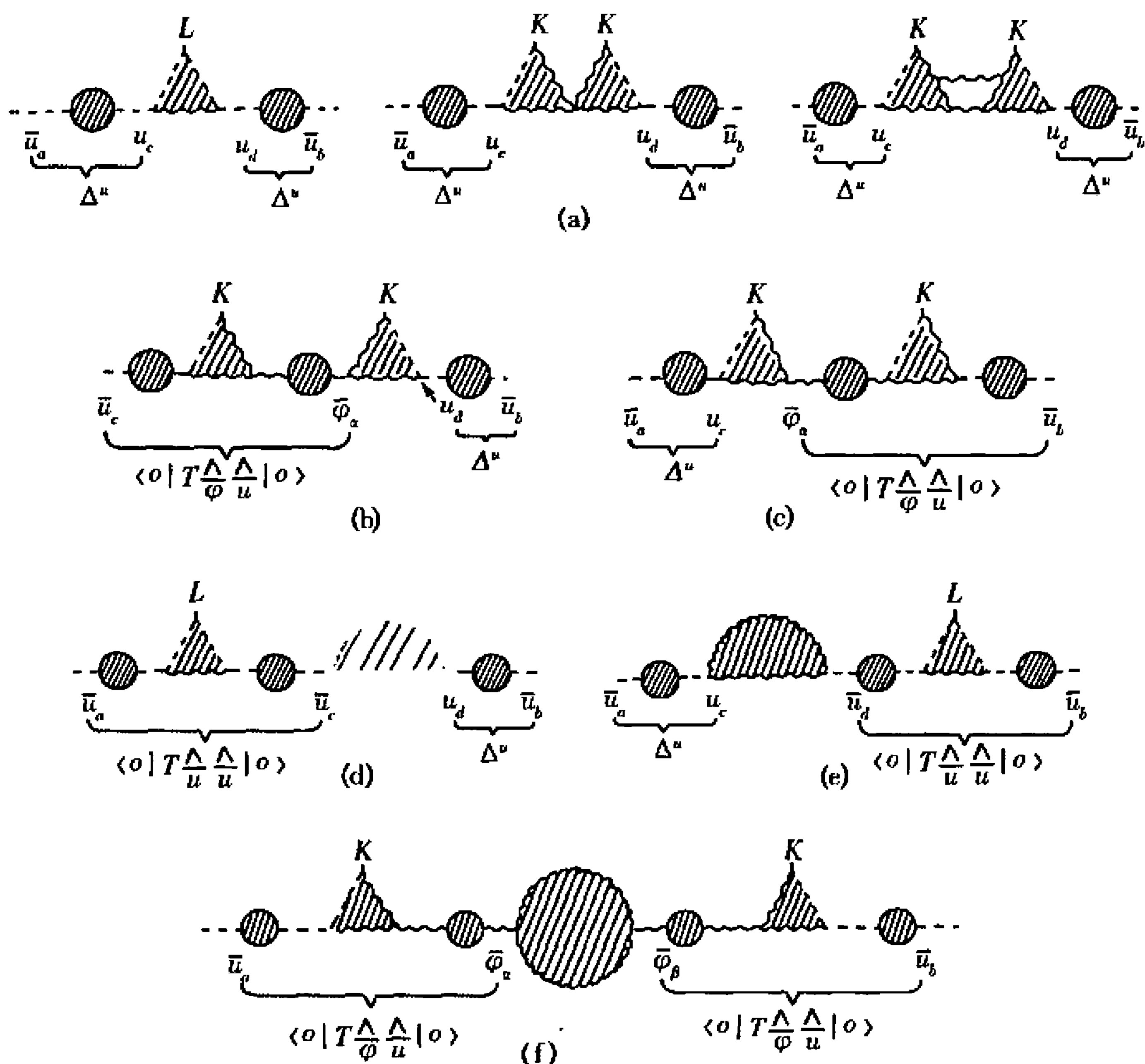


图 8.16

再与(8.61)右方对比：第二、三、四、五、六项的Γ二次微商都是已知的1*PI*二点格林函数，$\langle 0|T\hat{\bar{u}}\hat{u}|0\rangle$ 和$\langle 0|T\hat{\varphi}\hat{u}|0\rangle$ 是已知的混合传播子（见图8.14）。所以立刻看到，图8.16的(b)是(8.61)式右方的第二项，(c)是第五项，(d)是第三项，(e)是(f)是第四项，第六项。于是，剩下来的(a)只能是第一项。第一项的传播子又是已知的，对比之下$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_a\delta u_c}$必须等于(a)图当中部分所代表的1*PI*图之和。所以说：

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_d\delta u_c} = \text{两点 } 1PI \text{ 格林函数}\begin{pmatrix}\text{一点接 } u_d\\ \text{一点接 } u_c\end{pmatrix}\text{之和。}$$

到此已知，有K,L时，将多出来传播子$\langle 0|T\hat{\bar{\varphi}}_\alpha\hat{\bar{u}}_a|0\rangle$，$\langle 0|T\hat{\bar{u}}_a\hat{\bar{u}}_b|0\rangle$ 和1*PI*

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\bar{\varphi}_\alpha\delta u_a},\frac{\delta^2\Gamma}{\delta u_a\delta u_b}。$$

§8－6 有K,L时，Γ仍是1*PI*生成泛函

上节论证了，有K,L时，Γ的二次微商在$j,\xi,\bar{\xi}\to 0$时仍是1*PI*图。现在再证明，Γ在n

次微商时也是如此。注意 §8-4节关于n条腿的图的证明在有$u,\bar{u}$时并不充分,因为连在Γ上的u虽然可以单独出现(由于u与K配对),但$\bar{u}$必须要和u配对出现(由于u线的连续性和在相互作用耦合项中$\bar{u}$必定与u搭配)。图8.17就是一个例子:

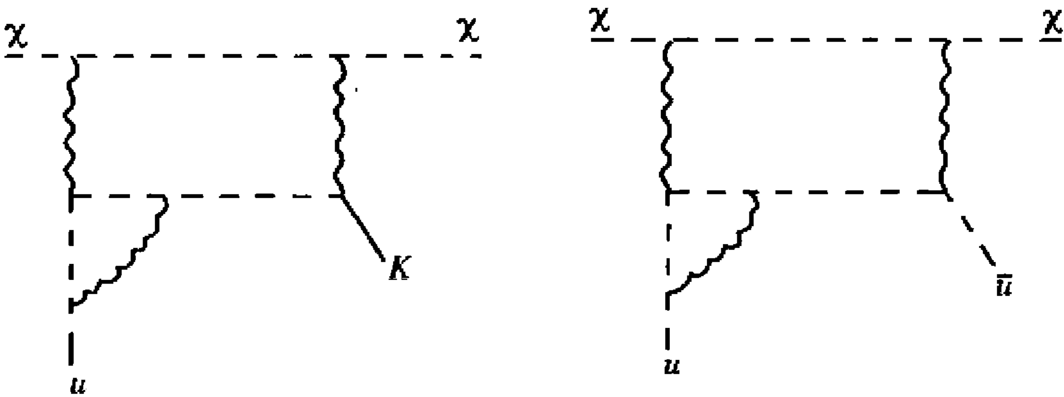


图 8.17

所以如果仅对$\bar{u}$微商,而留下u,则当$j,\xi,\bar{\xi}=0,u=0$,微商也$=0$。于是归纳法就中断了(没有与$n+1$次微商相应的$1PI$图)。只有继续对Γ中剩下的u微商,把剩下的u也去掉,这才能在$j,\xi,\bar{\xi}=0,u=0$时不为零。所以说,只证明"如果微商n次时成立,则微商$(n+1)$次也成立"是不够的;还必须直接证明"如果微商n次是$1PI$,则微商$(n+2)$次也成立"。

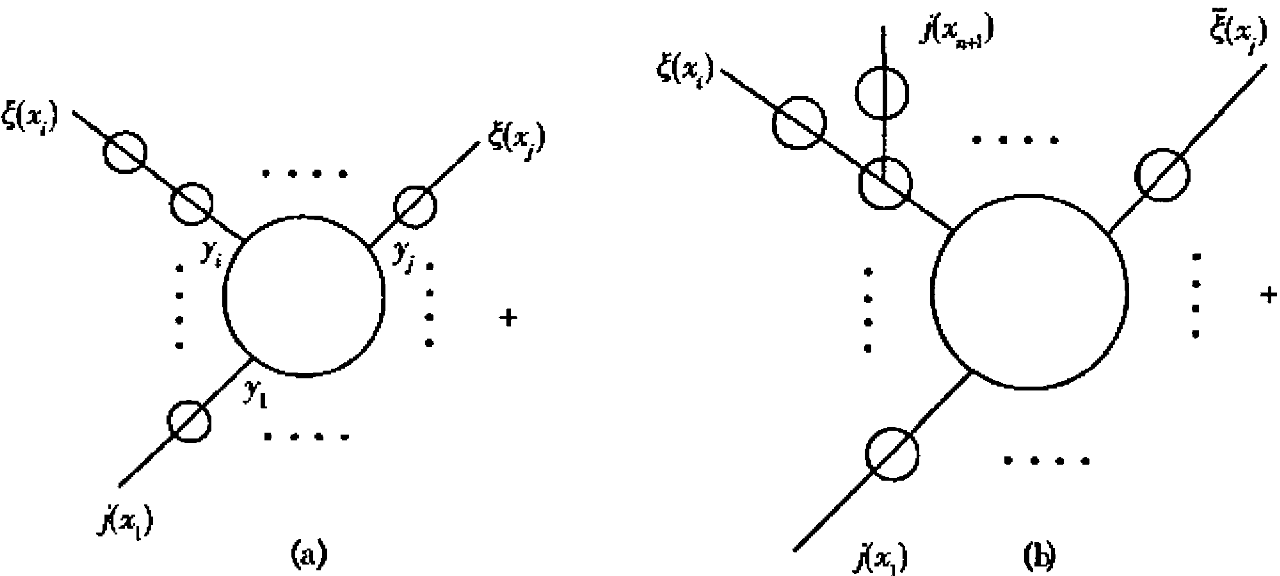
还是通过Z的微商(微扰论矩阵元)与Γ的微商的对比。设有

$$\frac{\delta^n Z}{\delta j(x_1)\cdots\delta\xi(x_i)\cdots\delta\bar{\xi}(x_j)\cdots}$$
$$=\eta_p\int P\cdots\frac{\delta\chi_c(y_j)}{\delta\bar{\xi}(x_j)}\cdots\frac{\delta\chi_b(y_i)}{\delta\xi(x_i)}\cdots\frac{\delta\chi_a(y_1)}{\delta j(x_1)}\cdot\frac{\delta^n\Gamma}{\delta\chi_a(y_1)\cdots\delta\chi_b(y_i)\cdots\delta\chi_c(y_j)\cdots}$$
$$\cdot\, d^4y_1\cdots d^4y_n+(\text{非 }1PI\text{ 项})\tag{8.62}$$

说明两点:

1. η_p是$\pm$号,由$\cdots\frac{\delta x_c(y_j)}{\delta\bar{\xi}(x_j)}\cdots\frac{\delta x_b(y_i)}{\delta\xi(x_i)}\cdots\frac{\delta x_a(y_1)}{\delta j(x_1)}$的对易性质和排列次序$P$决定。

2. 在有K,L时,非零项是χ_a对$\bar{\varphi}$和$\bar{u}$求和;χ_b对$\bar{\varphi},u$和$\bar{u}$求和;χ_c对$\bar{u}$求和。只在$j,\xi,\bar{\xi}\neq0$时来考察Z的挂$j,\xi,\bar{\xi}$的图(见图8.18):



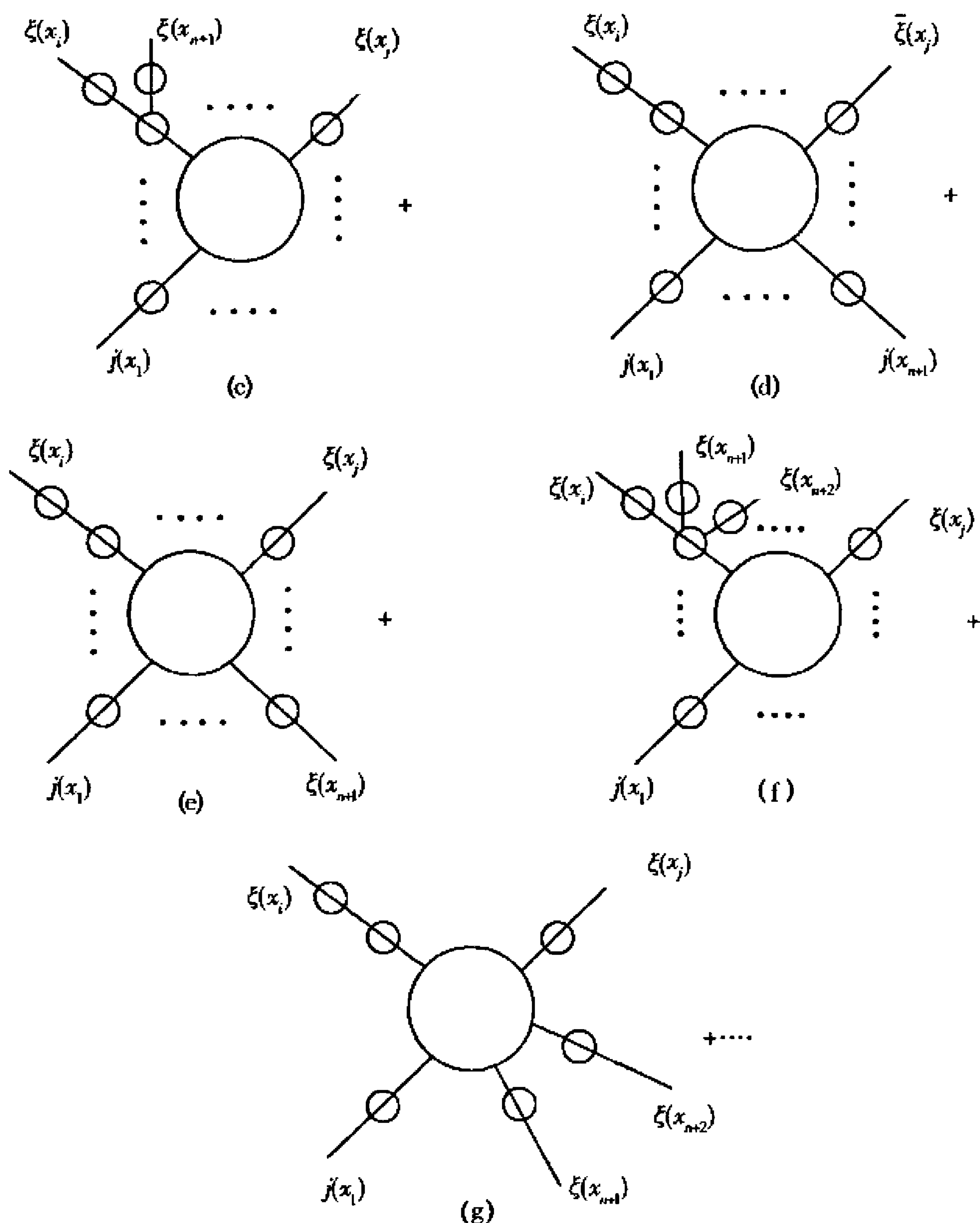


图 8.18

1. 当$j,\xi,\bar{\xi}=0$时,(8.62) 左方就只剩下(a) 图(此时(b),(c),…,(g) 各图都是0)和一些没有画出来的非 $1PI$ 图。图中要把挂着的$j,\xi,\bar{\xi}$(共 n 个) 去掉。

2. 再把(8.62) 右方的第一项与 Z 展开的(a) 图对比(去掉了$j,\xi,\bar{\xi}$)。每一个传播子$\left(\text{或}\frac{\delta\chi}{\delta j},\text{或}\frac{\delta\chi}{\delta\xi},\text{或}\frac{\delta\chi}{\delta\bar{\xi}},\cdots\right)$都和图中一条腿相对应,所以

$$\frac{\delta_n\Gamma}{\delta\chi_a(y_1)\cdots\delta\chi_b(y_i)\cdots\delta\chi_c(y_i)}$$

正好就是(a) 图当中的 $1PI$ 部分。说明了(a) 图与假设"n 次微商时成立" 是一致的。我们不用去管那些非 $1PI$ 图。

3. 从这个假设出发,(b),(c),(d),(e),(f),(g) 各图的当中部分就也都是 $1PI$ 部分。由此出发,再微商一次:

$$\frac{\delta^{n+1}Z}{\delta j(x_{n+1})\delta j(x_1)\cdots}$$

$$= \eta_p\int P\cdots \frac{\delta\chi_c(y_j)}{\delta\bar{\xi}(x_j)}\cdots \frac{\delta^2\chi_b(y_i)}{\delta j(x_{n+1})\delta\xi(x_i)}\cdots \frac{\delta\chi_a(y_1)}{\delta j(x_1)}$$

$$\cdot \frac{\delta^n\Gamma}{\delta\chi_a(y_1)\cdots\delta\chi_b(y_i)\cdots\delta x_c(y_j)\cdots}\mathrm{d}^4y_1\cdots \mathrm{d}_n y^4 \quad + \cdots + (\text{非 } 1PI\text{ 项})$$

$$+ \eta_p\int P\cdots \frac{\delta\chi_c(y_j)}{\delta\bar{\xi}(x_j)}\cdots \frac{\delta\chi_b(y_i)}{\delta\xi(x_i)}\cdots \frac{\delta\chi_a(y_1)}{\delta j(x_1)}\frac{\delta\chi_l(y_{n+1})}{\delta j(x_{n+1})}$$

$$\cdot \frac{\delta^{n+1}\Gamma}{\delta\chi_l(y_{n+1})\delta\chi_a(y_1)\cdots\delta\chi_b(y_i)\cdots\delta\chi_c(y_j)\cdots}\cdot \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_n\mathrm{d}^4y_{n+1} \qquad (8.63)_1$$

$$\frac{\delta^{n+1}Z}{\delta\xi(x_{n+1})\delta j(x_1)\cdots}$$

$$= \eta_p\int P\cdots \frac{\delta\chi_c(y_j)}{\delta\bar{\xi}(x_j)}\cdots \frac{\delta^2\chi_b(y_i)}{\delta\xi(x_{n+1})\delta\xi(x_i)}\cdots \frac{\delta\chi_a(y_1)}{\delta j(x_1)}$$

$$\cdot \frac{\delta^n\Gamma}{\delta\chi_a(y_1)\cdots\delta\chi_b(y_i)\cdots\delta\chi_c(y_j)\cdots}d^4y_1\cdots d^4y_n \quad + \cdots + (\text{非 } 1PI\text{ 项})$$

$$+ \eta_p\int P\cdots \frac{\delta\chi_c(y_j)}{\delta\bar{\xi}(x_j)}\cdots \frac{\delta\chi_b(y_i)}{\delta\xi(x_i)}\cdots \frac{\delta\chi_a(x_1)}{\delta j(x_1)}\frac{\delta\chi_i(y_{n+1})}{\delta\xi(x_{n+1})}$$

$$\cdot \frac{\delta^{n+1}\Gamma}{\delta\chi_l(y_{n+1})\delta\chi_a(y_1)\cdots\delta\chi_b(y_i)\cdots\delta\chi_c(y_j)\cdots}\cdot \mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_n\mathrm{d}^4y_{n+1} \qquad (8.63)_2$$

1. Z展开中ξ可以与$\bar{\xi}$相伴出现，也可与K相伴出现。$K\neq 0$，所以$(8.63)_2$中$\xi(x_{n+1})$微商后，$j,\xi,\bar{\xi}=0$时，微商结果不为零，见图8.19。另外，如果第$(n+1)$次是对$\bar{\xi}(x_{n+1})$微商，则微商结果在$j,\xi,\bar{\xi}=0$时为零。

2. 此时(a)图已在微商中消去。当$j,\xi,\bar{\xi}=0$：$(8.63)_1$左方只剩下(b)，(d)图和一些没有画出来的$1PI$图，图中去掉$(n+1)$个j,ξ，和$\bar{\xi}$。

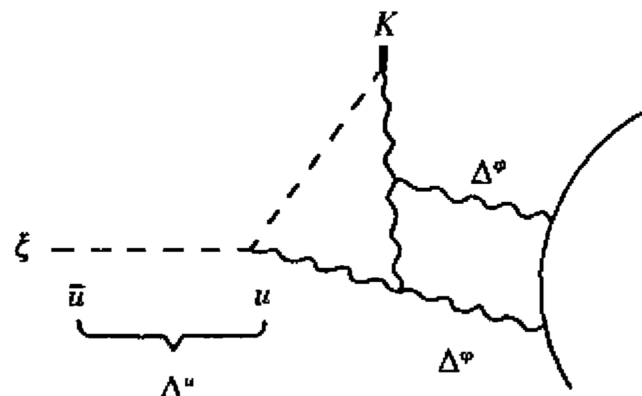


图 8.19

$(8.63)_2$左方只剩下(c)，(e)图和一些没有画出来的$1PI$图，图中去掉$(n+1)$个j,ξ，和$\bar{\xi}$。

再看右边：

$(8.63)_1$右方第一项正好与去掉$(n+1)$个$j,\xi,\bar{\xi}$的(b)相等，非$1PI$图。右方末一项正好与去掉$(n+1)$个$j,\xi,\bar{\xi}$的(d)相等，是$1PI$图。

$(8.63)_2$右方第一项正好与去掉$(n+1)$个$j,\xi,\bar{\xi}$的(c)相等，非$1PI$图。右方末一项正好与去掉$(n+1)$个$j,\xi,\bar{\xi}$的(e)相等，是$1PI$图。

对比之下，$\frac{\delta\chi}{\delta j},\frac{\delta\chi}{\delta\xi},\frac{\delta\chi}{\delta\bar{\xi}}$与各条腿对应，$(8.63)_1$的右方末项中$\Gamma$的$(n+1)$次微商则正好与(d)中的$1PI$部分相等；$(8.63)_2$右方末项中$\Gamma$的$(n+1)$次微商也正好与(e)中的$1PI$部分相等。

从而证明了若$j,\xi,\bar{\xi}=0$而$K,L\neq 0$时，Γ的n次微商为$1PI$图，则Γ的$(n+1)$次微商也是$1PI$图。

然后看Γ的$(n+2)$次微商：这里不必再讨论对φ的微商（因前已讨论过），只需对$\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}}$，$\frac{\delta}{\delta\xi}$成对作用到(8.62)式上去所得结果作些考察。我们有：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta^{n+2}z}{\delta\bar{\xi}(x_{n+2})\delta\xi(x_{n+1})\delta j(x_1)\cdots} \\
&= \eta_p\int P\cdots\frac{\delta\chi_c(y_j)}{\delta\bar{\xi}(x_j)}\cdots\frac{\delta^3\chi_b(y_i)}{\delta\bar{\xi}(x_{n+2})\delta\xi(x_{n+1})\delta\xi(x_i)}\cdots\frac{\delta\chi_a(y_1)}{\delta j(x_1)} \\
&\cdot\frac{\delta^n\Gamma}{\delta\chi_a(y_1)\cdots\delta\chi_b(y_i)\cdots\delta\chi_c(y_j)\cdots}\mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_n+\cdots+(\text{非 }1PI\text{ 项}) \\
&+\eta_p\int P\cdots\frac{\delta\chi_c(y_j)}{\delta\bar{\xi}(x_j)}\cdots\frac{\delta\chi_b(y_i)}{\delta\xi(x_i)}\cdots\frac{\delta\chi_a(y_1)}{\delta j(x_1)}\cdot\frac{\delta\chi_l(y_{n+1})}{\delta\xi(x_{n+1})}\cdot\frac{\delta\chi_m(y_{n+2})}{\delta\bar{\xi}(x_{n+2})} \\
&\cdot\frac{\delta^{n+2}\Gamma}{\delta\chi_m(y_{n+2})\delta\chi_l(y_{n+1})\delta\chi_a(y_1)\cdots\delta\chi_b(y_i)\cdots\delta\chi_c(y_j)\cdots}\mathrm{d}^4y_1\cdots\mathrm{d}^4y_{n+2}
\end{aligned}
\tag{8.64}
$$

1. 此时(a)，(b)，(c)，(d)，(e)等图都已在微商中消去。当$j,\xi,\bar{\xi}=0$，(8.64)左方只剩下(f)，(g)和一些没有画出来的$1PI$图，图中去掉$(n+2)$个j,ξ和$\bar{\xi}$。

2. 再看(8.64)右方，第一项正好和去掉$j,\xi,\bar{\xi}$（共$(n+2)$个）的(f)图相等，不是$1PI$图。末一项正好和去掉$j,\xi,\bar{\xi}$的(g)图相等：(g)有$(n+2)$条腿，而(8.64)的末一项有$(n+2)$个传播子，它们一一对应。所以这一项中的Γ的$(n+2)$次微商应该等于(g)图当中的$(n+2)$个点的格林函数。若(a)图中间的n点格林函数是$1PI$的，则从这个$1PI$图再接出两条腿，就得到(g)，从而(g)当中的$(n+2)$个点的格林函数也是$1PI$图。由此可见，如果Γ的n次微商是$1PI$，则Γ的$(n+1)$次微商和$(n+2)$次微商也是$1PI$。前面已经证明，在有K,L时所有的Γ的2次微商都是$1PI$，所以，在有K,L时，Γ的任意次微商都是$1PI$。

以后我们将在这些具体知识的基础上，用更概括简捷的办法讨论格林函数$1PI$图。

有 K,L 的发散图

把 §5－1 的推导再做一遍，已知(5.5)式：

$$\therefore\qquad D(\Gamma)=\sum_i n_i\left(d_i+b_i+\frac{3}{2}f_i-4\right)-E_B-\frac{3}{2}E_F+4$$

取k_i,l_i为i顶点含K的个数(1或0)和含$\angle$的个数(1或0)，E_K是整个图的K的个数，E_L是整个图的L的个数，则有

$$0=2\sum_i n_ik_i-2E_K\qquad 0=2\sum_i n_il_i-2E_L$$

（这里乘2，因为Γ的量纲为4，K,L的量纲应该为2，δ_i是i顶点的量纲减去4，应该为0）。相加得到：

$$D(\Gamma)=\sum_i n_i\left(d_i+b_i+\frac{3}{2}f_i+2k_i+2l_i-4\right)-E_B-\frac{3}{2}E_F-2E_K-2E_L+4\tag{8.65}$$

于是可重新定义 δ_i：

$$\delta_i = d_i + b_i + \frac{3}{2}f_i + 2k_i + 2l_i - 4$$

在任何顶点 i(包括含有 K,L 的顶点)，量纲都是 4，所以都有

$$\delta_i = 0$$

$$\therefore \qquad D(\Gamma) = -E_B - \frac{3}{2}E_F - 2E_K - 2E_L + 4 \tag{8.65}$$

这里 $D(\Gamma)$ 是任一个连接图 Γ 的表观发散度，对含有 K,L 的图也适用。所以，发散条件是

$$D(\Gamma) = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F - 2E_K - 2E_L \geqslant 0$$

例如图 8.14 下面两个图是发散的：一个是 $E_B = 2$(考虑到 $F-P$ 线是玻色型的)，$E_K = 1$，所以有 $D(\Gamma) = 0$；另一个是 $E_B = 2, E_L = 1$，也是 $D(\Gamma) = 0$。都是对数发散。又例如图 8.20 的两个图是不发散的：一个是 $E_B = 3, E_K = 1, D(\Gamma) = -1$；另一个是 $E_B = 3, E_L = 1$，$D(\Gamma) = -1$。



图 8.20

这里看到，发散图中只能有一个 K 或一个 L。否则，如果有两个 K 或 L，由于自 u 连出来的线不能被一个顶点所挡住，在与 K,L 相连的情况下，又不能成封闭圈，必定要延伸成为外线，所以有 $E_K = 2, E_B \geqslant 2$，或 $E_L = 2$，$E_B \geqslant 2$，于是都是 $D(\Gamma) \leqslant -2$，是不发散的。

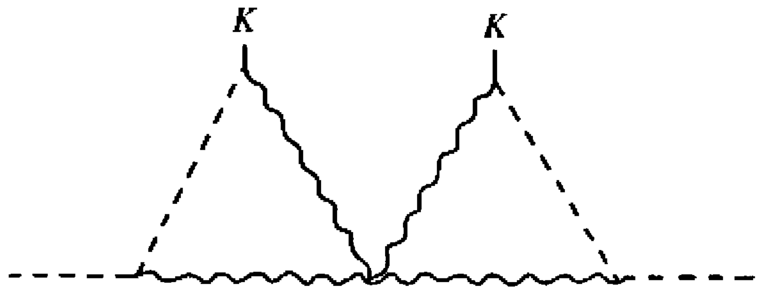


图 8.21

顺便看一下图 8.16(a) 的右边一个图，它的 $D(\Gamma) = -2$，表观不发散。但它有一个发散的子图——玻色子的方框。把这个发散减除后，图的发散性质就和图 8.21 一样了。

小结 为了便于下一步的讨论，再强调一下上面的主要结果。

1. 在树图近似(没有圈)下，$\Gamma_{(0)} = S = S_0^R$。

2. $K,L \neq 0$ 时，有新的传播子：

$$\langle 0 | T\hat{\varphi}_\alpha \hat{\bar{u}}_a | 0\rangle, \langle 0 | T\hat{\bar{u}}_a \hat{\bar{u}}_b | 0\rangle$$

3. $K,L \neq 0$ 时，Γ 中有 u 一次项(见(8.57))。而且由于(8.56)，

$$\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta u_a}\right|_{\substack{\varphi=\alpha \\ u=0,\bar{u}_a=c_a}} = \bar{\xi}_a = 0 \tag{8.66}$$

$$\Gamma = [i\bar{u}_b \Delta'^{u\,-1}_{ba} + (K_i^A - F_i^c \bar{u}_c)(1PI\text{图})_i^a + (K_l^s - c\bar{u}_c)(1PI\text{图})_l^a]u_a + \cdots$$

4. 不管 K,L 是否 $= 0$，都有(参考(8.54))

$$\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L] = \sum_{n=2}^{\infty} C^{\alpha_1\cdots\alpha_n}\Gamma^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_{\alpha_1}-w_{\alpha_1})\cdots(x_{\alpha_n}-w_{\alpha_n}) \tag{8.67}$$

其中

$$\left.\frac{\delta^n \frac{1}{\eta}\Gamma[\varphi,u,\bar{u},K,L]}{\delta x_{\alpha_1}(x_1)\cdots\delta x_{\alpha_n}(x_n)}\right|_{x=\omega} = \frac{1}{\eta}\Gamma^{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x_1,\cdots,x_n) \tag{8.68}$$

都是 $1PI$ 贡献。x 包括 $\varphi,u,\bar{u}$,其中 φ 又包括规范场,Fermi 场,Higgs 场。ω 包括 $v,K_i\Delta_i$ 等。$C^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 是常数,如有 r 个 x(例如 $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha r}$) 是相同的场,则 $C^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 就是$\frac{1}{r!}$。余类推,总之保证(8.68) 右方为$\frac{1}{\eta}$。举一个例子,当 $n=2$ 时有一项是:$x_{\alpha_1}=\bar{u}_b,x_{\alpha_2}=u_a,\Gamma^{\alpha_1\alpha_2}=i\Delta'^{u-1}_{ba},w_{\alpha_1}=e_b,w_{\alpha_2}=0$。这就是(8.66) 写出的一项。

另外,自发破缺时,Γ 中 $\bar{\chi}$ 的一次项是要消去的,见(8.17),故 n 求和从 2 开始。

5. 有的 $\Gamma^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ 含有 K,L,但(8.67) 的发散项中最多只含有一个 K 或一个 L。

由于矩阵元中所有的发散都来自 $1PI$ 图,只要 $1PI$ 图的发散去掉,矩阵元就会收敛,所以我们以下只需讨论 Γ 的去发散的问题,前已说过,Γ 的微商是可以给出一切 $1PI$ 图的。

§8-7　重正化前后定域规范群同构例一——纯规范场

先考察一个只有规范场和 $F-P$ 场的情况。(8.1) 和(8.2) 曾给出重正化到 L 圈的如下的关系(L 圈近似下的 $S^0,A^0\cdots$ 记作 $S_L^0,A_{(L)}^0$,等等):

$$\begin{aligned} S[A_{(L)}^0,u_{(L)}^0,\bar{u}_{(L)}^0,K_{(L)}^0,L_{(L)}^0] &= S_L^0 \\ &= S[A,u,\bar{u},K,L] + \Delta_L S[A,u,\bar{u},K,L] \\ &= S_L^R[A,u,\bar{u},K,L] \end{aligned}$$

要证明的有两点:

1. 可以做到用 $S_L^0 = S+\Delta_L S$ 做出来的 Γ 到 L 圈为止不发散。
2. 重正化前后的规范群同构。

关于第一点,要证明的实质上是,重正化的物理量与裸的物理量之间存在如下的乘法关系:

$$\begin{aligned} A_{\mu(L)}^{i0} &= (Z_3)_L^{1/2}A_\mu^i & K_{a(L)}^0 &= (\tilde{Z}_3)_L^{1/2}K_a \\ u_{a(L)}^0 &= (\tilde{Z}_3)_L^{1/2}u_a & L_{a(L)}^0 &= (Z_3)_L^{1/2}L_a \\ \bar{u}_{a(L)}^0 &= (\tilde{Z}_3)_L^{1/2}\bar{u}_a & \xi_{(L)}^0 &= (Z^3)_L^{-1}\xi \end{aligned}$$

$$g_{(L)}^0 = \frac{(\tilde{Z}_1)_L}{(\tilde{Z}_3)_L(Z_3)_L^{1/2}}g \qquad \left(\alpha=\frac{1}{\xi}\right) \tag{8.69}$$

而且用这些 Z 写出 $S_L^0=\Delta_L S+S$,求得的 $\Gamma(S_L^0)$ 一直到 L 圈为止都是不发散的。为了进行这项证明,我们把 Γ 按圈数展开(i 代表 i 圈图的贡献):

$$\Gamma = \sum_{i=0}^{\infty}\eta^i\Gamma(i) \tag{8.70}$$

前已知 $\Gamma(0) = S$($i=0$ 是树图近似)，η 的意义见(8.4)。

以下的做法是先作(8.69)的交换，并补充 $j_\alpha, \xi_\alpha, \bar{\xi}_\alpha$ 的变换如下：

$$j^0_{\alpha(L)} = (Z_3)_L^{-1/2} j_\alpha, \xi^0_{\alpha(L)} = (\tilde{Z}_3)_L^{-1/2}\xi_\alpha, \bar{\xi}^0_{\alpha(L)} = (\bar{Z}_3)_L^{-1/2}\bar{\xi}_\alpha \tag{8.71}$$

然后用归纳法：假设已找到了 $(Z_3)_n, (\tilde{Z}_3)_n, \cdots$，使得用 $S^0_n = \Delta_n S + S$ 微扰做出的 $\Gamma(S^0_n)$(定义见下面)一直到 n 圈近似为止，都是不发散的。再在此前提下求证可以找到 $(Z_3)_{n+1}, (\tilde{Z}_3)_{n+1}, \cdots$，使得用 $S^0_{n+1} = \Delta_{n+1}S + S$ 微扰做出的 $\Gamma(S^0_{n+1})$ 一直到 $(n+1)$ 圈近似为止，也都是不发散的。

证明从 W 和 Z 入手，取

$$\begin{aligned} W[j^0_{(n)}, \xi^0_{(n)}, \bar{\xi}^0_{(n)}, K^0_{(n)} L^0_{(n)}] &= \int d(A^0_{(n)}) d(u^0_{(n)}) d(\bar{u}^0_{(n)}) \exp i(S[A^0_{(n)}, u^0_{(n)}, \bar{u}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}] \\ &\quad + A^0_{(n)} j^0_{(n)} + \bar{\xi}^0_{(n)} u^0_{(n)} + \bar{u}^0_{(n)} \xi^0_{(n)}) \end{aligned} \tag{8.72}$$

$$W_n[j, \xi, \bar{\xi}, K, L] = \int d(A) d(u) d(\bar{u}) \exp i[S^R_L[A, u, \bar{u}, K, L] + Aj + \bar{\xi}u + \bar{u}\xi] \tag{8.73}$$

在 $S^R_n[A, u, \bar{u}, K, L]$ 中有 Z 出现，例如见(5.130)，(5.131)，(5.135)，(5.136)。由于 S^R_l 的定义(8.1)，有

$$S[A^0_{(n)}, u^0_{(n)}, \bar{u}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}] = S^R_n[A, u, \bar{u}, K, L]$$

再利用(8.69)，(8.71)，得到

$$\begin{aligned} S[A^0_{(n)}, u^0_{(n)}, \bar{u}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}] + A^0_{\alpha(n)} j^0_{\alpha(n)} + \bar{\xi}^0_{\alpha(n)} u^0_{\alpha(n)} + \bar{u}^0_{\alpha(n)} \xi^0_{\alpha(n)} \\ = S^R_n[A, u, \bar{u}, K, L] + A_\alpha j_\alpha + \bar{\xi}_\alpha u_\alpha + \bar{u}_\alpha \xi_\alpha \end{aligned}$$

还有

$$d(A^0_{(n)}) = (Z_3)^{1/2}_n d(A), \quad d(u^0_{(n)}) = (\tilde{Z}_3)^{1/2}_n d(u), d(\bar{u}^0_{(n)}) = (\tilde{Z})^{1/2}_n d(\bar{u})$$

于是(8.72)与(8.73)只差一个常数倍数。但我们早就知道，W 中的常数倍数是不起作用的，可以略去。因此可以写出：

$$W_n[j, \xi, \bar{\xi}, K, L] = W[j^0_{(n)}, \xi^0_{(n)}, \bar{\xi}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}] \tag{8.74}$$

定义：

$$Z[j^0_{(n)}, \xi^0_{(n)}, \bar{\xi}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}] = \frac{1}{i} \ln W[j^0_{(n)}, \xi^0_{(n)}, \bar{\xi}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}]$$

$$Z_n[j, \xi, \bar{\xi}, K, L] = \frac{1}{i} \ln W_n[j, \xi, \bar{\xi}, K, L] \tag{8.75}$$

则又有(只差一个不起作用的常数)

$$Z_n[j, \xi, \bar{\xi}, K, L] = Z[j^0_{(n)}, \xi^0_{(n)}, \bar{\xi}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}] \tag{8.76}$$

定义(只差一个不起作用的常数)：

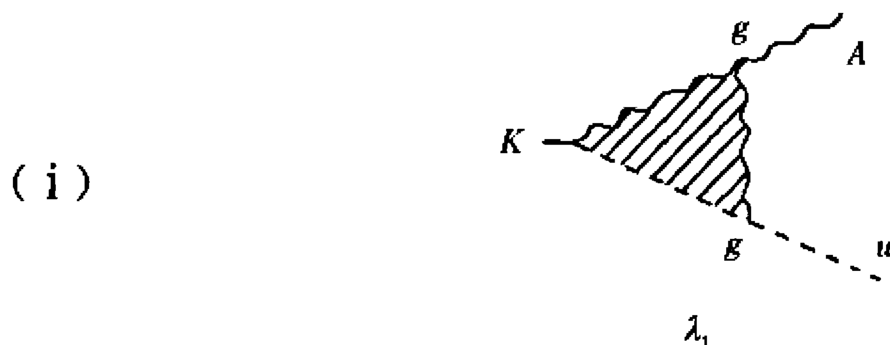
$$\begin{aligned} \Gamma[A^0_{(n)}, u^0_{(n)}, \bar{u}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}] &= Z[j^0_{(n)}, \xi^0_{(n)}, \bar{\xi}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}] \\ &\quad + A^0_{\alpha(n)} j^0_{\alpha(n)} + \bar{\xi}^0_{\alpha(n)} u^0_{\alpha(n)} + \bar{u}^0_{\alpha(n)} \xi^0_{\alpha(n)} \\ \Gamma_n[A, u, \bar{n}, K, L] &= Z_n[j, \xi, \bar{\xi}, K, L] + A_\alpha j_\alpha + \bar{\xi}_\alpha u_\alpha + \bar{u}_\alpha \xi_\alpha \\ &= \Gamma(S^0_n) \end{aligned} \tag{8.77}$$

$$\therefore \quad \Gamma[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}] = \Gamma_n[A,u,\bar{u},K,L] = \Gamma(S^0_n) \tag{8.78}$$

这里的 $\Gamma[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]$ 是 $A^0_{(n)},u^0_{(n)}\cdots$ 的泛函（耦合常数 $g^0_{(n)}$），给出的 $1PI$ 有发散。同时，$\Gamma_n[A,u,\bar{u},K,L] = \Gamma(S^0_n)$ 是 $A,u,\cdots$ 的泛函（耦合常数 g）。按照归纳法的假设，取了适当的 $\Delta_n S$（即取了适当的 $(Z)_n$）和适当的 $g^0_{(n)}$ 与 g 的关系，就可吸收所有的到 n 圈为止的发散到 $(Z)_n$ 中，与 $g^0_{(n)}$ 结合成为物理的 g，从而使 $\Gamma(S^0_n)$ 给出的 $1PI$ 到 n 圈为止无发散。关于这一点，第五章曾有一些例子，这里我们再补充一些例子。

1. 有关 K,L 的 $1PI$ 的两种写法之间的关系 $\left(g_F = g, \dfrac{g_0}{g} = \dfrac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}} = \dfrac{Z_1}{Z_3^{3/2}}\right)$:

（i）



λ_1

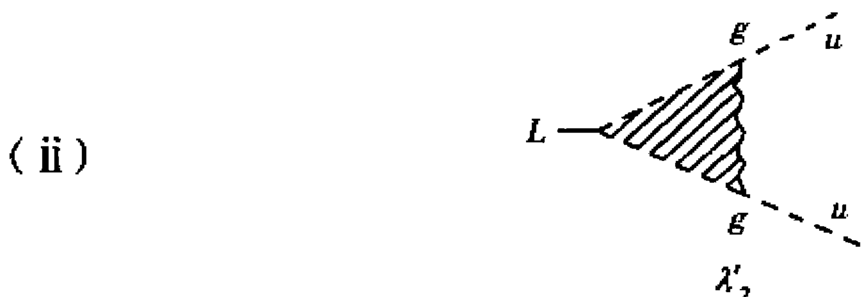
三个顶点，缺一条 A 线，一条 n 线，一条 $\bar{u}$ 线，一个 g，所以

$$(\tilde{Z}_3)^{-1/2}(\tilde{Z}_3)^{-1/2}(Z_3)^{-1/2}g\lambda_1^{重正'} = g_0\lambda_1' \longrightarrow \lambda_1^{重正'} = \tilde{Z}_1\lambda_1'$$

$$\underline{\gamma}_1 = \tilde{Z}_1 g + g\lambda_1^{重正'} = \tilde{Z}_1 g + \tilde{Z}_1 g\lambda_1'$$

$$\gamma_1 = g_0 + g_0\lambda_1' \longrightarrow \frac{1}{g}\underline{\gamma}_1 = \tilde{Z}_1\frac{1}{g_0}\gamma_1$$

（ii）



λ_2'

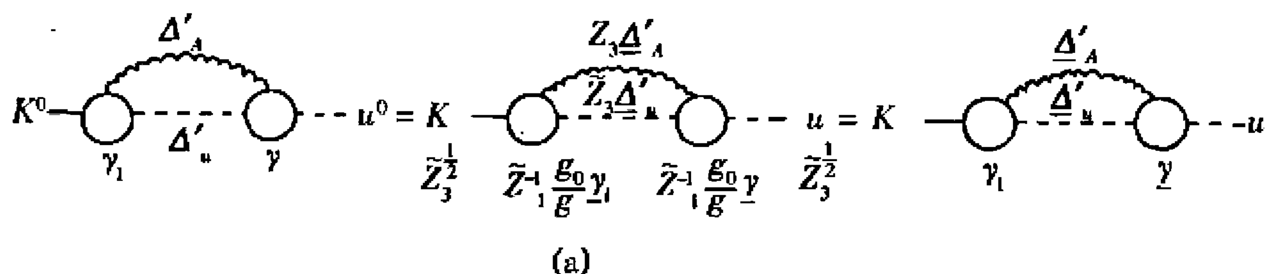
三个顶点，缺一条 A 线，两条 u 线，一个 g，所以

$$(\tilde{Z}_3)^{-1/2}(\tilde{Z}_3)^{-1/2}(Z_3)^{-1/2}g\lambda_2^{重正'} = g_0\lambda_2' \longrightarrow \lambda_2^{重正'} = \tilde{Z}_1\lambda_2^1$$

$$\therefore \quad 和（i）一样得到 \frac{1}{g}\underline{\gamma}_2 = \tilde{Z}_1\frac{1}{g_0}\gamma_2$$

2. 有关 K,L 的几个重正化图:

（i）Ku 项:



(a)

图 8.22(a)

(ⅱ)KAu 项：

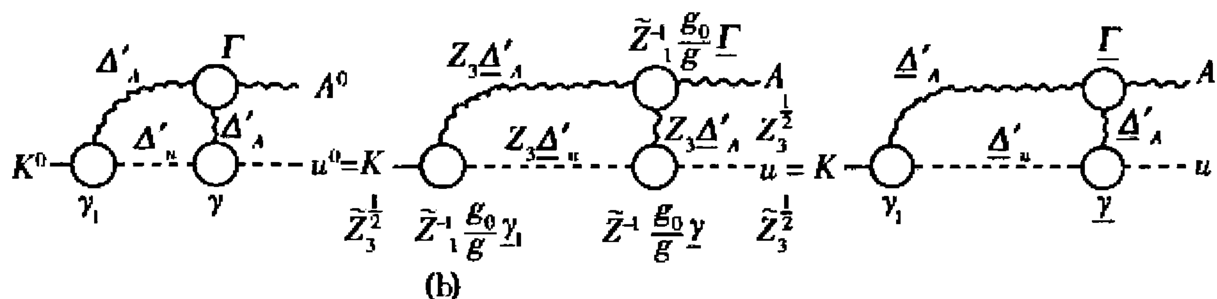


图 8.22(b)

(ⅲ)Luu 项：

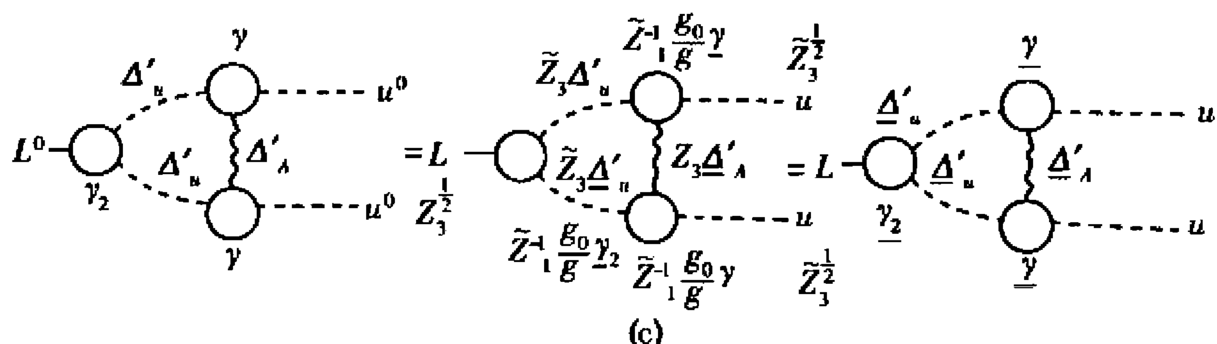


图 8.22(c)

此外那些不含 K,L 的重正化图已在第五章中讨论过。

图8.22的(a),(b),(c)等图的靠左边的图形都是用裸的一套算出来的$1PI$。传播子、顶角函数都是发散的。靠右边的图形都是用$\Delta_n S+S$的一套算出来的。传播子、顶角函数都是不发散的。不过,右方1PI图还有骨架发散。n 圈图的骨架发散由于 $\Delta_n S$ 抵消项的贡献而消去。

在回到(8.72)～(8.78)之前,再补充一些说明。我们定义经典场 $A^0_{\alpha(n)},\bar{u}^0_{a(n)}$, $u^0_{a(n)}$(作为$j_{(n)},\bar{\xi}^0_{(n)},\xi^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}$ 的泛函):

$$\frac{\delta Z[j^0_{(n)},\xi^0_{(n)},\bar{\xi}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta j^0_{\alpha(n)}}=A^0_{\alpha(n)}$$

$$\frac{\delta Z[j^0_{(n)},\xi^0_{(n)},\bar{\xi}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta \xi^0_{a(n)}}=-\bar{u}^0_{a(n)}$$

$$\frac{\delta Z[j^0_{(n)},\xi^0_{(n)},\bar{\xi}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta \bar{\xi}^0_{a(n)}}=u^0_{a(n)} \tag{8.79}$$

再定义经典场$A_\alpha,\bar{u}_a,u_a$(作为$j,\xi,\bar{\xi},K,L$的泛函):

$$\frac{\delta Z_n[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta j_\alpha}=A_\alpha$$

$$\frac{\delta Z_n[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta \xi_a}=-\bar{u}_a$$

$$\frac{\delta Z_n[j,\xi,\bar{\xi},K,L]}{\delta \bar{\xi}_a}=u_a \tag{8.80}$$

由于$j,\xi,\bar{\xi}$的变换关系(8.71)和(8.76),立刻看到$A_\alpha,u_a,\bar{u}_a$与$A^0_{\alpha(n)},u^0_{a(n)},\bar{u}^0_{a(n)}$之间存在

着(8.69)的变换关系。另外,自(8.79)和(8.77)有

$$\frac{\delta\Gamma[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta A^0_{\alpha(n)}} = -j^0_{\alpha(n)}$$

$$\frac{\delta\Gamma[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta u^0_{a(n)}} = \bar{\xi}^0_{a(n)}$$

$$\frac{\delta\Gamma[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta \bar{u}^0_{a(n)}} = -\xi^0_{a(n)} \tag{8.81}$$

自(8.80)与(8.77)又有

$$\frac{\delta\Gamma(S^0_n)}{\delta A_\alpha} = -j_\alpha, \frac{\delta\Gamma(S^0_n)}{\delta u_a} = \bar{\xi}_a, \frac{\delta\Gamma(S^0_n)}{\delta \bar{u}_a} = -\xi_a \tag{8.82}$$

(8.81)与(8.82)符合(8.71)的关系,也是自洽的。

还要说明一下,规范确定项在重正化前后是不变的。例如取 ξ 规范在(8.69)变换下:

$$\frac{1}{2}\xi(C^a[A])^2 = \frac{1}{2}\xi(\partial_\mu A_\mu)^2 = \frac{1}{2}(Z_3)_n\xi^0_{(n)}\cdot(Z_3)^{-1}_n(\partial_\mu A^0_{\mu(n)})^2$$

$$= \frac{1}{2}\xi^0_{(n)}(\partial_\mu A^0_{\mu(n)})^2 = \frac{1}{2}\xi^0_{(n)}(C^a[A^0_{(n)}])^2 \tag{8.83}$$

我们将看到,选择(8.69)的变换时,保证规范确定项不变是很必要的,这样才能保证找到合适的$(Z)_{n+1}$,使得用$S^0_{n+1} = \Delta_{n+1}S + S$微扰做出的$\Gamma(S^0_{n+1})$一直到$(n+1)$圈为止,都是不发散的。从后面的举例还将看到,对于更复杂的规范确定项,在选取(8.69)一类的变换时,也要注意重正化前后规范确定项不变,以便找到合适的$(Z)_{n+1}$。

规范确定项的不变,事实上和规范场的性质有关。例如在第五章(5.57)就已看到,与A_α有关的抵消项是(自由拉氏量部分)

$$\sim -(Z_3-1)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right)$$

这就是说,只有横波部分有辐射修正,纵波部分没有。而在原先的$\mathscr{L}$中,与A_μ有关的项(自由拉氏量部分)是(见(5.67),加上了ξ规范的规范确定项):

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2$$

两者加起来一点也不改变ξ规范的规范确定项,而且由

$$-\frac{1}{2}Z_3\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A^0_\mu(x)}{\partial x_\nu}\frac{\partial A^0_\mu(x)}{\partial x_\nu} - \left(\frac{\partial A^0_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\xi^0\left(\frac{\partial A^0_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2$$

可得到

$$\frac{1}{2}\xi\left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2 = \frac{1}{2}\xi^0\left(\frac{\partial A^0_\mu(x)}{\partial x_\mu}\right)^2 \longrightarrow \xi = Z_3\xi^0$$

正如(5.88)所看到的,取了$\xi = Z_3\xi^0$,则整个的$\underline{D}'_{F\mu\nu}$与整个的$D'_{F\mu\nu}$都有如下关系:

$$\underline{D}'_{F\mu\nu} = \frac{1}{Z_3}D'_{F\mu\nu}$$

"整个"是指包括横波部分与纵波部分。

另外,规范场粒子通过 Higgs 机制获得静止质量时,也不改变规范确定项(有 Higgs 机制时的重正化将在下一章讨论)。

现在让我们回到(8.77)和(8.78),定义:

$$\tilde{\Gamma}[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}] = \Gamma[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}] - \frac{\xi^0}{2}(c^a[A^\circ])^2;$$

$$\tilde{\Gamma}(S^0_n) = \Gamma(S^0_n) - \frac{\xi}{2}(C^a[A])^2 \tag{8.84}$$

由于规范确定项不改变(见(8.83)和上面的讨论),得到

$$\tilde{\Gamma}(S^0_n) = \tilde{\Gamma}[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]。 \tag{8.85}$$

从第四章已知,$S[A,u,\bar{u},K,L]$ 在如下 B. R. S. 变换下是不变的:

$$\begin{aligned}\delta A_\alpha &= (\Delta^a_\alpha + g t^a_{\alpha\beta} A_\beta) u_a \delta\lambda\\ \delta u_a &= -\frac{g}{2} f_{abc} u_b u_c \delta\lambda\\ \delta \bar{u}_a &= \xi F^a_\alpha A_\alpha \delta\lambda\end{aligned} \tag{8.86}$$

从而有 Slavnov 恒等式:

$$\begin{aligned}&\frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_\alpha}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta A_\alpha} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta u_a} = 0\\ &-F^a_\alpha \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_\alpha} - \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \bar{u}_\alpha} = 0\end{aligned} \tag{8.87}$$

$(S = S[A,u,\bar{u},K,L])$。按照(8.69)的变换,又知道 $S[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]$ 在如下的 B. R. S 变换下是不变的(因为 $S[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]$ 就是把 $S[A,u,\bar{u},K,L]$ 中的 A, $g\cdots$ 换成 $A^0_{(n)},g^0_{(n)}\cdots$):

$$\begin{aligned}\delta A^0_{\alpha(n)} &= (\Delta^a_\alpha + g^0_{(n)} t^a_{\alpha\beta} A^0_{\beta(n)}) u^0_{a(n)} \delta\lambda^0\\ \delta u^0_{a(n)} &= -\frac{g^0_{(n)}}{2} f_{abc} u^0_{b(n)} u^0_{c(n)} \delta\lambda^0\\ \delta \bar{u}^0_{a(n)} &= \xi^0_{(n)} F^a_\alpha A^0_{\alpha(n)} \delta\lambda^0\end{aligned} \tag{8.86}$$

从而有 Slavnov 恒等式(与第四章讨论一样):

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta K^0_{\alpha(n)}} \cdot \frac{\delta \tilde{\Gamma}[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta A^0_{\alpha(n)}}$$

$$+ \frac{\delta \tilde{\Gamma}[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta L^0_{a(n)}} \cdot \frac{S \tilde{\Gamma}[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta u^0_{a(n)}} = 0$$

$$-F^a_\alpha \frac{\delta \tilde{\Gamma}[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta K^0_{\alpha(n)}} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}[A^0_{(n)},u^0_{(n)},\bar{u}^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]}{\delta \bar{u}^0_{a(n)}} = 0 \tag{8.87}$$

由于(8.85)和(8.69),恒等式(8.87)就写成 $\tilde{\Gamma}(S^0_n)$ 所满足的方程:

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta K_\alpha} \cdot \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta A_\alpha} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta L_a} \cdot \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta u_a} = 0$$

$$-F_\alpha^a \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S_n^0)}{\delta K_\alpha} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S_n^0)}{\delta \bar{u}_a} = 0 \tag{8.88}$$

把(8.73)中的 S_L^R 换成$\frac{1}{\eta}S_L^R$,则求得的 $\tilde{\Gamma}(S_n^0)$ 又是(8.70)的展开形式:

$$\tilde{\Gamma}(S_n^0) = \sum_{i=0}^{\infty} \eta^i \tilde{\Gamma}_{(i)}(S_n^0) \tag{8.89}$$

$$(\text{其中 } \tilde{\Gamma}_{(0)}(S_n^0) = \tilde{S})$$

i 代表圈数。$\tilde{\Gamma}_{(i)}(S_n^0)$ 按归纳法假设,从 $i = 0$ 到 $i = n$ 都不发散,但 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(S_n^0)$ 则是发散的。于是问题又归纳为如何找到$(Z)_{(n+1)}$,使得 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(S_{n+1}^0)$ 也不发散。

我们先要找 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)$(即 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(S_n^0)$ 中的极点项部分)的普遍形式。

把(8.88)简写成如下形式:

$$\tilde{\Gamma}(S_n^0) * \tilde{\Gamma}(S_n^0) = 0$$

$$-F_\alpha^a \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S_n^0)}{\delta K_\alpha} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S_n^0)}{\delta \bar{u}_a} = 0 \tag{8.90}$$

把(8.89)代入,η 幂次为 $n+1$ 的展开项开始有发散,而且(8.90)中的 η^{n+1} 项应为零(η 的每个幂次的系数都为零),它的发散部分(极点部分)也是零(发散项与发散项抵消),就得到 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)$ 所满足的方程如下:

$$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) * \tilde{S} + \tilde{S} * \tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) = 0$$

$$-F_\alpha^a \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)}{\delta K_\alpha} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)}{\delta u_a} = 0 \tag{8.91}$$

$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)$ 要满足一些条件,包括定域性,一个项只能含有一个 K 或一个 L,$F-P$ 荷为零,是 $A,u,\bar{u},K,L$ 的多项式,等等。$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)$ 的普遍形式必须是满足这些条件的(8.91)的解。

因此,必须找(8.91)的普遍解,我们引入算子

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 + \mathscr{G}_1$$

$$\mathscr{G}_0 = \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_\alpha}\frac{\delta}{\delta A_\alpha} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta}{\delta u_a} = (\Delta_\alpha^a + g t_{\alpha\beta}^a A_\beta) u_a \frac{\delta}{\delta A_\alpha} + \frac{g}{2} f_{abc} u_b u_c \frac{\delta}{\delta u_a}$$

$$\mathscr{G}_1 = \frac{\delta \tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta}{\delta K_\alpha} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta}{\delta L_a} \tag{8.92}$$

它们有这样一些性质

1. $\mathscr{G}_0 \cdot \mathscr{G}_0 = 0$

证明[①]：$\mathscr{G}_0\cdot\mathscr{G}_0=$ （注意反对易出(－)号）

$$=(\Delta_\alpha^c+gt_{\alpha\beta}^cA_\beta)u_c\left[\left(\frac{\delta}{\delta A_\alpha}(\Delta_\gamma^d+gt_{\gamma\delta}^dA_\delta)u_d\right)\frac{\delta}{\delta A_\gamma}+(\Delta_\gamma^d+gt_{\gamma\delta}^dA_\delta)u_d\frac{\delta^2}{\delta A_\alpha\delta A_\gamma}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\delta}{\delta A_\alpha}\left(\frac{g}{2}f_{abc}u_bu_c\right)\right)\frac{\delta}{\delta u_a}+\frac{g}{2}f_{abc}u_bu_c\frac{\delta^2}{\delta A_\alpha\delta u_a}\right]$$

$$+\frac{g}{2}f_{abc}u_bu_c\left[\left(\frac{\delta}{\delta u_a}(\Delta_\alpha^c+gt_{\alpha\beta}^cA_\beta)u_c\right)\frac{\delta}{\delta A_\alpha}-(\Delta_\alpha^c+gt_{\alpha\beta}^cA_\beta)u_c\frac{\delta^2}{\delta u_a\delta A_\alpha}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\delta}{\delta u_a}\frac{g}{2}f_{def}u_eu_f\right)\frac{\delta}{\delta u_d}+\frac{g}{2}f_{def}u_eu_f\frac{\delta^2}{\delta u_a\delta u_d}\right]$$

自第1、5两项：

$$\left[(\Delta_\alpha^c+gt_{\alpha\beta}^cA_\beta)u_cgt_{\gamma\alpha}^du_d+\frac{g}{2}f_{abc}u_bu_c(\Delta_\gamma^a+gt_{\gamma\beta}^aA_\beta)\right]\frac{\delta}{\delta A_\gamma}$$

$$=\left[\frac{g}{2}(t_{\gamma\alpha}^d\Delta_\alpha^c-t_{\gamma\alpha}^c\Delta_\alpha^d)u_cu_d+\frac{g^2}{2}(t_{\gamma\alpha}^dt_{\alpha\beta}^c-t_{\gamma\alpha}^ct_{\alpha\beta}^d)A_\beta u_cu_d\right.$$

$$\left.+\frac{g}{2}f_{abc}(\Delta_\gamma^a+gt_{\gamma\beta}^aA_\beta)u_bu_c\right]\frac{\delta}{\delta A_\gamma}=0\quad(\text{自}(2.45),(2.46))$$

第3项 $=0$

第7项： $f_{abc}u_bu_cf_{dea}u_e=f_{abc}f_{dea}u_bu_cu_e=0$ （Jacobi 恒等式）

第4、6两项：正好正负相抵消

第2项：$(\Delta_\alpha^c+gt_{\alpha\beta}^cA_\beta)u_c(\Delta_\gamma^d+gt_{\gamma\delta}^dA_\delta)u_d\dfrac{\delta^2}{\delta A_\alpha\delta A_\gamma}$

$$=(\Delta_\gamma^d+gt_{\gamma\delta}^dA_\delta)u_d(\Delta_\alpha^c+gt_{\alpha\beta}^cA_\beta)u_c\frac{\delta^2}{\delta A_\gamma\delta A_\alpha}\quad(\text{指标对换})$$

$$=-(\Delta_\alpha^c+gt_{\alpha\beta}^cA_\beta)u_c(\Delta_\gamma^d+gt_{\gamma\delta}^dA_\delta)u_d\frac{\delta^2}{\delta A_\alpha\delta A_\gamma}=0\quad(\text{反对易})$$

第8项：$f_{abc}u_bu_cf_{def}u_eu_f\dfrac{\delta^2}{\delta u_a\delta u_d}=f_{def}u_eu_ff_{abc}u_bu_c\dfrac{\delta^2}{\delta u_d\delta u_a}$ （指标对换）

$$=-f_{abc}u_bu_cf_{def}u_eu_f\frac{\delta^2}{\delta u_a\delta u_d}=0\quad(\text{反对易})$$

2. $\mathscr{G}_0\cdot\mathscr{G}_1+\mathscr{G}_1\cdot\mathscr{G}_0=-\left(\dfrac{\delta\mathscr{G}_0}{\delta A_\alpha}\tilde{S}\right)\dfrac{\delta}{\delta K_\alpha}+\left(\dfrac{\delta\mathscr{G}_0}{\delta u_a}\tilde{S}\right)\dfrac{\delta}{\delta L_a}$

证明：$\mathscr{G}_0\cdot\mathscr{G}_1+\mathscr{G}_1\cdot\mathscr{G}_0=$

$$=\left[\mathscr{G}_0\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta}{\delta K_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\cdot\frac{\delta}{\delta K_\alpha}\cdot\mathscr{G}_0\right]+\left[\mathscr{G}_0\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\cdot\frac{\delta}{\delta L_a}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\cdot\frac{\delta}{\delta L_a}\mathscr{G}_0\right]$$

$$=\left[\mathscr{G}_0\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta}{\delta K_\alpha}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\mathscr{G}_0\frac{\delta}{\delta K_\alpha}\right]+\left[\mathscr{G}_0\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\cdot\frac{\delta}{\delta L_a}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\mathscr{G}_0\frac{\delta}{\delta L_a}\right]$$

$$=\left[\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\beta}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta A_\beta\delta A_\alpha}\cdot\frac{\delta}{\delta K_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\beta}\frac{S\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\cdot\frac{\delta^2}{\delta A_\beta\delta K_\alpha}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\cdot\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\beta}\frac{\delta^2}{\delta A_\beta\delta K_\alpha}\right]$$

---

① 附录二有更简捷的证明。

$$+\left[\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\beta}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta A_\beta\delta u_a}\frac{\delta}{\delta L_a}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\alpha}\frac{\delta^2}{\delta A_\alpha\delta L_a}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\cdot\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\alpha}\cdot\frac{\delta^2}{\delta A_\alpha\delta L_a}\right]$$

$$+\left[\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta u_a\delta A_\alpha}\cdot\frac{\delta}{\delta K_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta^2}{\delta u_a\delta K_\alpha}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta^2}{\delta u_a\delta K_\alpha}\right]$$

$$+\left[\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a\delta u_b}\frac{\delta}{\delta L_b}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_b}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta^2}{\delta u_a\delta L_b}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_b}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta^2}{\delta u_a\delta L_b}\right]$$

$$=\left(\mathscr{G}_0\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\right)\frac{\delta}{\delta K_\alpha}+\left(\mathscr{G}_0\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\right)\frac{\delta}{\delta L_a}=-\left(\frac{\delta\mathscr{G}_0}{\delta A_\alpha}\tilde{S}\right)\frac{\delta}{\delta K_\alpha}+\left(\frac{\delta\mathscr{G}_0}{\delta u_a}\tilde{S}\right)\frac{\delta}{\delta L_a}$$

$$\left(\text{利用 }\mathscr{G}_0\tilde{S}=0\rightarrow\frac{\delta}{\delta A_\alpha}(\mathscr{G}_0\tilde{S})=0,\frac{\delta}{\delta u_a}(\mathscr{G}_0\tilde{S})=0\right)$$

3. $\mathscr{G}_1^2=\left(\frac{\delta\mathscr{G}_0}{\delta A_\alpha}\tilde{S}\right)\frac{\delta}{\delta K_\alpha}-\left(\frac{\delta\mathscr{G}_0}{\delta u_a}\tilde{S}\right)\frac{\delta}{\delta L_a}$

证明：

$$\mathscr{G}_1^2=\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta K_\alpha\delta A_\beta}\frac{\delta}{\delta K_\beta}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\beta}\frac{\delta^2}{\delta K_\alpha\delta K_\beta}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta K_\alpha\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}$$

$$-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta^2}{\delta K_\alpha\delta L_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta L_a\delta A_\alpha}\frac{\delta}{\delta K_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta^2}{\delta L_a\delta K_\alpha}$$

$$+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta L_a\delta u_b}\frac{\delta}{\delta L_b}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_b}\frac{\delta^2}{\delta L_a\delta L_b}$$

$$=\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta K_\alpha\delta A_\beta}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta L_\alpha\delta A_B}\right)\frac{\delta}{\delta K_\beta}+\left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta K_\alpha\delta u_a}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_b}\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta L_b\delta u_a}\right)\frac{\delta}{\delta L_a}$$

$$=\left(\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta A_\beta\delta K_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}+\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta A_\beta\delta L_a}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\right)\frac{\delta}{\delta K_\beta}-\left(\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta u_a\delta K_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}+\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta u_a\delta L_b}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_b}\right)\frac{\delta}{\delta L_a}$$

$$=\left(\frac{\delta\mathscr{G}_0}{\delta A_\beta}\tilde{S}\right)\frac{\delta}{\delta K_\beta}-\left(\frac{\delta\mathscr{G}_0}{\delta u_a}\tilde{S}\right)\frac{\delta}{\delta L_a}$$

$$\therefore\qquad \mathscr{G}_0\cdot\mathscr{G}_1+\mathscr{G}_1\cdot\mathscr{G}_0+\mathscr{G}_1\cdot\mathscr{G}_1=0$$

$$(\mathscr{G}_0+\mathscr{G}_1)(\mathscr{G}_0+\mathscr{G}_1)=\mathscr{G}\cdot\mathscr{G}=0 \tag{8.93}$$

于是 $\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)$ 满足的(8.91)的第一个方程式写成：

$$\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)}{\delta K_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)}{\delta L_a}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\alpha}\frac{\delta\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)}{\delta A_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta^2\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)}{\delta u_a}$$

$$=\mathscr{G}_1\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)+\mathscr{G}_0\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)$$

$$=\mathscr{G}\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)=0 \tag{8.94}$$

任取一个泛函 $\mathscr{F}[A,u,\bar{u},K,L]$，由于 $\mathscr{G}\cdot\mathscr{G}=0$，必定有

$$\mathscr{G}(\mathscr{G}\mathscr{F})=0 \tag{8.95}$$

可见 $\mathscr{G}\mathscr{F}$是(8.94)(或(8.91)第一方程)的一个解。

另外，设有一个泛函 $G[A]$，它仅仅是 A 的泛函，不含有 $u,\bar{u},K,L$，则

$$\mathscr{S}G[A] = \frac{\delta G[A]}{\delta A_\alpha}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_\alpha} = \frac{\delta G[A]}{\delta A_\alpha}(\Delta_\alpha^a + g t_{\alpha\beta}^a A_\beta) u_a$$

只要 $G[A]$ 在与 S 有关系的规范变换下不变，即

$$\frac{\delta G[A]}{\delta A_\alpha}(\Delta_\alpha^a + g t_{\alpha\beta}^a A_\beta) = 0,$$

则 $G[A]$ 就也是(8.94)(或(8.91)第一方程)的一个解。总之，

$$G[A] + \mathscr{S}\mathscr{F}[A, u, \bar{u}, K, L]$$

是(8.91)联立方程的解。而且还可证明，是普遍性的解①。所以，初步可以写

$$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) = G[A] + \mathscr{S}\mathscr{F}[A, u, \bar{u}, K, L]。\tag{8.96}$$

然后，还要求满足(8.91)第二方程，立刻可得到

$$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) = G[A] + \mathscr{S}\mathscr{F}[A, u, 0, K_\alpha - F_\alpha^a \bar{u}_a, L] \tag{8.97}$$

前已知道，$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)$ 中(即发散项中)只含有 K 的一次项和 L 的一次项。又 $\tilde{S}$ 的每一项的 $F-P$ 荷都是0，所以算出来的 $\tilde{\Gamma}$ 的每一项的 $F-P$ 荷也是0。根据第五章关于 $F-P$ 荷的规定，$\mathscr{S}$的 $F-P$ 荷是 +1，所以(8.97)中的$\mathscr{F}$的 $F-P$ 荷是 -1，故$\mathscr{F}[A, u, 0, K_\alpha - F_\alpha^a \bar{u}_a, L]$ 必须取如下形式：

$$\mathscr{F}[A, u, 0, K_\alpha - F_\alpha^a \bar{u}_a, L] = -\beta(\epsilon)(K_\alpha - F_\alpha^a \bar{u}_a) A_\alpha + \nu(\epsilon) L_a u_a$$

所以(8.96)的 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)$ 的普遍形式是：

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) = {} & \alpha(\epsilon) L_{\text{inv}}[A] + \\ & + \mathscr{S}\{-\beta(\epsilon)(K_\alpha - F_\alpha^a \bar{u}_a) A_\alpha + \nu(\epsilon) L_a u_a\}\end{aligned} \tag{8.98}$$

$\epsilon = n - 4$。$\alpha(\epsilon)$，$\beta(\epsilon)$，$\nu(\epsilon)$ 都是 $\frac{1}{n-4}$ 的多项式，代表在维数正常化中出现的发散项。这里把 $G[A]$ 取做 $L_{\text{inv}}[A]$ 是因为 $L_{\text{inv}}[A]$ 是唯一满足有关规范不变性的、维数为4的、各顶点 $\delta_i = 0$ 的定域泛函②。由于 $\tilde{\Gamma}$ 中所有的指标都收缩掉，所以 $\alpha(\epsilon)$，$\beta(\epsilon)$，$\gamma(\epsilon)$ 中都没有 $\alpha, \beta, \cdots, a, b \cdots$ 等指标。再把(8.98)各项整理一下。由于

$$\tilde{S}[A, u, \bar{u}, K, L] = L_{\text{inv}}[A] + (K_\alpha - F_\alpha^a \bar{u}_a)(\Delta_\alpha^a + g t_{\alpha\beta}^a A_\beta) u_a + \frac{g}{2} L_a f_{abc} u_b u_c$$

所以：

$$\begin{aligned}\alpha(\epsilon) L_{\text{inv}} &= \alpha(\epsilon)\left\{\frac{A_\alpha}{2}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta A_\alpha} - \frac{g}{2}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial g} + \frac{g}{4} L_a f_{abc} u_b u_c\right\} \\ &= \alpha(\epsilon)\left\{\frac{A_\alpha}{2}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta A_\alpha} - \frac{g}{2}\frac{\partial \tilde{S}}{\partial g} + \frac{L_a}{2}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta L_a}\right\}\end{aligned}$$

说明一下：

---

① 见附录二。

② 因为其中只有 $x_\alpha - x_\beta$ 的 δ 函数及其微商，不出现区域分布函数。

$$L_{\text{inv}}[A,g] = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2$$

$$L_{\text{inv}}[gA,1] = -\frac{1}{4}g^2(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2$$

$$= g^2 L_{\text{inv}}[A,g]$$

$$\frac{\partial L_{\text{inv}}[gA,1]}{\partial g} = 2gL_{\text{inv}}[A,g] + g^2\frac{\partial L_{\text{inv}}[A,g]}{\partial g} = A_\alpha \frac{\delta L_{\text{inv}}[gA,1]}{\delta(gA_\alpha)}$$

$$\frac{\delta L_{\text{inv}}[gA,1]}{\delta A_\alpha} = g^2\frac{\delta L_{\text{inv}}[A,g]}{\delta A_\alpha} = g\frac{\delta L_{\text{inv}}[gA,1]}{\delta(gA_\alpha)}$$

$$\therefore \qquad g^2 A_\alpha \frac{\delta L_{\text{inv}}[A,g]}{\delta A_\alpha} = 2g^2 L_{\text{inv}}[A,g] + g^3\frac{\partial L_{\text{inv}}[A,g]}{\partial g}$$

$$\therefore \qquad L_{\text{inv}}[A,g] = \frac{A_\alpha}{2}\frac{\delta L_{\text{inv}}[A,g]}{\delta A_\alpha} - \frac{g}{2}\frac{\partial L_{\text{inv}}[A,g]}{\partial g}$$

$$\left(A_\alpha\frac{\delta}{\delta A_\alpha} - g\frac{\partial}{\partial g}\text{作用在 } gt_{\alpha\beta}^a A_\beta \text{ 上为零}\right)$$

$$-\beta(\epsilon)\mathscr{G}(K_\alpha - F_\alpha^a\bar{u}_a)A_\alpha = \left(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\alpha}(K_\alpha - F_\alpha^a\bar{u}_a) + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}A_\alpha\right)(-\beta(\epsilon))$$

$$= -\beta(\epsilon)\left[-(K_\alpha - F_\alpha^a\bar{u}_a)(\Delta_\alpha^b + gt_{\alpha\beta}^b A_\beta)u_b + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}A_\alpha\right]$$

$$= \frac{\beta(\epsilon)}{2}\left[K_\alpha\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\alpha} + u_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a} + \bar{u}_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{u}_a}\right] - \beta(\epsilon)\left(L_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a} + A_\alpha\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_\alpha}\right)$$

说明一下：

$$(K_\alpha - F_\alpha^a\bar{u}_a)(\Delta_\alpha^b + gt_{\alpha\beta}^b A_\beta)u_b$$

$$= \frac{1}{2}K_\alpha\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\alpha} + \frac{1}{2}\bar{u}_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{u}_a} + \frac{1}{2}u_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a} - L_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}$$

$$\gamma(\epsilon)\mathscr{G}L_a u_a = \left(\frac{g}{2}L_a f_{abc}u_b u_c + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}u_a\right)(\gamma(\epsilon))$$

$$= \gamma(\epsilon)\left(\frac{1}{2}u_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a} - \frac{1}{2}(K_\alpha - F_\alpha^a\bar{u}_a)(\Delta_\alpha^b + gt_{\alpha\beta}^b A_\beta)u_b - u_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\right)$$

$$= \gamma(\epsilon)\left(\frac{1}{2}u_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a} - \frac{K_\alpha}{2}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\alpha} - \frac{\bar{u}_a}{2}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{u}_a} - u_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\right)$$

$$= -\frac{\gamma(\epsilon)}{2}\left(K_\alpha\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\alpha} + u_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a} + \bar{u}_a\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{u}_a}\right)$$

代入(8.98)得到：

$$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) = \left\{\left(\frac{\alpha(\epsilon)}{2} - \beta(\epsilon)\right)\left(A_\alpha\frac{\delta}{\delta A_\alpha} + L_a\frac{\delta}{\delta L_a}\right)\right.$$

$$+ \frac{1}{2}(\beta(\epsilon) - \gamma(\epsilon))\left(u_a\frac{\delta}{\delta u_a} + \bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a} + K_\alpha\frac{\delta}{\delta K_\alpha}\right)$$

$$-\frac{\alpha(\epsilon)}{2}g\frac{\partial}{\partial g}\Big\}\widetilde{S}[A,u,\bar{u},K,L] \tag{8.99}$$

假定到 n 圈为止,(8.69) 的每一个$(Z)_n$ 都已展成:

$$(Z)_n = 1 + \eta z_{(1)} + \eta^2 z_{(2)} + \cdots + \eta^n z_{(n)} \tag{8.100}$$

其中 $\eta^n z_{(i)}$ 代表 i 圈的抵消项,则$(n+1)$ 圈时,可取

$$(Z)_{n+1} = 1 + \eta z_{(1)} + \eta^2 z_{(2)} + \cdots + \eta^n z_{(n)} + \eta^{n+1} z_{(n+1)} = (Z)_n + \eta^{n+1} z_{(n+1)} \tag{8.101}$$

$\eta^{n+1} z_{(n+1)}$ 代表$(n+1)$ 圈的抵消项。自(8.69),取到 $\sim O(\eta^{n+1})$:

$$\begin{aligned}
A^0_{(n+1)} - A^0_{(n)} &= ((Z_3)^{1/2}_{n+1} - (Z_3)^{1/2}_n)A \\
&= \left(\left(1 + \frac{\eta^{n+1} z_{3(n+1)}}{1 + \eta z_{3(1)} + \cdots + \eta^n z_{3(n)}}\right)^{1/2} - 1\right)(Z_3)^{1/2}_n A \\
&\doteq \left(1 + \frac{\eta^{n+1}}{2} z_{3(n+1)} - 1\right)(Z_3)^{1/2}_n A \doteq \frac{\eta^{n+1}}{2} z_{3(n+1)} A
\end{aligned} \tag{8.102}$$

相仿有:

$$\begin{aligned}
u^0_{(n+1)} - u^0_{(n)} &= \frac{\eta^{n+1}}{2}\tilde{z}_{3(n+1)} u, (K^0_{(n+1)} - K^0_{(n)}) = \frac{\eta^{n+1}}{2}\tilde{z}_{3(n+1)} K \\
\bar{u}^0_{(n+1)} - \bar{u}^0_{(n)} &= \frac{\eta^{n+1}}{2}\tilde{z}_{3(n+1)} \bar{u}, (L^0_{(n+1)} - L^0_{(n)}) = \frac{\eta^{n+1}}{2} z_{3(n+1)} L \\
g^0_{(n+1)} - g^0_{(n)} &= \eta^{n+1}\left(\tilde{z}_{1(n+1)} - \tilde{z}_{3(n+1)} - \frac{1}{2} z_{3(n+1)}\right) g
\end{aligned} \tag{8.103}$$

按(8.1) 定义:

$$\widetilde{S}^0_n = \widetilde{S}[A^0_{(n)}, u^0_{(n)}, \bar{u}^0_{(n)}, K^0_{(n)}, L^0_{(n)}]$$

$$\widetilde{S}^0_{n+1} = \widetilde{S}[A^0_{(n+1)}, u^0_{(n+1)}, \bar{u}^0_{(n+1)}, K^0_{(n+1)}, L^0_{(n+1)}]$$

所以取到 $\sim O(\eta^{n+1})$ 有如下关系:

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}^0_{n+1} = \widetilde{S}^0_n + \eta^{n+1}\Big\{&\frac{1}{2} z_{3(n+1)}\left(A_\alpha\frac{\delta}{\delta A_\alpha} + L_a\frac{\delta}{\delta L_a}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\tilde{z}_{3(n+1)}\left(u_a\frac{\delta}{\delta u_c} + \bar{u}_a\frac{\delta}{\delta \bar{u}_a} + K_\alpha\frac{\delta}{\delta K_\alpha}\right) \\
&+ \left(\tilde{z}_{1(n+1)} - \tilde{z}_{3(n+1)} - \frac{1}{2} z_{3(n+1)}\right) g\frac{\partial}{\partial g}\Big\} \\
&\cdot \widetilde{S}[A,u,\bar{u},K,L]
\end{aligned} \tag{8.104}$$

将 $\widetilde{\Gamma}$ 按(8.70) 展开

$$\widetilde{\Gamma}(S^0_n) = \widetilde{S} + \eta\widetilde{\Gamma}_{(1)}(S^0_n) + \cdots + \eta^n\widetilde{\Gamma}_{(n)}(S^0_n) + \eta^{n+1}(\widetilde{\Gamma}^{\text{有限}}_{(n+1)}(S^0_n) + \widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n))$$

右方第一项原是 $\widetilde{S}^0_n = \widetilde{S} + \Delta_n\widetilde{S}$,但由于$\Delta_n\widetilde{S}$ 是抵消项,已经和 $\widetilde{\Gamma}(S^0_n)$ 微扰展开计算中出现的发散(各级整体发散) 相抵消,所以 $\Delta_n\widetilde{S}$ 不再在右方出现,同时使得 $\widetilde{\Gamma}_{(1)}(S^0_n)$, $\cdots\widetilde{\Gamma}_{(n)}(S^0_n)$ 都是不发散的。不过 $\Delta_n\widetilde{S}$ 并不抵消 $\widetilde{\Gamma}_{(n+1)}(S^0_n)$ 中的发散,在做$(n+1)$ 圈重正时,要找出 $\Delta_{n+1}\widetilde{S}$。

为了消去$(n+1)$圈的发散,现在取 $\tilde{S}^0_{n+1}-\tilde{S}^0_n=\Delta_{n+1}\tilde{S}-\Delta_n S=-\eta^{n+1}\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$,则

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(S^0_{n+1}) &= \tilde{S}+(\tilde{S}^0_{n+1}-\tilde{S}^0_n)+\eta\tilde{\Gamma}_{(1)}(S^0_n)+\cdots+\eta^n\tilde{\Gamma}_{(n)}(S^0_n)\\ &\quad+\eta^{n+1}(\tilde{\Gamma}^{\text{有限}}_{(n+1)}(S^0_n)+\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n))\\ &= \tilde{S}+\eta\tilde{\Gamma}_{(1)}(S^0_n)+\cdots+\eta^n\tilde{\Gamma}_{(n)}(S^0_n)+\eta^{n+1}\tilde{\Gamma}^{\text{有限}}_{(n+1)}(S^0_n)\end{aligned} \tag{8.105}$$

这样,就正好把$(n+1)$圈的发散消去。要做到这一点,就必须[对照(8.104)和(8.99)]取:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}Z_{3(n+1)} &= \frac{\alpha(\epsilon)}{2}-\beta(\epsilon)\\ -\frac{1}{2}\tilde{Z}_{3(n+1)} &= \frac{\beta(\epsilon)}{2}-\frac{r(\epsilon)}{2}\\ \tilde{Z}_{1(n+1)}-\tilde{Z}_{3(n+1)}-\frac{1}{2}Z_{3(n+1)} &= \frac{1}{2}\alpha(\epsilon)\end{aligned} \tag{8.106}$$

这当然是可以做到的,所以可保证消去η^{n+1}一级,即$n+1$圈的发散。在把$\tilde{\Gamma}(S^0_n)$中的S^0_n换成S^0_{n+1}时,低于η^{n+1}的各级都不受影响,即

$$\tilde{\Gamma}_{(i)}(S^0_{n+1})=\tilde{\Gamma}_{(i)}(S^0_n) \qquad (i\leqslant n)$$

各级$(i=1,\cdots,n)$有限的结果不改变。同时,由于剩下$\tilde{\Gamma}^{\text{有限}}_{(n+1)}(S^0_n)$是$\tilde{S}^0_{n+1}$抵消的结果,所以

$$\tilde{\Gamma}_{n+1}(S^0_{n+1})=\tilde{\Gamma}^{\text{有限}}_{(n+1)}(S^0_n)$$

于是(8.105)写成

$$\tilde{\Gamma}(S^0_{n+1})=\tilde{S}+\eta\tilde{\Gamma}_{(L)}(S^0_{n+1})+\cdots+\eta^n\tilde{\Gamma}_{(n)}(S^0_{n+1})+\eta^{n+1}\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(S^0_{n+1}) \tag{8.107}$$

这正是我们所要做的重正化的结果。而且,把(8.69)中的L换成$n+1$,则又可同样做更高一次的重正化;$n=0$时,$\tilde{\Gamma}=\tilde{S}$则是不发散的。于是,我们要证明的第一点已经得到了证明,即可以找到$\Delta_L S$,使用$S+\Delta_L S=S^0_L$做出来的Γ到L圈为止是不发散的。

再看规范群的性质。自(8.86)第一式,与S^0_n相对应的规范变换是(按(8.69)把A^0,u^0,$\bar{u}^0$换成$A,u,\bar{u}$):

$$\delta A_\alpha=\left(\Delta^a_\alpha+g\frac{(\tilde{Z}_1)_n}{(\tilde{Z}_3)_n}t^a_{\alpha\beta}A_\beta\right)\theta^a \tag{8.108}$$

$\tilde{S}^0_n$还有一种写法,就是K,L,g在重正化的过程中不变,变的是f_{abc},Δ^a_α,$t^a_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}\tilde{S}^0_n &= L_{\text{inv}}[(Z_3)^{1/2}_n A]+(K_\alpha-F^a_\alpha\bar{u}_a)((\tilde{Z}_3)_n\Delta^b_\alpha+(\tilde{Z}_1)_n g t^b_{\alpha\beta}A_\beta)u_b\\ &\quad+\frac{g}{2}(\tilde{Z}_1)L_a f_{abc}u_b u_c\end{aligned}$$

$$= L_{inv}[(Z_3)_n^{1/2}A] + (K_\alpha - F_\alpha^a \bar{u}_a)(\Delta_{\alpha(n)}^{b0} + g t_{\alpha\beta(n)}^{b0} A_\beta) u_b$$

$$+ \frac{g}{2} L_a f^{\ 0}_{abc(n)} u_b u_c \tag{8.109}$$

$$\therefore \qquad \Delta_{\alpha(n)}^{b0} = (\tilde{Z}_3)_n \Delta_\alpha^b, \qquad t_{\alpha\beta(n)}^{b0} = (\tilde{Z}_1)_n t_{\alpha\beta}^b, \qquad f^{\ 0}_{abc(n)} = (\tilde{Z}_1)_n f_{abc} \tag{8.110}$$

所以下列关系在各级重正化后都成立：

$$\begin{aligned} t_{\alpha\beta(n)}^{a0} t_{\beta\gamma(n)}^{b0} - t_{\alpha\beta(n)}^{b0} t_{\beta\gamma(n)}^{a0} &= f^{\ 0}_{abc(n)} t_{\alpha\gamma(n)}^{c0} \\ t_{\alpha\beta(n)}^{a0} \Delta_{\beta(n)}^{b0} - t_{\alpha\beta}^{b0} \Delta_{\beta(n)}^{a0} &= f^{\ 0}_{abc(n)} \Delta_{\alpha(n)}^{c0} \end{aligned} \tag{8.111}$$

(8.108) 和(8.111) 说明重正化前后规范群同构。

还要注意一个事实，即在上述证明中只出现 $\tilde{Z}_1$，$\tilde{Z}_3$，Z_3，并不需要 Z_1。这说明 Z_1 是多余的，对于 $Au\bar{u}$ 相互作用和 AAA 相互作用，都可用 $g^0 = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3 Z_3^{1/2}} g$。所以自动给出如下关系（见第五章）：

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} \tag{8.112}$$

§8－8　重正化前后定域规范群同构例二——有 Higgs 场时

在有 Higgs 场 s_k 时，规范确定项可取为：

$$-\frac{1}{2}\xi(C^a)^2 = -\frac{1}{2}\xi(F_\alpha^a A_\alpha + c_k^a s_k)^2$$

规范变换是（采用简化写法）：

$$\begin{aligned} A_\alpha \to A_\alpha' &= A_\alpha + (\Delta_\alpha^a + g t_{\alpha\beta}^a A_\beta)\lambda^a \\ s_l \to s_l' &= s_l - \frac{i}{2} g \tau_{lm}^a s_m \lambda^a \end{aligned} \tag{8.113}$$

$$\therefore \qquad -M_{ab} = \frac{\delta C^a}{\delta \lambda^b} = F_\alpha^a(\Delta_\alpha^b + g t_{\alpha\beta}^b A_\beta) + c_l^a\left(-\frac{i}{2} g \tau_{lm}^b s_m\right) \tag{8.114}$$

$$\therefore \qquad \mathscr{L}_{F-P} = \bar{u}_a M_{ab} u_b = -\bar{u}_a F_\alpha^a(\Delta_\alpha^b + g t_{\alpha\beta}^b A_\beta) u_b - \bar{u}_a c_l^a\left(-\frac{i}{2} g \tau_{lm}^b s_m\right) u_b \tag{8.115}$$

于是此地作用量 S 是（Higgs 场 s_k 是实场，D 是协变微商）

$$\begin{aligned} S = L_{inv}[A] &- \frac{1}{2}(Ds_a)^2 - \frac{\mu^2}{2} s_a^2 - \Lambda(s_a^2)^2 \\ &- \frac{1}{2}\xi(C^a)^2 + \frac{1}{2} g L_a f_{abc} u_b u_c \\ &+ (K_\alpha^A - F_\alpha^a \bar{u}_a)(\Delta_\alpha^b + g t_{\alpha\beta}^b A_\beta) u_b \\ &+ (K_l^s - c_l^a \bar{u}_a)\left(-\frac{i}{2} g \tau_{lm}^b s_m\right) u_b \end{aligned} \tag{8.116}$$

作用量 S 在如下 B. R. S. 变换下不变：

$$\delta A_\alpha = (\Delta_\alpha^a + g t_{\alpha\beta}^a A_\beta) u_a \delta\lambda$$

$$\delta s_l = -\frac{i}{2} g t_{lm}^a s_m u_a \delta\lambda$$

$$\delta u_a = -\frac{1}{2} g f_{abc} u_b u_c \delta\lambda$$

$$\delta \bar{u}_a = \xi (F_\alpha^a A_\alpha + c_l^a s_l) \delta\lambda$$

从而 S 满足如下的 Slavnov 恒等式：

$$\frac{\delta S}{\delta K_\alpha^A}\frac{\delta S}{\delta A_\alpha} + \frac{\delta S}{\delta K_l^s}\frac{\delta S}{\delta s_l} + \frac{\delta S}{\delta L_a}\frac{\delta S}{\delta u_a} - \xi(F_\alpha^a A_\alpha + c_l^a s_l)\frac{\delta S}{\delta \bar{u}_a} = 0$$

$$-F_\alpha^a \frac{\delta S}{\delta K_\alpha^A} - c_l^a \frac{\delta S}{\delta K_l^s} - \frac{\delta S}{\delta \bar{u}_a} = 0 \tag{8.117}$$

令 $\tilde{S} = S + \frac{1}{2}\xi(c^a)^2$，则又有

$$\frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_\alpha^A}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta A_\alpha} + \frac{\delta \tilde{S}}{S K_l^s}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta s_l} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta \tilde{S}}{\delta u_a} = 0$$

$$-F_\alpha^a \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_\alpha^A} - c_l^a \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_l^s} - \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \bar{u}_a} = 0 \tag{8.118}$$

和前一例的讨论相仿，也取一个变换

$$A_{\mu(L)}^{i0} = (Z_3)_L^{1/2} A_\mu^i \qquad K_{\alpha(L)}^{A0} = (\tilde{Z}_3)_L^{1/2} K_\alpha^A$$

$$s_{l(L)}^0 = (Z_s)_L^{1/2}(\bar{s}_l + (v_l)_L)^{①} \qquad K_{l(L)}^{s0} = \frac{(\tilde{Z}_3)_L^{1/2}(Z_3)_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}} K_l^s$$

$$u_{a(L)}^0 = (\tilde{Z}_3)_L^{1/2} u_a \qquad c_{l(L)}^{a0} = \frac{(Z_3)_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}} c_l^a$$

$$\bar{u}_{a(L)}^0 = (\tilde{Z}_3)_L^{1/2} \bar{u}_a \qquad L_{a(L)}^0 = (Z_3)_L^{1/2} L_a$$

$$g_{(L)}^0 = \frac{(\tilde{Z}_1)_L}{(\tilde{Z}_3)_L (Z_3)_L^{1/2}} g \qquad \xi_{(L)}^0 = (Z_3)_L^{-1}\xi \tag{8.119}$$

$$\Lambda_{(L)}^0 = (Z_\Lambda)_L (Z_s)_L^{-2} \Lambda \qquad \mu_{(L)}^{02} = (Z_\mu)_L (Z_s)_L \mu^2$$

还有源的变换：

$$j_{\alpha(L)}^0 = (Z_3)_L^{-1/2} j_\alpha, j_{l(L)}^0 = (Z_s)_L^{-1/2} j_l, \xi_{a(L)}^0 = (\tilde{Z}_3)_L^{-1/2}\xi_a, \bar{\xi}_{a(L)}^0 = (\tilde{Z}_3)_L^{-1/2}\bar{\xi}_a \tag{8.120}$$

在这个变换下，规范确定项不变：

$$\frac{1}{2}\xi(F_\alpha^a A_\alpha + c_l^a s_l)^2 = \frac{1}{2}\xi_{(L)}^0 (F_\alpha^a A_{\alpha(L)}^0 + c_{l(L)}^{a0} (Z_s)_L^{1/2} s_l)^2 \tag{8.121}$$

---

① $s_l = \bar{s}_l + v_{l(0)}$，$v_{l(0)}$ 和 $(v_l)_L$ 见后面(8.131)。又 $\tilde{S}^0$ 不含规范确定项，求 $\tilde{S}_{n+1}^0 - \tilde{S}_n^0$ 时不发生 $(Z_s)_L^{1/2} sl$ 的问题。

裸的与重正化的 $\tilde{S}$ 之间有如下关系：

$$\tilde{S}[A^0_{(L)}, s^0_{(L)}, u^0_{(L)}, \bar{u}^0_{(L)}, K^0_{(L)}, L^0_{(L)}] = \tilde{S}^0_L$$

$$= \tilde{S}[A, s, u, \bar{u}, K, L] + \Delta_L S[A, s, u, \bar{u}, K, L]$$

$$= \tilde{S}^R_L[A, s, u, \bar{u}, K, L]$$

然后，也是要用归纳法来证明：

1. 可以找到合适的$(Z)_n$，使得用 $\Delta_n S + S = S^0_n$ 计算出来的 Γ 到 n 圈为止不发散。
2. 重正化前后规范群同构。

和前例相仿，可得（参考(8.88)）Slavnov 恒等式如下：

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta K^A_\alpha} \cdot \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta A_\alpha} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta K^s_l} \cdot \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta s_l} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta L_a} \cdot \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta u_a} = 0$$

再简写一下，则(8.90) 在此地换成

$$\tilde{\Gamma}(S^0_n) * \tilde{\Gamma}(S^0_n) = 0$$

$$-F^a_\alpha \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta K^A_\alpha} - c^a_l \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta K^s_l} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}(S^0_n)}{\delta \bar{u}_a} = 0 \tag{8.122}$$

为了进行归纳法的证明，我们也像前例一样，把 $\tilde{\Gamma}(S^0_n)$ 按圈数展开，把 S^R_L 换成$\frac{1}{\eta}S^R_L$：

$$\tilde{\Gamma}(S^0_n) = \tilde{\Gamma}_{(0)}(S^0_n) + \eta \tilde{\Gamma}_{(1)}(S^0_n) + \cdots + \eta^n \tilde{\Gamma}_{(n)}(S^0_n)$$

$$+ \eta^{n+1}(\tilde{\Gamma}^{\text{有限}}_{(n+1)}(S^0_n) + \tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)) \tag{8.123}$$

其中 $\tilde{\Gamma}_{(0)}(S^0_n) = \tilde{S}$，即树图近似。$i$ 代表圈数。$\tilde{\Gamma}_{(0)}, \tilde{\Gamma}_{(1)}, \cdots, \tilde{\Gamma}_{(n)}$ 都是有限的，$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}(S^0_n)$ 分成发散部分与有限部分。把(8.123) 代入(8.122)，取到 $\sim O(\eta^{n+1})$ 为止，发散部分（最小重正化，取有$\frac{1}{n-4}$ 极点部分）也满足(8.122)，就得到方程：

$$\begin{aligned}&\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n) * \tilde{S} + \tilde{S} * \tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n) = 0\\ &-F^a_\alpha \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta K^A_\alpha} - c^a_l \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta K^s_l} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta \bar{u}_a} = 0\end{aligned} \tag{8.124}$$

在这个例子里，仍可定义算子 $\mathscr{G}$：

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 + \mathscr{G}_1$$

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_0 &= \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K^A_\alpha}\frac{\delta}{\delta A_\alpha} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K^s_l}\frac{\delta}{\delta s_l} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta}{\delta u_a}\\ \mathscr{G}_1 &= \frac{\delta \tilde{S}}{\delta A_\alpha}\frac{\delta}{\delta K^A_\alpha} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta s_l}\frac{\delta}{\delta K^s_l} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta}{\delta L_a}\end{aligned} \tag{8.125}$$

仍满足 $\mathscr{G}_0 \cdot \mathscr{G}_0 = 0, \mathscr{G}_0 \cdot \mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_1 \cdot \mathscr{G}_0 = 0$

$$\mathscr{G} \cdot \mathscr{G} = 0$$

(8.124) 第一方程写成：

$$\mathscr{G}\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0) = 0 \tag{8.126}$$

和前一例一样，$\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)$ 的普遍解应是如下形式(见附录二)：

$$\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0) = G[A] + \mathscr{G}\mathscr{F}[A,s,u,\bar{u},K,L]$$

还要求满足(8.124) 第二方程，则 $\mathscr{F}$ 可更具体化：

$$\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0) = G[A,s] + \mathscr{G}\mathscr{F}[A,s,u,0,K_\alpha^A - F_\alpha^a\bar{u}_a, K_l^s - c_l^a\bar{u}_a, L] \tag{8.127}$$

$G[A,s]$ 是满足规范不变性的、各项点 $\delta_i = 0$ 的、量纲为 4 的定域泛函。此地满足这些条件的泛函只有 $L_{\text{inv}}[A]$，$-\frac{1}{2}(Ds_a)^2$，Λs^4，$\frac{\mu^2}{2}s^2$ 四种，所以

$$G[A,s] = \alpha_1(\epsilon)L_{\text{inv}}[A]$$

$$+ \alpha_2(\epsilon)\left(-\frac{1}{2}\right)(Ds_a)^2 - \zeta(\epsilon)\Lambda(s_l^2)^2 - \zeta'(\epsilon)\frac{\mu^2}{2}(s_l^2)$$

$$(\epsilon = n - 4。\alpha_1(\epsilon), \alpha_2(\epsilon), \zeta(\epsilon), \zeta'(\epsilon) \text{ 都含} \frac{1}{n-4} \text{极点}) \tag{8.128}$$

K_α^A，K_l^s 的 F－P 荷为 －1，c_l^a，s_l 的 F－P 荷为 0，所以 $\mathscr{G}$ 的 F－P 荷为 ＋1，$\mathscr{F}$ 的 F－P 荷是 －1。同时，和前一例一样，$\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)$ 中(即发散的 1*PI* 中) 只含有 K_α^A、K_l^s、L_a 的一次项，所以 $\mathscr{F}$ 必须取如下形式(注意指标要收缩掉)：

$$\mathscr{F} = -\beta_1(\epsilon)(K_\alpha^A - F_\alpha^a\bar{u}_a)A_\alpha - \beta_2(\epsilon)(K_l^s - c_l^a\bar{u}_a)s_l + \gamma(\epsilon)L_a u_a$$
$$+ \delta(\epsilon)(K_l^s - c_l^a\bar{u}_a)d_{lm}^b c_m^b \tag{8.129}$$

其中 $\beta_1(\epsilon)$，$\beta_2(\epsilon)$，$\gamma(\epsilon)$，$\delta(\epsilon)$ 都含有 $\frac{1}{n-4}$ 极点；d_{lm}^b 是规范群的协变系数，例如 τ_{lm}^b(d_{lm}^b 与 S_l 的蝌蚪图有关，见后面)。

根据(8.116) 的 S，把(8.127)、(8.128)、(8.129) 中各项表达如下(参考前例的计算)：

$$\alpha_1(\epsilon)L_{\text{inv}}[A]$$

$$= \alpha_1(\epsilon)\left[\frac{A_\alpha}{2}\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta A_\alpha} - \frac{g}{2}\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial g} + \frac{g}{4}L_a f_{abc}u_b u_c\right.$$
$$\left. - \frac{i}{4}(K_l^s - c_l^a\bar{u}_a)\left(-\frac{i}{2}\right)g t_{lm}^b s_m u_b\right]$$

$$= \frac{\alpha_1(\epsilon)}{2}\left[A_\alpha\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta A_\alpha} - g\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial g} + L_a\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta L_a} + K_l^s\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta K_l^s} + c_l^a\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta c_l^a}\right]$$

$$\alpha_2(\epsilon)\left[-\frac{1}{2}(Ds_a)^2 - \frac{\mu^2}{2}(s_l^2) - 2\Lambda(s_a^2)^2\right]$$

$$= \alpha_2(\epsilon)\left[\frac{s_l}{2}\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta s_l} + \frac{i}{4}(K_l^s - c_l^a\bar{u}_a)\left(-\frac{i}{2}g t_{lm}^b s_m\right)u_b\right]$$

$$= \frac{\alpha_2(\epsilon)}{2}\left[s_l\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta s_l} - K_l^s\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta K_l^s} - c_l^a\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta c_l^a}\right]$$

$$- \zeta(\epsilon)\Lambda(s_\alpha^2)^2 = \zeta(\epsilon)\Lambda \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta \Lambda}$$

$$- \zeta'(\epsilon) \frac{\mu^2}{2}(s_l^2) = \zeta'(\epsilon)\mu^2 \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta(\mu^2)}$$

$$- \beta_1(\epsilon)\mathscr{S}(K_\alpha^A - F_\alpha^a \bar{u}_a)A_\alpha$$

$$= - \beta_1(\epsilon)\left(\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta K_\alpha^A}(K_\alpha^A - F_\alpha^a \bar{u}_a) + \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta A_\alpha} A_\alpha\right)$$

$$= \beta_1(\epsilon)\left((K_\alpha^A - F_\alpha^a \bar{u}_a)(\Delta_\alpha^b + g t_{\alpha\beta}^b A_\beta) u_b - \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta A_\alpha} A_\alpha\right)$$

$$= \beta_1(\epsilon)\Big[\frac{K_\alpha^A}{2}\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta K_\alpha^A} + \frac{u_a}{2}\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta u_a} + \frac{\bar{u}_a}{2}\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta \bar{u}_a} - A_\alpha \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta A_\alpha}$$

$$+ \frac{1}{2} c_l^a \bar{u}_a \left(-\frac{i}{2} g \tau_{lm}^b s_m\right) u_b$$

$$- \frac{1}{2} g L_a f_{abc} u_b u_c - \frac{1}{2}(K_l^s - c_l^a \bar{u}_a)\left(-\frac{i}{2} g \tau_{lm}^b s_m\right) u_b\Big]$$

$$= \frac{\beta_1(\epsilon)}{2}\left[K_\alpha^A \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta K_\alpha^A} + u_a \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta u_a} + \bar{u}_a \frac{\delta \bar{s}}{\delta \bar{u}_a}\right]$$

$$- \beta_1(\epsilon)\left[L_a \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta L_a} + \frac{1}{2} K_l^s \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta K_l^s} + c_l^a \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta c_l^a} + A_\alpha \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta A_\alpha}\right]$$

$$- \beta_2(\epsilon)\mathscr{S}(K_l^s - c_l^a \bar{u}_a)s_l = - \beta_2(\epsilon)\left(\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta K_l^s}(K_l^s - c_l^a \bar{u}_a) + s_l \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta s_l}\right)$$

$$= \beta_2(\epsilon)\left((K_l^s - c_l^a \bar{u}_a)\left(-\frac{i}{2} g \tau_{lm}^b s_m\right) u_b - s_l \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta s_l}\right)$$

$$= \beta_2(\epsilon)\left[-s_l \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta s_l} + K_l^s \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta K_l^s} + c_l^a \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta c_l^a}\right]$$

$$\gamma(\epsilon)\mathscr{S} L_a u_a = \gamma(\epsilon)\left[\frac{g}{2} L_a f_{abc} u_b u_c + \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta u_a} u_a\right]$$

$$= \gamma(\epsilon)\Big[\frac{1}{2} u_a \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta u_a} - \frac{1}{2}(K_\alpha^A - F_\alpha^a \bar{u}_a)(\Delta_\alpha^b + g t_{\alpha\beta}^b A_\beta) u_b$$

$$- \frac{1}{2}(K_l^s - c_l^a \bar{u}_a)\left(-\frac{i}{2} g \tau_{lm}^b s_m\right) u_b - u_a \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta u_a}\Big]$$

$$= - \frac{\gamma(\epsilon)}{2}\left[u_a \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta u_a} + \bar{u}_a \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta \bar{u}_a} + K_\alpha^A \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta K_\alpha^A} + K_l^s \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta K_l^s}\right]$$

$$\delta(\epsilon)\mathscr{S}(K_l^s - c_l^a \bar{u}_a) d_{lm}^b c_m^b = \delta(\epsilon) d_{lm}^b c_m^b \frac{\delta \widetilde{S}}{\delta S_1}$$

代人（8.127）得到：

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^{\mathrm{div}}_{(n+1)}(S^0_n) = &\Big\{\Big(\frac{\alpha_1(\epsilon)}{2}-\beta_1(\epsilon)\Big)\Big(A_\alpha\frac{\delta}{\delta A_\alpha}+L_a\frac{\delta}{\delta L_a}\Big)+\Big(\frac{\alpha_2(\epsilon)}{2}-\beta_2(\epsilon)\Big)s_l\frac{\delta}{\delta s_l}\\ &+\frac{1}{2}(\beta_1(\epsilon)-\gamma(\epsilon))\Big(u_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}+K^A_\alpha\frac{\delta}{\delta K^A_\alpha}\Big)\\ &+\Big[\Big(\frac{\alpha_1(\epsilon)}{2}-\beta_1(\epsilon)\Big)-\Big(\frac{\alpha_2(\epsilon)}{2}-\beta_2(\epsilon)\Big)+\Big(\frac{\beta_1(\epsilon)}{2}-\frac{\gamma(\epsilon)}{2}\Big)\Big]K^\prime_l\frac{\delta}{\delta K^\prime_l}\\ &+\Big[\Big(\frac{\alpha_1(\epsilon)}{2}-\beta_1(\epsilon)\Big)-\Big(\frac{\alpha_2(\epsilon)}{2}-\beta_2(\epsilon)\Big)\Big]c^a_l\frac{\delta}{\delta c^a_l}\\ &-\frac{\alpha_1(\epsilon)}{2}g\frac{\partial}{\partial g}+\delta(\epsilon)d^b_{lm}c^b_m\frac{\delta}{\delta s_l}\\ &+\xi(\epsilon)\Lambda\frac{\delta}{\delta\Lambda}+\zeta^\prime(\epsilon)\mu^2\frac{\delta}{\delta(\mu^2)}\Big\}\widetilde{S}[A,s,u,\bar{u},K,L]\end{aligned}\tag{8.130}$$

在这里，我们取

$$\left.\begin{aligned}s_l &= \bar{s}+v_{l(0)}{}^{①}\\ s^0_{l(n)} &= (Z_s)^{1/2}_n(\bar{s}_l+(v_l)_n)\end{aligned}\right\}\tag{8.131$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned}(Z_s)_i &= 1+\eta z_{s(1)}+\eta^2 z_{s(2)}+\cdots+\eta^i z_s(i)\\ (v_l)_i &= v_{l(0)}+\eta v_{l(1)}+\eta^2 v_{l(2)}+\cdots+\eta^i v_{l(i)}\end{aligned}\right\}\tag{8.131$_2$}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad s^0_{l(n+1)}-s^0_{l(n)} &= (Z_s)^{1/2}_{n+1}(\bar{s}_l+(v_l)_{n+1})-(Z_s)^{1/2}_n(\bar{s}_l+(v_l))_n\\ &=\Big[\Big(1+\frac{\eta^{n+1}z_{s(n+1)}}{1+\eta z_{s(1)}+\cdots+\eta^n z_{s(n)}}\Big)^{1/2}-1\Big](Z_s)^{1/2}_n\bar{s}_l\\ &\quad+\Big[\Big(1+\frac{\eta^{n+1}z_{s(n+1)}}{1+\eta z_{s(1)}+\cdots+\eta^n z_{s(n)}}\Big)^{1/2}(v_{l(0)}+\eta v_{l(1)}+\cdots+\eta^{n+1}v_{l(n+1)})\\ &\quad-(v_{l(0)}+\eta^v_{1(1)}+\cdots+\eta^n v_{l(n)})\Big](Z_s)^{1/2}_n\\ &=\frac{1}{2}\eta^{n+1}z_{s(n+1)}(\bar{s}_l+v_{l(0)})+\eta^{n+1}v_{l(n+1)}+O(\eta^{n+2})\end{aligned}\tag{8.131$_3$}$$

说明两点：

1. 零级（树图）近似没有自发破缺时，就取 $v_{l(0)}=0$。从而 $s_l=\bar{s}_l$。（8.131)$_3$ 又可写成：

$$s^0_{l(n+1)}-s^0_{l(n)}=\frac{1}{2}\eta^{n+1}z_{s(n+1)}s_l+\eta^{n+1}v_{l(n+1)}+O(\eta^{n+2})\tag{8.131$_4$}$$

2. （8.116）中的耦合项 $c^a_l\bar{u}_a\frac{i}{2}g\tau^b_{lm}s_m u_b$ 可以提供 s_m 的蝌蚪图（在零级近似没有自发破缺时也可以有蝌蚪图，依赖于取什么 c^a_l），图 8.23 就是一个单圈蝌蚪图的例子。可以看到 $d^b_{lm}\sim\tau^b_{lm}$（因此地 s_m 是实场，与实场相对应的实表示里 τ^a_{lm}是反对称的，

---

① 由于 $\exp i\int d^4x s^0 J^0=\exp i\int d^4x z^{1/2}_s(\bar{s}+v)z^{-1/2}_s J=\exp i\int d^4x\bar{s}J\cdot$常数，所以 $s^0=z^{1/2}_s(\xi+v)$ 时，例 1 的(8.74) 及以后各个结论仍成立。

所以 $\tau^a_{ml} = -\tau^a_{lm}$。第四个例子中将看到复表示的情况)。更多圈的蝌蚪图将给 d^b_{lm} 提供更多个 τ 的组合。

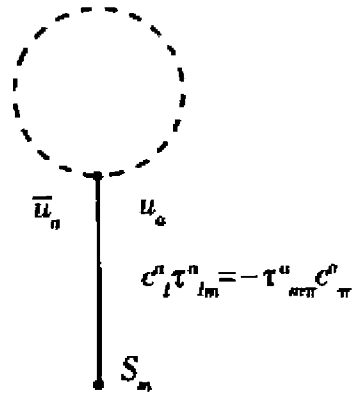


图 8.23

像 (8.104) 一样，取 $v_{l(0)}=0$ 的情况 (第九章将讨论 $v_{l(0)}\neq 0$ 的情况)，我们有 (取到 $O(\eta^{n+1})$):

$$\begin{aligned}\tilde{S}^0_{n+1} = \tilde{S}^0_n + \eta^{n+1}\Big\{&\frac{1}{2}z_{3(n+1)}\Big(A_\alpha\frac{\delta}{\delta A_\alpha}+L_\alpha\frac{\delta}{\delta L_\alpha}\Big)+\frac{1}{2}z_{s(n+1)}s_l\frac{\delta}{\delta s_l}\\&+\frac{1}{2}\tilde{z}_{3(n+1)}\Big(n_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}+K^A_\alpha\frac{\delta}{\delta K^A_\alpha}\Big)\\&+\frac{1}{2}(z_{3(n+1)}+\tilde{z}_{3(n+1)}-z_{s(n+1)})K^s_l\frac{\delta}{\delta K^s_l}\\&+\frac{1}{2}(z_{3(n+1)}-z_{s(n+1)})c^a_l\frac{\delta}{\delta c^a_l}+\Big(\tilde{z}_{1(n+1)}-\tilde{z}_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z_{3(n+1)}\Big)g\frac{\partial}{\partial g}\\&+v_{l(n+1)}\frac{\delta}{\delta s_l}+(z_{\Lambda(n+1)}-2z_{s(n+1)})\Lambda\frac{\delta}{\delta\Lambda}\\&+(z_{\mu(n+1)}-z_{s(n+1)})\mu^2\frac{\delta}{\delta(\mu^2)}\Big\}\tilde{S}[A,s,u,\bar{u},K,L]\end{aligned}\tag{8.132}$$

只要取

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}z_{3(n+1)} &= \frac{\alpha_1(\epsilon)}{2}-\beta_1(\epsilon) &\quad z_{\Lambda(n+1)}-2z_{s(n+1)} &= -\zeta(\epsilon)\\-\frac{1}{2}z_{s(n+1)} &= \frac{\alpha_2(\epsilon)}{2}-\beta_2(\epsilon) &\quad z_{\mu(n+1)}-z_{s(n+1)} &= -\zeta'(\epsilon)\\-\frac{1}{2}\tilde{z}_{3(n+1)} &= \frac{\beta_1(\epsilon)}{2}-\frac{\gamma(\epsilon)}{2} &\quad v_{l(n+1)} &= -\delta(\epsilon)d^b_{lm}c^b_m\\\tilde{z}_{1(n+1)}-\tilde{z}_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z_{3(n+1)} &= \frac{\alpha_1(\epsilon)}{2}\end{aligned}\tag{8.133}$$

就可以让 (8.132) 与 $(n+1)$ 圈发散项 (8.130) 的 $\eta^{n+1}\tilde{\Gamma}^{\rm div}_{(n+1)}(S^0_n)$ 抵消。这样就证明了我们所要证的第一点。

再看 (8.113)，与 S^0_n 相关的规范变换是:

$$\begin{aligned}\delta A^0_{\alpha(n)} &= (\Delta^a_\alpha + g^0_{(n)}t^a_{\alpha\beta}A^0_{\beta(n)})\theta^{a^0}\\\delta s^0_{l(n)} &= -\frac{i}{2}g^0_{(n)}\tau^a_{lm}s^0_{m(n)}\theta^{a^0}\end{aligned}\tag{8.134}$$

按照 (8.119)，把 A^0, s^0, g^0 等换成 A, s, g 等，取

$$\theta^{a^0} = (Z_3)^{1/2}_n\theta^a$$

则有

$$\begin{aligned}\delta A_\alpha &= \Big(\Delta^a_\alpha+\frac{(\tilde{Z}_1)_n}{(\tilde{Z}_3)_n}gt^a_{\alpha\beta}A_\beta\Big)\theta^a\\\delta(\bar{s}_l+(v_l)_n) &= -\frac{i}{2}\frac{(\tilde{Z}_1)_n}{(\tilde{Z}_3)_n}g\tau^a_{lm}(\bar{s}_m+(v_m)_n)\theta^a\end{aligned}\tag{8.135}$$

如果说，K、L、g 不变，而是 Δ、t、τ、f 在变，则和（8.109）一样有

$$\tilde{S}_n^0 = L_{\text{inv}}[(Z_3)_n^{1/2}A] - \frac{1}{2}((Z_s)_n^{1/2}Ds_a)^2 - z_\Lambda \Lambda (s_a^2)^2 - z_\mu \frac{\mu^2}{2}(s_a^2)$$

$$+ (K_a^A - F_\alpha^a \bar{u}_a)((\tilde{Z}_3)_n \Delta_\alpha^b + (\tilde{Z}_1)_n g t_{\alpha\beta}^b A_\beta) u_b$$

$$+ (K_l^s - c_l^a \bar{u}_a)\Big(-\frac{i}{2}(\tilde{Z}_1)_n g \tau_{lm}^b (\bar{s}_m + (v_m)_n) u_b$$

$$+ \frac{g}{2}(\tilde{Z}_1)_n L_a f_{abc} u_b u_c \tag{8.136}$$

$$\therefore \quad \Delta_{\alpha(n)}^{b0} = (\tilde{Z}_3)_n \Delta_\alpha^0, t_{\alpha\beta(n)}^{b0} = (\tilde{Z}_1)_n t_\alpha^b, \tau_{lm(n)}^{b0} = (\tilde{Z}_1)\tau_{lm}^b,$$

$$f_{abc(n)}^0 = (\tilde{Z}_1)_n f_{abc} \tag{8.137}$$

（8.135），（8.136），（8.137）说明了重正化前后的规范群的同构，并可得到类似（8.111）的关系。（8.118）仍自动给出。这是我们要证明的第二点。

§8-9 重正化前后定域规范群同构例三——有费米场时

在有费米场时，用

$$L'_{\text{inv}}[A,\psi,\bar{\psi}] = L_{\text{inv}}[A] + L_{\text{inv}}[\bar{\psi}, D\psi]。 \tag{8.138}$$

规范变换是：

$$A_i \to A_i' = A_i + (\Delta_i^a + g t_{ij}^a A_j)\lambda^a$$

$$\psi_\alpha \to \psi'_\alpha = \psi_\alpha + i g \tau_{\alpha\beta}^a \psi_\beta \lambda^a$$

$$\bar{\psi}_\alpha \to \bar{\psi}'_\alpha = \bar{\psi}_\alpha - i g \bar{\psi}_\beta \tau_{\beta\alpha}^a \lambda^a \tag{8.139}$$

M_{ab}没有新的内容，因为这里的规范确定项不含有 ψ，$\bar{\psi}$。*B. R. S.* 变换是：

$$\delta A_i = (\Delta_i^a + g t_{ij}^a A_j) u_a \delta\lambda$$

$$\delta\psi_\alpha = i g \tau_{\alpha\beta}^a \psi_\beta u_a \delta\lambda$$

$$\bar{\psi}_\alpha = - i g \bar{\psi}_B \tau_{\beta\alpha}^a u_a \delta\lambda$$

$$\delta u_a = -\frac{g}{2} f_{abc} u_b u_c \delta\lambda$$

$$\delta\bar{u}_a = \xi F_i^a A_i \delta\lambda \tag{8.140}$$

从而可定义

$$S[A,\psi,\bar{\psi},u,\bar{u},K,\mathscr{L},L]$$

$$= L'_{\text{inv}}[A,\psi,\bar{\psi}] + (K_i - F_i^a \bar{u}_a)(\Delta_i^b + g t_{ji}^b A_j) u_b - \frac{\xi}{2}(C^a)^2$$

$$+ \mathscr{L}_\alpha i g \tau_{\alpha\beta}^a \psi_\beta u_a + (-ig)\bar{\psi}_\alpha \tau_{\alpha\beta}^a \mathscr{L}_\beta u_a + \frac{g}{2} L_a f_{abc} u_b u_c \tag{8.141}$$

这里对应于 ψ_α 和 $\bar{\psi}_\alpha$ 引进的是 $\overline{\mathscr{L}}_\alpha$ 和 $\mathscr{L}_\alpha$，不是 K_α。它们是对易的，不是反对易的。和前一样可以证明（8.141）对于（8 140）的 *B. R. S.* 变换是不变的，因此也可以得到（类似（4.23），注意 $\delta\lambda$ 反对易）：

$$\left(-j_i\frac{\delta}{\delta K_i}-\bar{\eta}_\alpha\frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha}+\bar{\eta}_\alpha\frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}+\bar{\xi}\frac{\delta}{\delta L_a}+\xi_a F_i^a\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta_{j_i}}\right)W=0 \tag{8.142}$$

再定义

$$\Gamma[A, \psi, \bar{\psi}, u, \bar{u}, K, \mathscr{L}, L]$$
$$=Z[j, \eta, \bar{\eta}, \xi, \bar{\xi}, K, \mathscr{L}, L]-j_iA_i-\bar{\eta}_\alpha\psi_\alpha+\bar{\psi}_\alpha\eta_\alpha-\bar{\xi}_a u_a-\bar{u}_a\xi_a \tag{8.143}$$

自 Legender 变换有

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_i}=-j_i,\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_\alpha}=\bar{\eta}_\alpha,\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_\alpha}=-\eta_\alpha,\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta u_a}=\bar{\xi}_a,\quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_a}=-\xi_a \tag{8.144}$$

于是自（8.142）得 *Slavnov* 恒等式：

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta A_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i}-\frac{\delta\Gamma}{\delta\psi_\alpha}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha}-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_\alpha}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha}+\frac{\delta\Gamma}{\delta u_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta L_a}-\xi C^a[A]\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_a}=0 \tag{8.145$_1$}$$

$$-F_i^a\frac{\delta\Gamma}{\delta K_i}-\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{u}_a}=0 \tag{8.145$_2$}$$

从而又可以定义算子 $\mathscr{G}$:

$$\mathscr{G}=\mathscr{G}_0+\mathscr{G}_1$$

$$\mathscr{G}_0=\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta}{\delta A_i}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha}\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta}{\delta u_a}$$
$$=(\Delta_i^b+gt_{ij}^bA_i)u_b\frac{\delta}{\delta A_i}-ig\tau_{\alpha\beta}^a\psi_\beta u_a\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha}+ig\bar{\psi}_\beta\tau_{\beta\alpha}^a u_a\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\alpha}$$
$$+\frac{g}{2}f_{abc}u_bu_c\frac{\delta}{\delta u_a}$$

$$\mathscr{G}_1=\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_i}\frac{\delta}{\delta K_i}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\psi_\alpha}\frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{\psi}_\alpha}\frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}\frac{\delta}{\delta L_a} \tag{8.146}$$

和前相仿，$\Gamma^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)$应满足

$$\mathscr{G}\Gamma^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)=0 \tag{8.147}$$

这个方程的解的一般形式（用附录二的办法来证明）为：

$$\Gamma^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)=G[A, \psi, \bar{\psi}]+\mathscr{G}\mathscr{F}[A, \psi, \bar{\psi}, u_a, 0, K_i-F_i^a\bar{u}_a, \mathscr{L}_\alpha, \overline{\mathscr{L}}_\alpha, L_a] \tag{8.148}$$

由于Γ量纲为4，$F-P$ 荷为0，所以$\mathscr{F}$的量纲是3，$F-P$ 荷为 −1，从而$\mathscr{F}$中与 K, L, $\mathscr{L}$, $\overline{\mathscr{L}}$相对应有四项（发散项中只有 K, L, $\mathscr{L}$, $\overline{\mathscr{L}}$一次幂）：

$$(K_i-F_i^a\bar{u}_a)A_i,\quad L_au_a,\quad \overline{\mathscr{L}}_\alpha\psi_\alpha,\quad \bar{\psi}_\alpha\mathscr{L}_\alpha \tag{8.149$_1$}$$

同时，G 中规范不变的量纲为 4 的定域泛函（不含 K, L）只有两个，即：

$$L_{inv}[A], L_{inv}[\bar{\psi}, D\psi] \tag{8.149$_2$}$$

把（8.149）$_1$，（8.149）$_2$ 各个解重新整理一下：

$$L_{inv}[A]=\frac{1}{2}\left[A_i\frac{\delta}{\delta A_i}-g\frac{\partial}{\partial g}+L_a\frac{\delta}{\delta L_a}+\overline{\mathscr{L}}_\alpha\frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha}+\mathscr{L}_\alpha\frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\right]\tilde{S}=A$$

$$L_{inv}[\bar{\psi},D\psi] = \frac{1}{2}\Big[\bar{\psi}_\alpha \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\alpha} + \psi_\alpha \frac{\delta}{\delta\psi_\alpha} - \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha} - \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha}\Big]\tilde{S} = B$$

$$\mathscr{G}(K_i - F_i^a\bar{u}_a)A_i = \Big[A_i \frac{\delta}{\delta A_i} - \frac{1}{2}\Big(K_i \frac{\delta}{\delta K_i} + \bar{u}_a \frac{\delta}{\delta\bar{u}_a} + u_a \frac{\delta}{\delta u_a}\Big)$$

$$+ L_a \frac{\delta}{\delta L_a} + \frac{1}{2}\overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} + \frac{1}{2}\mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big]\tilde{S} = C$$

$$\mathscr{G}L_a u_a = -\frac{1}{2}\Big[u_a \frac{\delta}{\delta u_a} + \bar{u}_a \frac{\delta}{\delta\bar{u}_a} + K_i \frac{\delta}{\delta K_i} + \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} + \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big]\tilde{S} = D$$

$$\mathscr{G}\overline{\mathscr{L}}_\alpha\psi_\alpha = -\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\psi_\alpha}\psi_\alpha - ig\tau^a_{\alpha\beta}\psi_\beta u_a \overline{\mathscr{L}}_\alpha = \psi_\alpha \frac{\delta\tilde{S}}{\delta\psi_\alpha} - \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta\tilde{S}}{\delta\mathscr{L}_\alpha}$$

$$\mathscr{G}\bar{\psi}_\alpha\mathscr{L}_\alpha = -\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{\psi}_\alpha}\bar{\psi}_\alpha + ig\bar{\psi}_\beta\tau^a_{\beta\alpha}u_a\mathscr{L}_\alpha = \bar{\psi}_\alpha \frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{\psi}_\alpha} - \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta\tilde{S}}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} \tag{8.150}$$

由于 ψ 和 $\bar{\psi}$ 有相同的 Z_2，所以 $\overline{\mathscr{G}}\mathscr{L}_\alpha\psi_\alpha$ 和 $\mathscr{G}\bar{\psi}_\alpha\mathscr{L}_\alpha$ 应该以 $\mathscr{G}\mathscr{L}_\alpha\psi_\alpha + \mathscr{G}\bar{\psi}_\alpha\mathscr{L}_\alpha$ 组合的形式在 $\Gamma^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$ 中出现。这就和 $B = L_{inv}$〔$\bar{\psi}$，$D\psi$〕重复了。因此，最一般的形式应是 A，B，C，D 的线性组合。为了方便，不妨取以下四种组合：

$C - D$：
$$\Big[A_i \frac{\delta}{\delta A_i} + L_a \frac{\delta}{\delta L_a} + \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} + \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big]\tilde{S}$$

$2B$：
$$\Big[\bar{\psi}_\alpha \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\alpha} + \psi_\alpha \frac{\delta}{\delta\psi_\alpha} - \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} - \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big]\tilde{S}$$

$-2D$：
$$\Big[u_a \frac{\delta}{\delta u_a} + \bar{u}_a \frac{\delta}{\delta\bar{u}_a} + K_i \frac{\delta}{\delta k_i} + \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} + \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big]\tilde{S}$$

$2A - (C - D)$：
$$-g\frac{\partial\tilde{S}}{\partial g}$$

所以 $\Gamma^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$ 的一般形式是：

$$\Gamma^{\text{biv}}_{(n+1)}(S^0_n) = \Big\{a(\epsilon)\Big[A_i \frac{\delta}{\delta A_i} + L_a \frac{\delta}{\delta L_a} + \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} + \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big] - b(\epsilon)g\frac{\partial}{\partial g}$$

$$+ c(\epsilon)\Big[\bar{\psi}_\alpha \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\alpha} + \psi_\alpha \frac{\delta}{\delta\psi_\alpha} - \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} - \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big]$$

$$+ d(\epsilon)\Big[u_a \frac{\delta}{\delta u_a} + \bar{u}_a \frac{\delta}{\delta\bar{u}_a} + K_i \frac{\delta}{\delta K_i} + \overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} + \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big]\Big\}\tilde{S}$$

$$= \Big\{a(\epsilon)\Big[A_i \frac{\delta}{\delta A_i} + L_a \frac{\delta}{\delta L_a}\Big] - b(\epsilon)g\frac{\partial}{\partial g} + c(\epsilon)\Big[\bar{\psi}_\alpha \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}_\alpha} + \psi_\alpha \frac{\delta}{\delta\psi_\alpha}\Big]$$

$$+ (a(\epsilon) - c(\epsilon) + b(\epsilon))\Big[\overline{\mathscr{L}}_\alpha \frac{\delta}{\delta\overline{\mathscr{L}}_\alpha} + \mathscr{L}_\alpha \frac{\delta}{\delta\mathscr{L}_\alpha}\Big]$$

$$+ d(\epsilon)\Big[u_a \frac{\delta}{\delta u_a} + \bar{u}_a \frac{\delta}{\delta\bar{u}_a} + K_i \frac{\delta}{\delta k_i}\Big]\Big\}\tilde{S} \tag{8.151}$$

$$A^0_{i(L)} = (Z_3)^{1/2}_L A_i, \qquad L^0_{a(l)} = (Z_3)^{1/2}_L L_a$$

$$\psi^0_{\alpha(L)} = (Z_2)^{1/2}_L \psi_\alpha, \qquad \overline{\psi}^0_{\alpha(L)} = (Z_2)^{1/2}_L \overline{\psi}_\alpha,$$

$$u^0_{a(L)} = (\widetilde{Z}_3)^{1/2}_L u_a, \qquad \overline{u}^0_{a(L)} = (\widetilde{Z}_3)^{1/2}_L \overline{u}_a,$$

$$K^0_{i(L)} = (\widetilde{Z}_3)^{1/2}_L K_i$$

$$\mathscr{L}^0_{\alpha(L)} = \frac{(Z_3)^{1/2}_L(\widetilde{Z}_3)^{1/2}_L}{(Z_2)^{1/2}_L}\mathscr{L}_\alpha, \qquad \overline{\mathscr{L}}^0_{\alpha(L)} = \frac{(Z_3)^{1/2}_L(\widetilde{Z}_3)^{1/2}_L}{(Z_2)^{1/2}_L}\overline{\mathscr{L}}_\alpha,$$

$$g^0 = \frac{(\widetilde{Z}_1)_L}{(\widetilde{Z}_3)_L(Z_3)^{1/2}_L}g = \frac{(Z_1)_L}{(Z_3)^{3/2}_L}g = \frac{(Z_g)_L}{(Z_2)_L(Z_3)^{1/2}_L}g \tag{8.152}$$

所以自动有（参看第五章）：

$$\frac{(\widetilde{Z}_1)_L}{(\widetilde{Z}_3)_L} = \frac{(Z_1)_L}{(Z_3)_L} = \frac{(Z_g)_L}{(Z_2)_L} \tag{8.153}$$

而且只要取：

$$-\frac{z_{3(n+1)}}{2} = a(\epsilon), \ -\frac{z_{2(n+1)}}{2} = c(\epsilon) - \frac{\widetilde{z}_{3(n+1)}}{2}d(\epsilon)$$

$$\widetilde{z}_{1(n+1)} - \widetilde{z}_{3(n+1)} - \frac{z_{3(n+1)}}{2} = b(\epsilon) \tag{8.154}$$

就能做到重正化，归纳法可以继续进行下去，而且和前一样得到重正化前后规范群同构。

如果 A_i 属于 U（1）*Abel* 规范群，就有如下改动：

$t^a_{ij} = 0$，$f_{abc} = 0$，$\tau^a_{\alpha\beta} = 0$，全部 $u_a \to u, \overline{u}_a \to \overline{u}$。(8.140) 中 $\delta u = 0$。

(8.149)，(8.150) 中无 $\mathscr{G}L_a u_a$，参考后面例四的讨论可以代以：

$$-u\frac{\delta \widetilde{S}}{\delta u} = -\frac{1}{2}\left[u\frac{\delta}{\delta u} + \overline{u}\frac{\delta}{\delta u} + K_i\frac{\delta}{\delta K_i} + \overline{\mathscr{L}}_\alpha\frac{\delta}{\delta \overline{\mathscr{L}}_\alpha} + \mathscr{L}_\alpha\frac{\delta}{\delta \mathscr{L}_\alpha}\right]\widetilde{S},$$

(8.154) 最后一式改成

$$z_{g(n+1)} - z_{2(n+1)} - \frac{z_{3(n+1)}}{2} = b(\epsilon)$$

由于 U（1）规范场没有自作用，下列 Ward 恒等式成立：

$\Gamma_\mu(p, p, m_0, e_0) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu}S'^{-1}_F(p, m_0, e_0)$，$\underline{\Gamma}_\mu(p, p, m, e) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu}\underline{S}'^{-1}_F(p, m, e)$。仿照第五章的讨论又有：

$$Z_g^{-1}\underline{\Gamma}_\mu(p,p,m,e) = \Gamma_\mu(p,p,m_0,e_0), Z_2 \underline{S}'_F(p,m,e) = S'_F(p,m_0,e_0)$$

于是有 $Z_g = Z_2$（Z_g 即量子电动力学的 Z_1），$b(\epsilon) = a(\epsilon)$。

§8－10 重正化前后定域规范群同构例四——有 Abel 不变子群（包括 W－S 模型）

$$L_{inv}[A] = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu)^2$$

$$L_{inv}[B] = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2$$

$$(D s_i)^2 = \left|\left(\partial_\mu - \frac{2}{i} g \tau^a_{jm} A^a_u - \frac{i}{2} g' B_\mu\right) s_m\right|^2$$

$$L'_{inv}[A,B,s] = L_{inv}[A] + L_{inv}[B] - (Ds_l)^2 - \Lambda(s^+ s)^2 - \mu^2(s^+ s) \tag{8.155}$$

x，y 重复出现就表示对 x，y 积分。L_{inv} 〔A〕，L_{inv} 〔B〕，$(Ds_l)^2$ 都是已对 d^4xd^4y 积过分的。以下仍用简化符号。规范变换是：

$$A_i \to A'_i = A_i + (\Delta^{Ab}_i + g t^b_{ik} A_k)\lambda^b, \qquad B_\mu \to B'_\mu = B_\mu + \Delta^B_\mu \lambda,$$

$$s_l \to s'_l = s_l - \frac{i}{2}(g \tau^a_{lm} \lambda^a sm + g' \lambda s_l)$$

$$s^+_l \to s^{+\prime}_l = s^+_l + \frac{i}{2}(g s^+_m \tau^a_{ml} \lambda^a + g' s^+_l \lambda) \tag{8.156}$$

以 W－S 模型为例，取

$$V(s^+ s) = \Lambda(s^+_l s_l)^2 + \mu^2(s^+_l s_l) \tag{8.157}$$

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 + i\varphi_1) \qquad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_4 - i\varphi_3)$$

$$s^+_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - i\varphi_1) \qquad s^+_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_4 + \varphi_3) \tag{8.158}$$

在简化符号中，τ^1，τ^2，τ^3 是 Pauli 矩阵乘上相应的 δ 函数。在 W－S 模型中取规范确定项（R_ξ 规范）为

$$-\frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2 - \frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2 \tag{8.159}$$

其中

$$C^{Aa} = \partial_\mu A^a_\mu + \frac{1}{\xi_A}\frac{gu}{2}\frac{i}{\sqrt{2}}(\delta_{2j}\tau^a_{jk}s_k - s^+_k \tau^a_{kj}\delta_{j2})$$

$$C^B = \partial_\mu B_\mu - \frac{1}{\xi_B}\frac{g'u}{2}\frac{i}{\sqrt{2}}(\delta_{2j}\tau^{3a}_{jk}s_k - s^+_k \tau^3_{kj}\delta_{j2})$$

现在扩充到一般的

$$G = A \otimes B \tag{8.160}$$

A 是非 Abel 子群，B 是 Abel 子群。先不加入费米场。s 不限于（8.158）形式，V（$s^+ s$）也不限于（8.157）形式，但（8.155），（8.156）的形式仍保留。规范确定项则扩充到一般的线性规范：

$$C^{Aa} = F^{Aa}_i A_i + c^{Aa}_k s_k + c^{Aa+}_k s^+_k$$
$$C_B = F^B_\mu B_\mu + c^B_k s_k + C^{B+}_k s^+_k \tag{8.161}$$

自（8.156）和（8.161）有：

$$-M^A_{ab} = \frac{\delta C^{Aa}}{\delta\lambda^b} = F^{Aa}_i(\Delta^{Ab}_i + g t^b_{ij} A_j) + c^{Aa}_l\left(-\frac{i}{2} g \tau^b_{lk} s_k\right) + c^{Aa+}_l\left(\frac{i}{2} g s^+_k \tau^b_{kl}\right)$$

$$-M^A_{a0} = \frac{\delta C^{Aa}}{\delta\lambda} - c^{Aa}_l\left(-\frac{1}{2} g' s_l\right) + c^{Aa+}_l\left(\frac{i}{2} g' s^+_l\right)$$

$$-M^B_{00} = \frac{\delta C^B}{\delta\lambda} = F^B_\mu \Delta^B_\mu + c^B_l\left(-\frac{i}{2} g' s_l\right) + c^{B+}_l\left(\frac{i}{2} g' s^+_l\right)$$

$$-M^B_{0b}=\frac{\delta C^B}{\delta\lambda^b}=c^B_l\left(-\frac{i}{2}g\tau^b_{lk}s_k\right)+c^{B+}_l\left(\frac{i}{2}gs^+_k\tau^b_{kl}\right) \tag{8.162}$$

要取两组 $F-P$ 场，一组 $\bar{u}_a$，u_a，与 A 子群相对应；一组 $\bar{u}$，u，与 B 子群相对应。规范补偿项是：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{F-P}=&\bar{u}_aM^A_{ab}u_b+\bar{u}_aM^B_{a0}u+\bar{u}M^B_{00}u+\bar{u}M^B_{0b}u_b=-\bar{u}_aF^{Aa}_i(\Delta^{Ab}_i+gt^b_{ij}A_j)u_b\\&-c^{Aa}_l\bar{u}_a\left(-\frac{i}{2}g\tau^b_{lk}s_k\right)u_b-c^{Aa+}_l\bar{u}_a\left(\frac{i}{2}gs^+_k\tau^b_{kl}\right)u_b-\bar{u}F^B_\mu\Delta^B_\mu u\\&-c^B_l\bar{u}\left(-\frac{i}{2}g's_l\right)u-c^{B+}_l\bar{u}\left(\frac{i}{2}g's^+_l\right)u\\&-c^{Aa}_l\bar{u}_a\left(-\frac{i}{2}g's_l\right)u-c^{Aa+}_l\bar{u}_a\left(\frac{i}{2}g's^+_l\right)u\\&-c^B_l\bar{u}\left(-\frac{i}{2}g\tau^b_{lk}s_k\right)u_b-c^{B+}_l\bar{u}\left(\frac{i}{2}gs^+_k\tau^b_{kl}\right)u_b\end{aligned} \tag{8.163}$$

于是有：

$$\begin{aligned}S=&L_{inv}[A]+L_{inv}[B]-(Ds_l)^2-\Lambda(s^+_ls)^2-\mu^2(s^+_ls_l)\\&-\frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2-\frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2+(K^A_i-F^{Aa}_i\bar{u}_a)(\Delta^{Ab}_i+gt^b_{ij}A_j)u_b+(K^B_\mu-F^B_\mu\bar{u})\Delta^B_\mu u\\&+(K^s_l-c^{Aa}_l\bar{u}_a-c^B_l\bar{u})\left(-\frac{i}{2}g\tau^b_{lk}s_ku_b-\frac{i}{2}g's_lu\right)\\&+(K^{s+}_l-c^{Aa+}_l\bar{u}_a-c^{B+}_l\bar{u})\left(\frac{i}{2}gs^+_k\tau^b_{kl}u_b+\frac{i}{2}g's^+_lu\right)\\&+\frac{1}{2}gL_af_{abc}u_bu_c\end{aligned} \tag{8.164}$$

其中 K^A_i，K^B_μ，K^s_l，K^{s+}_l，$\bar{u}_a$，u_a，$\bar{u}$，u 和下列的 *B. R. S.* 变换中引入的 $\delta\lambda$ 是互相反对易的：

$$\begin{aligned}\delta A_i&=(\Delta^{Ab}_i+gt^b_{ij}A_j)u_b\delta\lambda\\\delta B_\mu&=(\Delta^B_\mu)\delta\lambda\\\delta s_l&=-\frac{i}{2}(g\tau^b_{lk}s_ku_b+g's_lu)\delta\lambda\\\delta s^+_l&=\frac{i}{2}(gs^+_k\tau^b_{kl}u_b+g's^+_lu)\delta\lambda\\\delta u_a&=-\frac{1}{2}gf_{abc}u_bu_c\delta\lambda\\\delta\bar{u}_a&=\xi_A(F^{Aa}_iA_i+c^{Aa}_ks_k+c^{Aa+}_ks^+_k)\delta\lambda\\\delta u&=0\\\delta\bar{u}&=\xi_B(F^B_\mu B_u+c^B_ks_k+c^{B+}_ks^+_k)\delta\lambda\end{aligned} \tag{8.165}$$

(8.164) 的作用量 S 在 (8.165) 的 *B. R. S.* 变换下是不变的。从而可以得到 S 所满足的 *Slavnov* 恒等式。

$$\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K^A_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_i}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K^B_\mu}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta B_\mu}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K^s_l}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta s_l}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K^{s+}_l}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta s^+_l}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_a}=0$$

$$-F_i^{Aa}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i^A}-c_l^{Aa}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_l^s}-c_l^{Aa+}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_l^{s+}}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{u}_a}=0$$

$$-F_\mu^B\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_\mu^B}-c_l^B\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_l^s}-c_l^{B+}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_l^{s+}}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\bar{u}}=0$$

$$\tilde{S}=S+\frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2+\frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2 \tag{8.166}$$

作类似于（8.119）的变换：

$$A_{i(L)}^0=(Z_3)_L^{1/2}A_i,\quad u_{a(L)}^0=(\tilde{Z}_3)_L^{1/2}u_a,\quad \bar{u}_{a(L)}^0=(\tilde{Z}_3)_L^{1/2}\bar{u}_a,$$

$$B_{\mu(L)}^0=(Z_3')_L^{1/2}B_\mu,\quad u_{(L)}^0=(\tilde{Z}_3')_L^{1/2}u,\quad \bar{u}_{(L)}^0=(\tilde{Z}'_3)_L^{1/2}\bar{u},$$

$$(Z_3)_L(\tilde{Z}_3)_L=(Z_3')_L(\tilde{Z}_3')_L$$

$$g_{(L)}^0=\frac{(\tilde{Z}_1)}{(\tilde{Z}_3)_L(Z_3)_L^{1/2}}g,\qquad \xi_{A(L)}^0=\frac{\xi_A}{(Z_3)_L},\qquad K_{i\ (L)}^{A0}=(\tilde{Z}_3)_L^{1/2}K_i^A,$$

$$g_{(L)}'^0=\frac{(\tilde{Z}_1')}{(\tilde{Z}_3')_L(Z_3')_L^{1/2}}g',\qquad \xi_{B(L)}^0=\frac{\xi_B}{(Z_3')_L},\qquad K_{\mu(L)}^{B0}=(\tilde{Z}_3')_L^{1/2}K_\mu^B,$$

$$L_a^0(L)=(Z_3)_L^{1/2}L_a,\qquad \Lambda_{(L)}^0=\frac{(Z_\Lambda)_L}{(Z_s)_l^2}\Lambda,\qquad \mu_{(L)}^{0\ 2}=\frac{(Z_\mu)_l}{(Z_3)_l}\mu^2,$$

$$K_{l(L)}^{s0}=\frac{(\tilde{Z}_3)_L^{1/2}(Z_3)_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}}K_l^s=\frac{(\tilde{Z}_3')_L^{1/2}(Z_3')_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}}K_l^s,$$

$$K_{l(L)}^{s+0}=\frac{(\tilde{Z}_3)_L^{1/2}(Z_3)_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}}K_l^{s+}=\frac{(\tilde{Z}_3')_L^{1/2}(Z_3')_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}}K_l^{s+},$$

$$c_{l(L)}^{Aa0}=\frac{(Z_3)_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}}c_l^{Aa},c_{l(L)}^{Aa+0}=\frac{(Z_3)_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}}c_l^{Aa+},$$

$$c_{l(L)}^{B0}=\frac{(Z_3')_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}}c_l^B,c_{l(L)}^{B+0}=\frac{(Z_3')_L^{1/2}}{(Z_s)_L^{1/2}}c_l^{B+},$$

$$s_{l(L)}^0=(Z_s)_L^{1/2}(\bar{s}_l+(v_l)_L)$$

$$s+_{l(L)}^0=(Z_s)_L^{1/2}(\bar{s}_l^++(v_l^+)_L)$$

$$(v_l)_L=v_{l(0)}+\eta v_{l(1)}+\eta^2v_{l(2)}+\cdots+\eta^Lv_{l(L)}$$

$$(v_l^+)_L=v_{l(0)}^++\eta v_{l(1)}^++\eta^2v_{l(2)}^++\cdots+\eta^Lv_{l(L)}^+ \tag{8.167}$$

在没有真空自发破缺时，

$$v_{l(0)}=0,\quad v_{l(0)}^+=0 \tag{8.168}$$

把 $S\,[A,B,s,u,\bar{u},K,L]$ 里的 A，$B\cdots$ 换成（8.167）中所定义的 $A_{(n)}^0$，$B_{(n)}^0\cdots$，得到

$$S[A_{(n)}^0,B_{(n)}^0,s_{(n)}^0,u_{(n)}^0,\bar{u}_{(n)}^0,K_{(n)}^0,L_{(n)}^0]=S_{(n)}^0$$
$$=S[A,B,s,u,\bar{u},K,L]+\Delta_nS[A,B,s,u,\bar{u},K,L] \tag{8.169}$$

（Δ_nS 是抵消项）。由于 $S\,[A,B\cdots]$ 的性质和 $S\,[A_{(n)}^0,B_{(n)}^0,\cdots]$ 几乎一样，可以证明

$S[A^0_{(n)},B^0_{(n)},\cdots]$ 在如下的 *B. R. S.* 变换下是不变的：

$$\delta A^0_{i(n)}=(\Delta_i^{Ab}+g^0_{(n)}t^b_{ij}A^0_{j(n)})u^0_{b(n)}\delta\lambda^0$$

$$\cdots\cdots \tag{8.170}$$

这变换无非是把（8.165）中的 A，$B\cdots$全都改写成 $A^0_{(r)}$，$B^0_{(r)}$，…。具体的就不一一写出了。正因为 $S[A^0_{(n)},B^0_{(n)},\cdots]$ 有这种 *B. R. S.* 不变性，按第四章的同样的讨论，可以知道用 $S[A^0_{(n)},B^0_{(n)},\cdots]$ 做出来的 $\tilde\Gamma^0_n=\tilde\Gamma[A^0_{(n)},B^0_{(r)},\cdots]$ 必定满足如下的 *Slavnov* 恒等式：

$$\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{A0}_{i(n)}}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta A^0_{i(n)}}+\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{B0}_{\mu(n)}}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta B^0_{\mu(0)}}+\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{s0}_{l(n)}}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta s^0_{l(n)}}+\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{s+0}_{l(n)}}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta s^{+0}_{l(n)}}+\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta L^0_{a(n)}}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta u^0_{a(n)}}=0$$

$$-F_i^{Aa}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{A0}_{i(n)}}-c^{Aa0}_{l(n)}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{s0}_{l(n)}}-c^{Aa+0}_{l(n)}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{s+0}_{l(n)}}-\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta\bar u^0_{a(n)}}=0$$

$$-F_\mu^{B}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{B0}_{\mu(n)}}-c^{B0}_{l(n)}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{s0}_{l(n)}}-c^{B+0}_{l(n)}\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta K^{s+0}_{i(n)}}-\frac{\delta\tilde\Gamma^0_n}{\delta\bar u^0_{(n)}}=0$$

$$\tilde\Gamma^0_n=\Gamma^0_n+\frac{1}{2}\xi_A(C^{Aa})^2+\frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2 \tag{8.171}$$

也取（8.120）的 j，ξ，$\bar\xi$ 的变换，又和（8.73）~（8.78）一样，得到：

$$\Gamma[A^0_{(n)},B^0_{(n)},s^0_{(n)},s^{+0}_{(n)},u^0_{(n)},\bar u^0_{(n)},K^0_{(n)},L^0_{(n)}]=\Gamma[S^0_n] \tag{8.172}$$

右方 $\Gamma[S^0_n]$ 是用（8.169）的 $S+\Delta_nS$ 做出来的，$\Gamma[S^0_n]$ 给出的所有 1*PI* 图到 n 圈为止不发散①：

把（8.172）和（8.167）代入（8.171），就得到 $\Gamma[S^0_n]$ 的 *Slavnov* 恒等式：

$$\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^A_i}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta A_i}+\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^B_\mu}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta B_\mu}$$

$$+\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^s_l}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta s_l}+\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^{s+}_l}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta s^+_l}+\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta L_a}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta u_a}=0$$

$$-F_i^{Aa}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^A_i}-c_l^{Aa}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^s_l}-c_l^{Aa+}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^{s+}_l}-\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta\bar u_a}=0$$

$$-F_\mu^{B}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^B_\mu}-c_l^{B}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^s_l}-c_l^{B+}\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta K^{s+}_l}-\frac{\delta\tilde\Gamma(S^0_n)}{\delta\bar u}=0 \tag{8.173}$$

$$\tilde\Gamma(S^0_n)=\Gamma(S^0_n)+\frac{1}{2}\xi_A(C_2^{Aa})^2+\frac{1}{2}\xi_B(C^B)^2$$

规范确定项在（8.167）的变换下不变，不过要注意在 C^{Aa} 和 C^B 中不应写 s^0_l，s^{0+}_l，而必须写 $(Z_s)^{1/2}_n s_l$ 和 $(Z_s)^{1/2}_n s^+_l$。由于 $(v_l)_n$，$(v^+_l)_n$ 是常数，

---

① 注意在(8.172)中，S^0_n 的规范确定项里出现的是 $(Z_s)^{1/2}_n s_l$ 和 $(z_g)^{1/2}_n s^+_l$，不是 $s^0_l=(z_s)^{1/2}(s_l+v_l)$ 和 $s^{0+}_l=(z_s)^{1/2}(s^+_l+v^+_l)$。在 $F-P$ 项中 $\bar u_a M_{ab} u_b$ 也应有相应规定，以保证 *B. R. S.* 不变。但在线性规范时，$F-P$ 项中这个区别显不出来。

$$\delta s_l = \delta s_l, \ \delta s_l^+ = \delta \bar{s}_l^+ \tag{8.174}$$

在 $\tilde{\Gamma}$ (S_n^0) 中，消去了一到 n 圈的发散。$v_{l(1)}, v_{l(2)}, \cdots, v_{l(n)}$; $v_{l(1)}^+, v_{l(2)}^+, \cdots, v_{l(n)}^+$ 也与一到 n 圈的蝌蚪图发散项相抵消。在 $n+1$ 圈时，则要求 $v_{l(n+1)}$ 和 $v_{l(n+1)}^+$ 与 ($n+1$) 圈的蝌蚪图发散项相抵消。

没有自发破缺时，$v_{l(0)} = v_{l(0)}^+ = 0$。所以，在 $S[A, B, s, s^+, u, \bar{u}, K, L]$ 里面，树图 s_l, s_l^+ 就是 (8.167) 的 $\bar{s}_l$ 和 $\bar{s}_l^+$。同样，没有自发破缺时，(8.131) 代入 $\tilde{S}_{n+1}^0 - \tilde{S}_n^0$ 后求出的 (8.132) 中应把 s_l 理解为 $\bar{s}_l$。同时 (8.129) 中的 $-\beta_2(\epsilon)(K_l^s - c_l^a \bar{u}_a)s$ 应理解为 $-\beta_2(\epsilon)(K_l^s - c_l^a \bar{u}_a)\bar{s}_l$。并且 (8.122), (8.124), (8.125) 中的 $\frac{\delta}{\delta s_l}$ 都理解为 $\frac{\delta}{\delta \bar{s}_l}$。于是推出的 (8.130) 中 $s_l \frac{\delta}{\delta s_l}$ 换成 $\bar{s}_l \frac{\delta}{\delta \bar{s}_l}$，正好被 (8.132) 抵消。这个理解对下面的证明中遇到的没有自发破缺的 s_l 和 s_l^+ 也适用。

顺便说一下，(8.173) 也可以不通过 Γ_n^0 而直接自 S_n^0 推出。根据 (8.167), (8.164), (8.169):

$$\begin{aligned}
S_n^0 = & L_{inv}[((Z_3)_n^{1/2} A] + L_{inv}[((Z_3')_n^{1/2} B] - ((Z_s)_n^{1/2} Ds_l)^2 \\
& - (Z_\Lambda)_n \Lambda (s_l^+ s_l)^2 - (Z_\mu)_n \mu^2 (s_l^+ s_l) - \frac{1}{2}\xi_A (C^{Aa})^2 - \frac{1}{2}\xi_B (C^B)^2 \\
& + (K_i^A - F_i^{Aa}\bar{u}_a)((\tilde{Z}_3)_n \Delta_i^{Ab} + (\tilde{Z}_1)_n g t_{ij}^b A_j) u_b \\
& + (K_\mu^B - F_\mu^B \bar{u})(\tilde{Z}_3')_n \Delta_\mu^B u \\
& + (K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B \bar{u})\left(-\frac{i}{2}(\tilde{Z}_1)_n g \tau_{lk}^b s_k u_b - \frac{i}{2}(\tilde{Z}_1')_n g' s_l u\right) \\
& + (K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})\left(+\frac{i}{2}(\tilde{Z}_1)_n g s_k^+ \tau_{kl}^b u_b + \frac{i}{2}(\tilde{Z}_1')_n g' s_l^+ u)\right) \\
& + \frac{1}{2}(\tilde{Z}_1)_n g L_a f_{abc} u_b u_c
\end{aligned} \tag{8.175}$$

S_n^0 在下列 *B. R. S.* 变换下不变（这个变换可自 $A_{i(n)}^0 B_{\mu(n)}^0 \cdots$ 的变换 (8.170) 和 (8.167) 得来，取 $\delta\lambda^0 = (Z_3)_n^{1/2} (\tilde{Z}_3)_n^{1/2} \delta\lambda = (Z_3')_n^{1/2} (\tilde{Z}_3')_n^{1/2} \delta\lambda$):

$$\delta A_i = ((\tilde{Z}_3)_n \Delta_i^{Ab} + g(\tilde{Z}_1)_n t_{ij}^b A_j) u_b \delta\lambda = \frac{\delta S_n^0}{\delta K_i^A}\delta\lambda$$

$$\delta B_\mu = (\tilde{Z}_3')_n \Delta_\mu^B u \delta\lambda = \frac{\delta S_n^0}{\delta K_\mu^B}\delta\lambda$$

$$\delta s_l = -\frac{i}{2}(\tilde{Z}_1)_n g \tau_{lk}^b s_k u_b - \frac{i}{2}(\tilde{Z}_1')_n g' s_l u = \frac{\delta S_n^0}{\delta K_l^s}\delta\lambda$$

$$\delta s_l^+ = \frac{i}{2}(\tilde{Z}_1)_n g s_k^+ \tau_{kl}^b u_b + \frac{1}{2}(\tilde{Z}_1')_n g' s_l^+ u = \frac{\delta S_n^0}{\delta K_l^{s+}}\delta\lambda$$

$$\delta u_a = -\frac{1}{2} g (\tilde{Z}_1) f_{abc} u_b u_c \delta\lambda = -\frac{\delta S_n^0}{\delta L_a}\delta\lambda$$

$$\delta \bar{u}_a = \xi_A (F_i^{Aa} A_i + c_k^A s_k + c_k^{Aa+} s_k^+) \delta\lambda = \xi_A C^{Aa} \delta\lambda$$

$$\delta u = 0$$

$$\delta \bar{u} = \xi_B (F_\mu^B B_\mu + c_k^B s_k + c_k^{B+} s_k^+) \delta\lambda = \xi_B C^B \delta\lambda \tag{8.176}$$

有了（8.176）和 S_n^0 在（8.176）变换下的不变性，经过类似于（4.23），（4.44），（4.48），（4.49）的推导，就可以得出（8.173）——用 S_n^0 算出的 $\tilde{\Gamma}$（S_n^0）的 *Slavnov* 恒等式。

然后，也是对 $\tilde{\Gamma}$（S_n^0）作圈数展开，则 $\tilde{\Gamma}_{(1)}$（S_n^0），$\tilde{\Gamma}_{(2)}$（S_n^0）…，$\tilde{\Gamma}_{(n)}$（S_n^0）都不发散，只有 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}$（S_n^0）有发散，其发散部分是 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}$（$S_n^0$）。

定义 $\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 + \mathscr{G}_1$

$$\mathscr{G}_0 = \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_i^A}\frac{\delta}{\delta A_i} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_\mu^B}\frac{\delta}{\delta B_\mu} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_l^s}\frac{\delta}{\delta S_l} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta K_l^{s+}}\frac{\delta}{\delta S_l^+} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta L_a}\frac{\delta}{\delta \mathrm{u}_a}$$

$$\mathscr{G}_1 = \frac{\delta \tilde{S}}{\delta A_i}\frac{\delta}{\delta K_i^A} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta B_\mu}\frac{\delta}{\delta K_\mu^B} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta S_l}\frac{\delta}{\delta K_l^s} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta S_l^+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}} + \frac{\delta \tilde{S}}{\delta \mathrm{u}_a}\frac{\delta}{\delta L_a} \tag{8.177}$$

它们也满足

$$\mathscr{G}_0 \cdot \mathscr{G}_0 = 0, \mathscr{G}_0 \cdot \mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_1 \cdot \mathscr{G}_0 + \mathscr{G}_1 \cdot \mathscr{G}_1 = 0, \qquad \mathscr{G} \cdot \mathscr{G} = 0$$

（这里并没有$\frac{\delta}{\delta u}$，所以和前面的例子很类似，只是在 $\mathscr{G}_0 \cdot \mathscr{G}_0$ 中多出来一些含 u 的项，但又总是以 $uau + uua$（$=0$）和 uu（$=0$）的形式出现，所以也没有贡献）。

有了 $\mathscr{G}$和（8.173），可知 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}$（$S_n^0$）满足如下方程：

$$\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) * \tilde{S} + \tilde{S} * \tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) = (\mathscr{G}_0 + \mathscr{G}_1)\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0)$$

$$\left(-F_i^{Aa}\frac{\delta}{\delta K_i^A} - c_l^{Aa}\frac{3}{\delta K_l^s} - c_l^{Aa+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}} - \frac{\delta}{\delta \bar{u}_a}\right)\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) = 0$$

$$\left(-F_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B} - c_l^B\frac{\delta}{\delta K_l^s} - c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}} - \frac{\delta}{\delta \bar{u}}\right)\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}(S_n^0) = 0 \tag{8.178}$$

现在的问题是找出满足（8.178）的 $\tilde{\Gamma}_{(n+1)}^{\text{div}}$（$S_n^0$）的普遍解。

我们注意到（8.178），（8.173）以及 $\mathscr{G}$中都没有$\frac{\delta}{\delta u}$，因此不妨把解分成三类，一类不含 $F-P$ 场，第二类含 $F-P$ 场，而且含有 u_a（也包括既含 u_a 又含 u），第三类含 $F-P$ 场，但有 u 没有 u_a。对于前两类的解，在附录二里讨论过的证明仍适用。就是说，前两类的普遍解具有如下形式：

$$G[A.B.s] + \mathscr{G}\mathscr{F}[A,B,s,s^+,\bar{u}_a,u_a,\bar{u},K,L] \tag{8.179}$$

当然，（8.179）也包括不含 u_a 但含 u 的解（见后面的 F），但它不能包括全部的不含 u_a 但含 u 的解，所以后面我们还要讨论第三类的完全解。

先看 G〔A，B，s〕，规范不变的、量纲为 4 的定域泛函只有 L_{inv}〔A〕，L_{inv}〔B〕，$-(Ds_l)^2$，V（s^+s）四种，所以 G〔A，B，s〕的一般形式是（$\epsilon = n-4$）

$$G[A,B,s] = \alpha(\epsilon)L_{inv}[A] + \alpha'(\epsilon)L_{inv}[B] - a''(\epsilon)(Ds_l)^2$$

$$- \zeta(\epsilon)\Lambda(s_l^+ s_l)^2 - \zeta'(\epsilon)\mu^2(s_l^+ s_l) \tag{8.180}$$

$\alpha(\epsilon)$，$\alpha'(\epsilon)$，$\alpha''(\epsilon)$，$\zeta(\epsilon)$ 都含有$\frac{1}{n-4}$极点。

再看$\mathscr{F}[A, B, s, s^+, \bar{u}_a, u_a, \bar{u}, K, L]$，它要满足（8.178）的第二、第三两个方程，所以$\mathscr{F}$可以更具体化一些，即应该取

$$\mathscr{F}[A,B,s,s^+,0,u_a,0,K_i^A - F_i^{Aa}\bar{u}_a,K_\mu^B - F_\mu^B\bar{u},$$
$$K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u},K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u},L] \tag{8.181}$$

的形式。再考虑到$\mathscr{F}$的 F－P 荷是－1，每一项只有一个 K 或一个 L，指标要全部收缩掉，于是$\mathscr{F}$全部可能的项有以下七种形式：

$$(K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})\ A_i$$
$$(K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\ B_\mu \text{（以后给出 } F\text{，属第三类）}$$
$$K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\ S_l$$
$$(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\ S_l^+$$
$$(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\ (d_{lm}^b c_m^{Ab+} + ec_l^{B+})$$
$$(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^B + \bar{u})\ (d_{ml}^{b+} c_m^{Ab} + e^+ c_l^B)$$
$$L_a u_a \tag{8.182}$$

说明三点：

1. $(K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})\ t_{ij}^b t_{jk}^b A_k$ 也是满足要求的，但由于 $t_{ij}^b t_{jk}^b \sim C(G)\ \delta_{ik}$，又回到 $(K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})\ A_i$。同样，$(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\ \tau_{lm}^b \tau_{mk}^b s_k$ 也满足要求，但由于 $\tau_{lm}^b \tau_{mk}^b \sim C(R)\ \delta_{ik}$，又回到 $(K_l^s - C_l^{Aa}\bar{u}_a - C_l^B\bar{u})\ S_l$。所以（8.182）中不需要考虑若干个 t，τ 相乘的项。

2. 由于传播子$\overline{s_k^+ s_k^+} = 0$，$\overline{s_k s_k} = 0$，$\overline{s_k s_k^+} \neq 0$，所以排除了 $K_l^s s_l^+$ 和 $K_l^{s+} s_l$ 这两种 l 指标收缩的项。

3. 从微扰论看到，d_{ml}^b，d_{ml}^{b+} 是群协变常数，e^+，e 是群不变常数。也是因$\overline{S_l^+ S_l^+} = 0$，$\overline{S_l S_l} = 0$，$\overline{S_l S_l^+} \neq 0$，$K_l^s$ 只与 c_m^{Ab+}，c_m^{B+} 相乘，K_l^{s+} 只与 c_m^{Ab}，c_m^B 相乘。

以上三点进一步说明了$\mathscr{F}$中只有（8.182）的七个形式的项。

现在来看第三类的解。正如上面所说的，Joglekar 和 Lee 的解在有 Abel 子群时是不完全的，其中含 u 的解不是普遍解，所以我们现在要从微扰出发来看含 u 的项。

首先，从微扰看到，$\tilde{\Gamma}$ 中必定有一项是 $u\bar{u}$ 自能项 $\sim \bar{u}F_\mu^B \Delta_\mu^B u$（$\sim \bar{u}\Delta^{u-1}u$）。由于方程（8.178）的第三式必须满足，$\tilde{\Gamma}$ 中这一项必定以

$$\sim (K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\Delta_\mu^B u \tag{8.183}$$

形式出现。

同时，自 $c_\mu^B \bar{u} s_l u$ 出发做微扰，$\tilde{\Gamma}$ 中必定有 $\sim C_l^B \bar{u} s_l u$ 的项（重正化的 $\bar{u}s_l n$ 顶点）。由于要满足（8.178）的第二式、第三式，这个项必定以如下形式出现：

$$\sim (K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})s_l u \tag{8.184}$$

同理还有如下的项：

$$\sim (K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B}\bar{u})s_l^+ u \tag{8.185}$$

$\mathscr{G}$作用在这些项上的结果是：

$$\mathscr{G}(K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\Delta_\mu^B u = \frac{\delta L'_{inv}}{\delta B_\mu}\Delta_\mu^B u$$

$$\mathscr{G}(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\left(-\frac{i}{2}\right)g's_l u = \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}\left(-\frac{i}{2}g's_l u\right)$$

$$\mathscr{G}(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})\left(\frac{i}{2}\right)g's_l^+ u = \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}\left(\frac{i}{2}g's_l^+ u\right) \tag{8.186}$$

右方相加得

$$\frac{\delta L'_{inv}}{\delta B_\mu}\Delta_\mu^B u + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}\left(-\frac{i}{2}g's_l u\right) + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}\left(\frac{i}{2}g's_l^+ u\right) = 0 \tag{8.186$'$}$$

因为正好是 L'_{inv}在 Abel 子群中的规范变换，而 L'_{inv}在这种规范变换中是不变的（从而右方得零）。因此（8.183），（8.184），（8.185）组成的：

$$\begin{aligned}&(K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\Delta_\mu^B u \\ &\quad + (K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\left(-\frac{i}{2}\right)g's_l u \\ &\quad + (K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})\left(\frac{i}{2}\right)g's_l^+ u \\ &= u\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u}\end{aligned} \tag{8.187}$$

是一个解，而且是一个不能写成（8.179）形式的第三类的解。

此外，在 L'_{inv}规范不变的前提下，可利用（8.186）$'$和 L'_{inv}在非 Abel 规范变换下不变的类似于（8.186）$'$的关系式得出：

$$\begin{aligned}\mathscr{G}B_\mu\frac{\delta L'_{inv}}{\delta B_\mu} &= \frac{\delta L'_{inv}}{\delta B_\mu}\Delta_\mu^B u \\ \mathscr{G}A_i\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i} &= \frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}\Delta_i^{Aa} u_a \\ \mathscr{G}s_l\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l} &= 0 \\ \mathscr{G}s_l^+\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+} &= 0\end{aligned} \tag{8.188}$$

显然其中 $B_\mu\dfrac{\delta L'_{inv}}{\delta B_\mu}$和（8.183）也组成一个第三类的解，即

$$F = B_\mu\frac{\delta L'_{inv}}{\delta B_\mu} - (K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)\Delta_\mu^B u$$
$$(= \mathscr{G}(K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)B_\mu) \tag{8.189}$$

这个解正好是（8.182）的第二式代入（8.179）得来的，所以它是一个可以写成（8.179）形式的第三类的解。

现在要说明一下：（8.187）和（8.189）是含 u 而不含 u_a 的全部的解。可以这样

看，因为 u 的 F－P 荷为 +1，它在 $\tilde{\Gamma}$ 中出现时，必定只能是以 $K_\mu^B u$，$K_l^s u$，$K_l^{s+} u$，$K_i^A u$，$L_a u_a u$，$\bar{u}u$，$\bar{u}_a u$ 形式结合在一起。$K_i^A u$ 是要排除的，因为从（8.164）的 S 看到，K_i^A 和 u 的结合必须用 $K_i^A t_{ij}^b A_j u_b$、$c_l^{Ab}\bar{u}_b s_l u$ 和 $s_l^A u A_\mu \partial_\mu s_l$ 三种顶点来得到。结果给出的外线最少的 $1PI$ 是

$$K_i^A c_l^{Ab} s_l u$$

与此相仿还有

$$K_i^A c_l^{Ab+} s_l^+ u$$

它们可以从量纲的考虑来排除，取（见 8.65，并考虑到 c_l^{Ab}，c_l^{Ab+} 的量纲为 1）

$$D(\Gamma) = \sum_i n_i\left(d_i + b_i + \frac{3}{2}f_i - 4\right) - E_B - \frac{3}{2}E_F + 4$$

$$0 = 2\sum_i n_i k_i - 2E_K$$

$$0 = 2\sum_i n_i l_i - 2E_L$$

$$0 = \sum_i n_i c_i - E_c \text{（} c_i \text{ 是 } i \text{ 顶点 } c_l, c_l^+ \text{ 的个数(0 或 1)。} E_c \text{ 是 } 1PI \text{ 中 } c_l, c_l^+ \text{ 个数）}$$

$$\therefore \quad D(\Gamma) = \sum_i n_i\left(d_i + b_i + \frac{3}{2}f_i + 2k_i + 2l_i + c_i - 4)\right)$$

$$- E_B - \frac{3}{2}E_F - 2E_K - 2E_L - E_c + 4 \tag{8.190}$$

重新定义

$$\delta_i = \left(d_i + b_i + \frac{3}{2}f_i + 2k_i + 2l_i + c_i - 4\right) \tag{8.191}$$

则（8.164）中每一个相互作用顶点，包括含有 c，c_l^+ 的顶点，都满足 $\delta_i = 0$，所以

$$D(\Gamma) = 4 - E_B - \frac{3}{2}E_F - 2E_K - 2E_L - E_c \tag{8.192}$$

所以 $K_i^A c_l^{Ab} s_l u$ 或 $K_i^A c_l^{Ab+} s_l^+ u$ 形式的 $1PI$ 项的 D（Γ） = −1。不发散，从而不会进入 $\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}$（$S_n^0$），这就排除了（$K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa}$）$u$ 的组合。图 8.24 就是一个例子：此图显然 D（Γ） = −1。

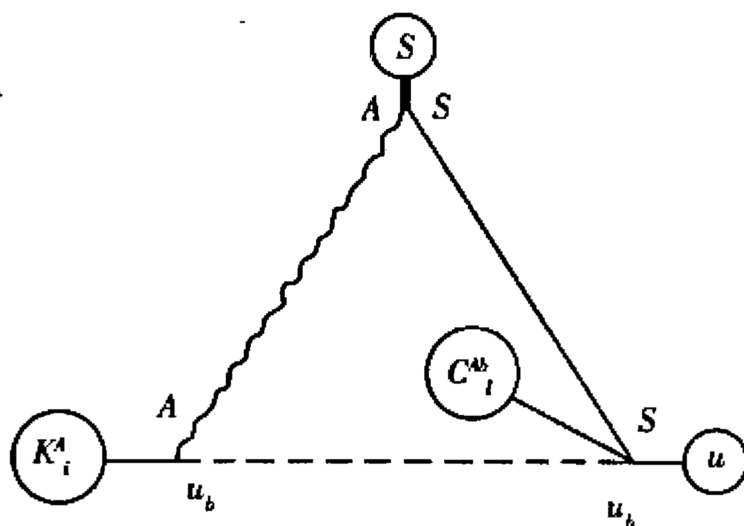


图 8.24

$L_a u_a u$ 也是要排除的，因为含有 u_a。实际上 L_a 在 $\tilde{S}$ 中以 $L_a f_{abc} u_b u_c$ 形式出现，

出发做微扰，得不到 $L_a u_a$ 这样的 a 指标收缩的 $\tilde{\Gamma}$ 项。

再看 $\bar{u}u$ 和 $\bar{u}_a u_a$。如果仅出现一对，则从微扰论和（8.173）的第二、第三方程给出了（8.183），（8.184），（8.185）（合并成（8.187））和（8.189），它们是 1PI 的只含一个 u，不含 u_a 的仅有的项。

如果是出现两对，则首先排除 $\bar{u}\,u\,\bar{u}u$，$\bar{u}_a u\,\bar{u}_b u$，因为 $uu=0$。其次，$\bar{u}_a u_b\,\bar{u}u$

除，因为它含有 u_b，不属于第三类，而属于第二类。于是，进入 $\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}$（$S_n^0$）含 u_a 只含 u 的项只能含一对 $\bar{u}_a u$ 和 $\bar{u}u$，即只能由（8.183），（8.184），（8.185（8.189）来提供 $\bar{u}_a u$ 和 $\bar{u}u$。又考虑要满足（8.178）第一方程，则对照（8.1（8.188）可以看到，只有（8.187），（8.189）两种组合是满足方程（8.178）此外，（8.183），（8.184），（8.185）的别种组合，或加上别的东西，都不能（8.178）第一方程，（8.186）的右方的。

这样，我们就找到了只含 u 不含 u_a 的全部的解：（8.187）和（8.189）。

把所找到的全部的解都写出来：

$$
\begin{aligned}
A &= L_{inv}[A] \\
B &= L_{inv}[B] \\
C &= -(Ds_a)^2 \\
D &= -\Lambda(s_l^+ s_l)^2, \qquad D' = -\mu^2(s_l^+ s_l) \\
E &= \mathscr{S}(K_i^A - \bar{u}_a F_i^{Aa})A_i \\
F &= \mathscr{S}(K_\mu^B - \bar{u}F_\mu^B)B_\mu \qquad (\text{见}(8.189)) \\
G &= \mathscr{S}(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})s_l \\
H &= \mathscr{S}(K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})s_l^+ \\
I &= \mathscr{S}(K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})(d_{lm}^b c_m^{Ab+} + ec_l^{B+}) \\
J &= \mathscr{S}(K_l^{s+} - c^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})(d_{lm}^{b+} c_m^{Ab} + e^+ c_l^B) \\
K &= \mathscr{S}(L_a u_a) \\
L &= u\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u}(\text{见}(8.187))
\end{aligned}
\qquad (8.
$$

为了方便，再把这十三个独立的解重新组合一下（注意反对易关系）：

$$
\begin{aligned}
A + K = {} & \frac{A_i}{2}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_i} - \frac{g}{2}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial g} + \frac{L_a}{2}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_a} - \frac{1}{2}\left(K_i^A\frac{\delta}{\delta K_i^A} + u_a\frac{\delta}{\delta u_a} + \bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}\right)\tilde{S} \\
& + \frac{1}{2}c_l^{Aa}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta c_l^{Aa}} + \frac{1}{2}c_l^{Aa+}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta c_l^{Aa+}}
\end{aligned}
\qquad (8.1
$$

（凡是 gA_i 组合出现的时候，$\left(\frac{A_i}{2}\frac{\delta}{\delta A_i} - \frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial g}\right)$作用上去都为零。）

$$
B - L = \frac{B_\mu}{2}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta B_\mu} - \frac{g'}{2}\frac{\partial\tilde{S}}{\partial g'} - \frac{1}{2}\left(K_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B} + u\frac{\delta}{\delta u} + \bar{u}\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right)\tilde{S}
$$

$$+\frac{1}{2}c_l^B\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta c_l^B}+\frac{1}{2}c_l^{B+}\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta c_l^{B+}} \tag{8.194$_2$}$$

$$C+2D+D'=\frac{s_l}{2}\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta s_l}+\frac{s_l^+}{2}\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta s_l^+}-\frac{1}{2}\left(K_l^s\frac{\delta}{\delta K_l^s}+c_l^{A^a}\frac{\delta}{\delta c_l^{A^a}}+c_l^B\frac{\delta}{\delta c_l^B}\right)\widetilde{S}$$

$$-\frac{1}{2}\left(K_l^{s+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}+c_l^{A^{a+}}\frac{\delta}{\delta c_l^{A^{a+}}}+c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta c_l^{B+}}\right)\widetilde{S} \tag{8.194$_3$}$$

$$D=-\Lambda\ (s_l^+s_l)^2=\Lambda\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta\Lambda}\qquad D'=-\mu^2\ (s_l^+s_l)\ =\mu^2\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta\ (\mu^2)} \tag{8.194$_4$}$$

$$-E-K=-A_i\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta A_i}+\left(K_i^A\frac{\delta}{\delta K_i^A}+u_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}\right)\widetilde{S}$$

$$-\left(c_l^{A^a}\frac{\delta}{\delta c_l^{A^a}}+c_l^{A^{a+}}\frac{\delta}{\delta c_l^{A^{a+}}}\right)\widetilde{S}-L_a\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta L_a} \tag{8.194$_5$}$$

$$-F+L=-B_\mu\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta B_\mu}+\left(K_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B}+u\frac{\delta}{\delta u}+\bar{u}\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right)\widetilde{S}$$

$$-\left(c_l^B\frac{\delta}{\delta c_l^B}+c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta c_l^{B+}}\right)\widetilde{S} \tag{8.194$_6$}$$

$$-G=\left(K_l^s\frac{\delta}{\delta K_l^s}+c_l^{A^a}\frac{\delta}{\delta c_l^{A^a}}+c_l^B\frac{\delta}{\delta c_l^B}-s_l\frac{\delta}{\delta s_l}\right)\widetilde{S} \tag{8.194$_7$}$$

$$-H=\left(K_l^{s+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}+c_l^{A^{a+}}\frac{\delta}{\delta c_l^{A^{a+}}}+c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta c_l^{B+}}-s_l^+\frac{\delta}{\delta s_l^+}\right)\widetilde{S} \tag{8.194$_8$}$$

$$I=\ (d_{lm}^b c_m^{A^{b+}}+ec_l^{B+})\ \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta s_l} \tag{8.194$_9$}$$

$$J=(d_{ml}^{b+}c_m^{A^b}+e^+c_l^B)\ \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta s_l^+} \tag{8.194$_{10}$}$$

$$-K+L=\frac{1}{2}\left(K_i^A\frac{\delta}{\delta K_i^A}+u_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}+K_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B}+u\frac{\delta}{\delta u}+\bar{u}\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right.$$

$$\left.+K_l^s\frac{\delta}{\delta K_l^s}+K_l^{s+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}\right)\widetilde{S} \tag{8.194$_{11}$}$$

$$L=u\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta u} \tag{8.194$_{12}$}$$

于是，$\widetilde{\Gamma}^{r\,\text{div}}_{(n+1)}\ (S_n^0)$ 的最一般形式是：

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}\ (S_n^0)\ =&\ \alpha\ (\epsilon)\ (A+K)\ +\alpha'\ (\epsilon)\ (B-L)\ +\alpha''\ (\epsilon)\ (C+2D+D')\\&+\zeta\ (\epsilon)\ D+\zeta'\ (\epsilon)\ D'\\&+\beta\ (\epsilon)\ (-E-K)\ +\beta'\ (\epsilon)\ (-F+L)\ +\beta_1''\ (\epsilon)\ (-G)\ +\beta_2''\ (-H)\\&+\delta_1\ (\epsilon)\ I+\delta_2\ (\epsilon)\ J\\&-\gamma\ (\epsilon)\ (-K+L)\end{aligned}$$

$$+\eta(\epsilon)L$$

$$
\begin{aligned}
=\Big\{&\left(\frac{\alpha(\epsilon)}{2}-\beta(\epsilon)\right)\left(A_i\frac{\delta}{\delta A_i}+L_a\frac{\delta}{\delta L_a}\right)+\left(\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}\right)-\beta'(\epsilon)\Big)B_\mu\frac{\delta}{\delta B_\mu}\\
&+\left(\frac{\alpha''(\epsilon)}{2}-\beta''(\epsilon)\right)\left(s_l\frac{\delta}{\delta s_l}+s_l^+\frac{\delta}{\delta s_l^+}\right)-\frac{\alpha(\epsilon)}{2}g\frac{\partial}{\partial g}-\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}g'\frac{\partial}{\partial g'}\\
&+\left(-\frac{\alpha(\epsilon)}{2}+\beta(\epsilon)-\frac{\gamma(\epsilon)}{2}\right)\left(K_i^A\frac{\delta}{\delta K_i^A}+u_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}\right)\\
&+\left(-\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}+\beta'(\epsilon)-\frac{\gamma(\epsilon)}{2}\right)\left(K_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B}+u\frac{\delta}{\delta u}+\bar{u}\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right)\\
&+\Big[-\left(\frac{\alpha''(\epsilon)}{2}-\beta''(\epsilon)\right)+\left(-\frac{\alpha(\epsilon)}{2}+\beta(\epsilon)-\frac{\gamma(\epsilon)}{2}\right)\\
&+\left(\frac{\alpha(\epsilon)}{2}-\beta(\epsilon)\right)\Big]\left(K_l^s\frac{\delta}{\delta K_l^s}+K_l^{s+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}\right)\\
&+\left[\left(\frac{\alpha(\epsilon)}{2}-\beta(\epsilon)\right)-\left(\frac{\alpha''(\epsilon)}{2}-\beta''(\epsilon)\right)\right]\left(c_l^{Aa}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa}}+c_l^{Aa+}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa+}}\right)\\
&+\left[\left(\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}-\beta'(\epsilon)\right)-\left(\frac{\alpha''(\epsilon)}{2}-\beta''(\epsilon)\right)\right]\left(c_l^{B}\frac{\delta}{\delta c_l^{B}}+c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta c_l^{B+}}\right)\\
&-v_{l(n+1)}\frac{\delta}{\delta s_1}-v_{l(n+1)}^+\frac{\delta}{\delta s_1^+}+\zeta(\epsilon)\Lambda\frac{\delta}{\delta\Lambda}+\zeta'(\epsilon)\mu^2\frac{\delta}{\delta(\mu^2)}\Big\}\cdot\\
&\tilde{S}[A,B,s,s^+,u,\bar{u},K,L]
\end{aligned}
\tag{8.195}
$$

此地取

$$v_{l(n+1)}=-(d_{lm}^b c_m^{Ab+}+ec_l^{B+})\delta_1(\epsilon),\qquad v_{l(n+1)}^+=-(d_{lm}^{b+}c_m^{Ab}+ec_l^{B})\delta_2(\epsilon)。$$

和前一样得到类似于（8.132）的表达式：

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_{n+1}^0=\tilde{S}_n^0+\eta^{n+1}\Big\{&\frac{1}{2}z_{3(n+1)}\left(A_i\frac{\delta}{\delta A_i}+L_a\frac{\delta}{\delta L_a}\right)+\frac{1}{2}z'_{3(n+1)}B_\mu\frac{\delta}{\delta B_\mu}\\
&+\frac{1}{2}z_{s(n+1)}\left(s_l\frac{\delta}{\delta s_l}+s_l^+\frac{\delta}{\delta s_l^+}\right)+\left(\tilde{z}_{1(n+1)}-\tilde{z}_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z_{3(n+1)}\right)g\frac{\partial}{\partial g}\\
&\qquad+\left(\tilde{z}'_{1(n+1)}-\tilde{z}'_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z'_{3(n+1)}\right)g'\frac{\partial}{\partial g'}\\
&+\frac{1}{2}\tilde{z}_{3(n+1)}\left(K_i^A\frac{\delta}{\delta K_i^A}+u_a\frac{\delta}{\delta u_a}+\bar{u}_a\frac{\delta}{\delta\bar{u}_a}\right)+\frac{1}{2}\tilde{z}'_{3(n+1)}\left(K_\mu^B\frac{\delta}{\delta K_\mu^B}+u\frac{\delta}{\delta u}+\bar{u}\frac{\delta}{\delta\bar{u}}\right)\\
&+\left(\frac{1}{2}\tilde{z}_{3(n+1)}+\frac{1}{2}z_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z_{s(n+1)}\right)\left(K_l^s\frac{\delta}{\delta K_l^s}+K_l^{s+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}}\right)\\
&+\left(\frac{1}{2}z_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z_{s(n+1)}\right)\left(c_l^{Aa}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa}}+c_l^{Aa+}\frac{\delta}{\delta c_l^{Aa+}}\right)\\
&+\left(\frac{1}{2}z'_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z_{s(n+1)}\right)\left(c_l^{B}\frac{\delta}{\delta c_l^{B}}+c_l^{B+}\frac{\delta}{\delta c_l^{B+}}\right)\\
&+v_{l(n+1)}\frac{\delta}{\delta s_l}+v_{l(n+1)}^+\frac{\delta}{\delta s_l^+}+(z_{\Lambda(n+1)}-2z_{s(n+1)})\Lambda\frac{\delta}{\delta\Lambda}\\
&+(z_{\mu(n+1)}-z_{s(n+1)})\mu^2\frac{\delta}{\delta(\mu^2)}\Big\}\tilde{S}[A,B,s,s^+,u,\bar{u},K,L]
\end{aligned}
\tag{8.196}
$$

只要取

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}z_{3(n+1)} &= \frac{\alpha(\epsilon)}{2}-\beta(\epsilon) \qquad z_{\Lambda(n+1)}-2z_{s(n+1)} = -\zeta(\epsilon)\\
-\frac{1}{2}z'_{3(n+1)} &= \frac{\alpha'(\epsilon)}{2}-\beta'(\epsilon) \qquad z_{\mu(n+1)}-z_{s(n+1)} = -\zeta'(\epsilon)\\
-\frac{1}{2}z_{s(n+1)} &= \frac{\alpha''(\epsilon)}{2}-\beta''(\epsilon)\\
-\frac{1}{2}\tilde{z}_{3(n+1)} &= -\frac{\alpha(\epsilon)}{2}+\beta(\epsilon)-\frac{\gamma(\epsilon)}{2}\\
-\frac{1}{2}\tilde{z}'_{3(n+1)} &= -\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}+\beta'(\epsilon)-\frac{\gamma(\epsilon)}{2}\\
\tilde{z}_{1(n+1)}-\tilde{z}_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z_{3(n+1)} &= +\frac{\alpha(\epsilon)}{2}\\
\tilde{z}'_{1(n+1)}-\tilde{z}'_{3(n+1)}-\frac{1}{2}z'_{3(n+1)} &= +\frac{\alpha'(\epsilon)}{2}
\end{aligned}
\tag{8.197}
$$

就可以让（8.196）与（$n+1$）圈（O（η^{n+1}））的发散项（8.195）的 $\eta^{n+1}\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}$（$S^0_n$）抵消。这正是我们要证明的第一点。其中还有一些值得注意的事：

1. 由于 u，$\bar{u}$ 有共同的重正化常数 $\tilde{Z}'_3$，所以在（8.195）中，$u\dfrac{\delta}{\delta u}$与 $\bar{u}\dfrac{\delta}{\delta\bar{u}}$应处于对称的地位，从而要求 η（ϵ）$=0$。事实上在（8.195）中已取 η（ϵ）$=0$。

2. 由于 S_l，S_l^+ 有共同的重正化常数 Z_s（即传播子$\overline{s_l s_l^+}$的重正化常数 Z_s，所以在（8.195）中 $s_l\dfrac{\delta}{\delta s_l}$与 $s_l^+\dfrac{\delta}{\delta s_l}$也应处于对称的地位，从而要求 β''_1（ϵ）$=\beta''_2$（ϵ）β''（ϵ）。事实上在（8.195）中已经这样做了。

3. （8.197）给出 $\tilde{z}_{3(n+1)}+z_{3(n+1)}=\tilde{z}'_{3(n+1)}+\tilde{z}'_{3(n+1)}$，从而证实了（$Z_3$）$_L$（$\tilde{Z}_3$）$_L$ $=$（Z'_3）$_L$（$\tilde{Z}'_3$）$_L$ 在各级近似中（L 取任何正整数）都是成立的。

4. 正如前面（8.131）那样，

$$
\begin{aligned}
s^0_{l(n+1)}-s^0_{l(n)} &= \frac{1}{2}\eta^{n+1}Z_{s(n+1)}(\bar{s}_l+v_{l(0)})+\eta^{n+1}v_{l(n+1)}+O(\eta^{n+2})\\
s^0_{l(n+1)}-s^{+0}_{l(n)} &= \frac{1}{2}\eta^{n+1}Z_{s(n+1)}(\bar{s}^+_l+v^+_{l(0)})+\eta^{n+1}v^+_{l(n+1)}+O(\eta^{n+2})\\
s_l &= \bar{s}_l+v_{l(0)}\\
s^+_l &= \bar{s}^+_l+v^+_{l(0)}
\end{aligned}
\tag{8.198}
$$

当 $v_{l(0)}=v^+_{l(0)}=0$，即没有真空自然破缺时，

$$
s_l=\bar{s}_l,s^+_l=\bar{s}^+_l
$$

现在再看与 S^0_n 相关的规范变换，它可从（8.156）把 A，B，$S\cdots$改成 A^0，B^0，$s^0\cdots$而得来：

$$
\begin{aligned}
\delta A^0_{i(n)} &= (\triangle^{A^a}_i+g^0_{(n)}t^a_{ik}A^0_{k(n)})\theta^{a^0}\\
\delta B^0_{\mu(n)} &= \triangle^B_\mu\theta^0
\end{aligned}
$$

$$\delta s_{l(n)}^{0} = -\frac{i}{2}(g_{(n)}^{0}\tau_{lm}^{a}s_{m(n)}^{0}\theta^{a0} + g_{(n)}^{0'}s_{l(n)}^{0}\theta^{0})$$

$$\delta s_{l(n)}^{+0} = \frac{i}{2}(g_{(n)}^{0}s_{m(n)}^{+0}\tau_{ml}^{a}\theta^{a0} + g_{(n)}^{0'}s_{l(n)}^{+0}\theta^{0})$$

再利用（8.167）把 A^0，B^0，s^0，…转换成 A，B，s，…，取

$$\theta^{a0} = (Z_3)_n^{1/2}\theta^a, \theta^0 = (Z_3')_n^{1/2}\theta$$

则有

$$\delta A_i = \left(\triangle_i^{Aa} + g\frac{(\tilde{Z}_1)_n}{(\tilde{Z}_3)_n}t_{ik}^{a}A_B\right)\theta^a$$

$$\delta B_\mu = (\triangle_\mu^B)\theta$$

$$\delta(\bar{s}_l + (v_l)_n) = -\frac{i}{2}\left(g\frac{(\tilde{Z}_1)_n}{(\tilde{Z}_3)_n}\tau_{lm}^{a}(\bar{s}_m + (v_m)_n)\theta^a + g'\frac{(\tilde{Z}'_1)_n}{(\tilde{Z}'_3)_n}(\bar{s}_l + (v_m)_n)\theta\right)$$

$$\delta(\bar{s}_l^{+} + (v_l)_n) = \frac{i}{2}\left(g\frac{(\tilde{Z}_1)_n}{(\tilde{Z}_3)_n}(\bar{s}_m^{+} + (v_m^{+})_n)\tau_{ml}^{a}\theta^a + g'\frac{(\tilde{Z}'_1)_n}{(\tilde{Z}'_3)_n}(\bar{s}_l^{+} + (v_m^{+})_n)\theta\right)$$

(8.199)

如果说，K，L，g，g'不变，而是$\triangle$，t，τ，f在变，则自

$$\tilde{S}_n^0 = L_{inv}\left[(Z_3)_n^{1/2}A\right] + L_{inv}\left[(Z'_3)_n^{1/2}B\right] - \frac{1}{2}\left((Z_s)_n^{1/2}Ds_l\right)^2 - \Lambda V\left((Z_s)_n s^+ s\right)$$

$$+ (K_i^A - F_i^{Aa}\bar{u}_a)\left((\tilde{Z}_3)_n\triangle_i^{Ab} + g(\tilde{Z}_1)_n t_{ij}^{b}A_j\right)u_i$$

$$+ (K_\mu^B - F_\mu^B\bar{u})\left((\tilde{Z}'_3)_n\triangle_\mu^B\right)u$$

$$+ (K_l^s - c_l^{Aa}\bar{u}_a - c_l^B\bar{u})\left(-\frac{i}{2}g(\tilde{Z}_1)_n\tau_{lk}^{b}(\bar{s}_k + (v_k)_n)u_b - \frac{i}{2}g'(\tilde{Z}'_1)_n(\bar{s}_l + (v_k)_n)u\right)$$

$$+ (K_l^{s+} - c_l^{Aa+}\bar{u}_a - c_l^{B+}\bar{u})\left(\frac{i}{2}g(\tilde{Z}_1)_n(\bar{s}_l^{+} + (v_m^{+})_n)\tau_{kl}^{b}u_b + \frac{i}{2}g'(\tilde{Z}'_1)_n(\bar{s}_k^{+} + (v_m^{+})_n)u\right)$$

$$+\frac{1}{2}gL_a(\tilde{Z}_1)_n f_{abc}u_b u_c \qquad (8.200)$$

看到，

$$\triangle_{i(n)}^{Ab0} = (\tilde{Z}_3)_n\triangle_i^{Ab}, \quad \triangle_{\mu(n)}^{B0} = (\tilde{Z}'_3)_n\triangle_\mu^B,$$

$$t_{ij(n)}^{b0} = (\tilde{Z}_1)_n t_{ij}^{b}, \quad \tau_{lk(n)}^{b0} = (\tilde{Z}_1)_n\tau_{lk}^{b},$$

$$f_{abc(n)}^{0} = (\tilde{Z}_1)_n f_{abc} \qquad (8.201)$$

（8.199），（8.200），（8.201）说明了重正化前后的规范群同构。这是第二点我们要证明的。

有费米场的情况前已讨论过。下一章讨论有真空自发破缺的情况。这种证明方法还

可以推广到有更多个 Abel 子群和非 Abel 子群的规范场[8]。

参 考 文 献

1 G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. , B50 (1972) 318.
2 J. Zinn – Justin, Trends in Elementary Particle Theory, Edited by H. Rollnik, K. Dietz (1976).
3 B. W. Lee, Methods in Field Theory, Edited by R. Balian, J. Zinn – Justin
4 E. Abers, B. W. Lee, Phys, Reports, 9C (1973) 1.
5 S. D. Joglekar, B. W. Lee, Annals of Phys. , 97 (1976) 160.
6 陆培荣，汪容，Commun. in Theor. Phys. , 4 (1985) Vo15.
Yang – Mill 场 30 周年纪念学术报告会论文专集.
7 汪容，物理学报，30 (1981) 731.
8 李文铸，汪容，诸绍林，Commun. in Theor. Phys. , 2 (1983) 1533.

第九章　有自发破缺时的重正化，R_ξ 规范，么正性

前一章关于可重正化性的证明已经包括了有自发破缺的情况（$v(0) \neq 0$）。这一章将用具体例子继续讨论明有自发破缺时的重正化，可重正规范和么正规范的关系，物理的 S 矩阵元与规范无关。

现在选用一个比较简化的模型，即 $SU(2)$。它很容易推广到一般的情况。

§9-1　引入 v 和 γ 时，对称性是怎样破缺的

取 $SU(2)$，有复的 Higgs 场如下：

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + i\tau \cdot \varphi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2 + i\varphi_1\\ \chi - i\varphi_3\end{pmatrix} \\ \varphi^+ \varphi &= \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \chi^2) \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

φ_1、φ_2、φ_3、χ 是四个独立的实场。再取

$$\begin{aligned} V &= \mu^2\varphi^+\varphi + \lambda(\varphi^+\varphi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + x^2) + \frac{1}{4}\lambda(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + x^2)^2 \end{aligned} \tag{9.2}$$

当 $\mu^2 < 0$，就造成真空自发破缺。设 $\lambda > 0$，则 φ_i 和 χ 满足下式时

$$\frac{\delta V}{\delta\varphi_i} = \mu^2\varphi_i + \lambda\varphi_i(\varphi_1^2 + \varphi_4^2 + \varphi_3^2 + \chi^2) = 0$$

$$\frac{\delta V}{\delta\chi} = \mu^2\chi + \lambda\chi(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \chi^2) = 0$$

V 有极小值。不妨取定其中的一个情况作为真空态，即取：

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0, \qquad \chi = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} = v \tag{9.3}$$

现在，换写 χ 为 $\bar{\chi}$，并取 φ^2（不同于 $\varphi^+\varphi$）：

$$\chi = \bar{\chi} + v, \quad \varphi^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \tag{9.4}$$

则有

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\mu^2(\varphi^2 + \bar{\chi}^2 + 2v\bar{\chi} + v^2) + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^2 + \bar{\chi}^2 + 2v\bar{\chi} + v^2)^2 \\ &= \frac{1}{4}\lambda(\varphi^2 + \bar{\chi}^2)^2 + \lambda v\bar{x}(\varphi^2 + \bar{\chi}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\mu^2 + \lambda v^2)(\varphi^2 + \bar{\chi}^2 + 2v\bar{\chi}) + \lambda v^2\bar{\chi}^2 + 常数 \end{aligned} \tag{9.5}$$

由此看到，在真空自发破缺的情况下，原始 V 中的 $\bar{\chi}$ 一次项与 φ^2 质量项有共同的系数 $\frac{1}{2}(\mu^2 + \lambda v^2)$，它们以

$$\frac{1}{2}(\mu^2+\lambda v^2)(\varphi^2+\overline{\chi}^2+2v\overline{\chi})$$

形式出现。

进行微扰展开，如果 L_{inv} 是规范不变的，则由于前一章的证明，知道 $L_{inv}^{\circ}=L_{inv}+\triangle L_{inv}$（抵消项）也是规范不变的，而且 L_{inv} 与 L_{inv}° 的规范群同构。

把 L_{inv} 中的 φ 记作

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2 & i\varphi_1\\ \overline{\chi}+v & -i\varphi_3\end{pmatrix}$$

把 L_{inv}° 中的 φ° 记作

$$\varphi^{\circ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2^{\circ} & i\varphi_1^{\circ}\\ \overline{\chi}^{\circ}+v^{\circ} & -i\varphi_3^{\circ}\end{pmatrix}$$

后面通过另一途径将看到，在有自发破缺时，

$$\varphi^{\circ}=Z_{\varphi}^{1/2}\varphi,\ \overline{\chi}^{\circ}=Z_{\varphi}^{1/2}\overline{\chi},\ v^{\circ}=Z_{\varphi}^{1/2}v \tag{9.6}$$

这和第八章例二、例四一致（v 相当于 $(v)_n$，见（8.131）。又由于有 SU（2）同位旋不变性（SU（2）），所以 L_{inv} 中含有 φ，χ 的部分（不考虑 $\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi$ 部分）必定是

$$\varphi^{+}\varphi=\frac{1}{2}(\varphi^2+\chi^2)=\frac{1}{2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\overline{\chi}^2+2v\overline{\chi}+v^2) \tag*{(9.7)$_1$}$$

的函数。同样，由于同位旋不变性，L_{inv}° 中含有 φ°，χ° 的部分（不考虑 $\partial_\mu\varphi^{\circ}\ \partial_\mu\varphi$ 部分）必定是

$$\varphi^{+\circ}\varphi^{\circ}=\frac{1}{2}(\varphi^{\circ 2}+\chi^{\circ 2})=\frac{1}{2}(\varphi_1^{\circ 2}+\varphi_2^{\circ 2}+\varphi_3^{\circ 2}+\overline{\chi}^{\circ 2}+2v^{\circ 2}\overline{\chi}+v^{\circ 2}) \tag*{(9.7)$_2$}$$

的函数。从而用 $L_{inv}^{\circ}=L_{inv}+\triangle L_{inv}$ 算出的微扰修正的 Γ 中，相应的 φ，χ 部分也应该是（9.7）形式的函数。如果重正化的 Γ（只有有限部分）中不出现 $\overline{\chi}$ 一次项（$2v\overline{\chi}$），则必定也同时不出现 φ^2（质量项）。后面还要讨论这个问题。

仍以 SU（2）为例，分三步来讨论。

第一步 $\mu^2>0$，$v=0$，即从没有真空自发破缺的情况出发。此时 φ，χ 的质量都是 μ，而 A_μ^i 没有静止质量。我们把 L_{inv} 写出来（重复出现 x 表示时对 dx 已积分）：

$$\begin{aligned}
L_{inv}=&-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}(x)\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}(x)\\
&-\left(\partial_\mu\varphi^{+}(x)+igA_\mu^i(x)\frac{\tau_i^{*}}{2}\varphi^{+}(x)\right)\left(\partial_\mu\varphi(x)-igA_\mu^i(x)\frac{\tau_i}{2}\varphi(x)\right)\\
&-\mu^2\varphi^{+}(x)\varphi(x)-\lambda(\varphi^{+}(x)\varphi(x))^2\\
=&-\frac{1}{4}\mathbf{F}_{\mu\nu}(x)\cdot\mathbf{F}_{\mu\nu}(x)\\
&-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1(x)\partial_\mu\varphi_1(x)+\partial_\mu\varphi_2(x)\partial_\mu\varphi_2(x)+\partial_\mu\varphi_3(x)\partial_\mu\varphi_3(x)+\partial_\mu\chi(x)\partial_\mu\chi(x))\\
&-\frac{i}{4}g\mathbf{A}_\mu(x)\cdot[-2(\partial_\mu\chi(x))i\boldsymbol{\varphi}(x)+2i\chi(x)(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}(x))-2i\boldsymbol{\varphi}(x)\times(\partial_\mu\boldsymbol{\varphi}(x))]\\
&-\frac{g^2}{8}A_\mu^i(x)A_\mu^i(x)(\varphi_1^2(x)+\varphi_2^2(x)+\varphi_3^2(x)+\chi^2(x))-\mu^2(\varphi^{+}(x)\varphi(x))
\end{aligned}$$

$$-\lambda(\varphi^+(x)\varphi(x))^2 \tag{9.8}$$

整个表示式是同位空间旋转不变的，"→"代表同位空间矢量。但 φ 只是形式上的矢量（为了便于写出 $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\varphi}=A_1\varphi_1+A_2\varphi_2+A_3\varphi_3$，其实 φ 不是同位空间矢量）。再加上费米场（省写了重复的 x）：

$$\begin{aligned}
&-G_e[\bar{R}(\varphi^+L)+(\bar{L}\varphi)R]\\
&=-G_e\left[\bar{e}_R\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2-i\varphi_1,\ \chi+i\varphi_3)\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L+(\bar{\nu},\bar{e}_L)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2+i\varphi_1\\ \chi-i\varphi_3\end{pmatrix}e\right]\\
&=-\frac{G_e}{\sqrt{2}}\Big[\bar{e}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu\varphi_2+\bar{\nu}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e\varphi_2\\
&\qquad -i\bar{e}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu\varphi_1+i\bar{\nu}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e\varphi_1+\bar{e}e\chi+\bar{e}i\gamma_5 e\varphi_3\Big]
\end{aligned} \tag{9.9}$$

这个表示式同样是同位空间旋转不变的。

另外，在同位空间旋转下，$[d\varphi_1]$ $[d\varphi_2]$ $(d\varphi_3)$ $[d\chi]$ 也是不变的，可以如下看出：

$$\varphi^\lambda=e^{-i\frac{\tau^i}{2}\lambda^i}\varphi$$

λ^i 是微小量，取到 λ^i 一次，则有

$$\varphi^\lambda=\varphi-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_3\lambda^1+\chi\lambda^2-\varphi_1\lambda^3+i(\chi\lambda^1-\varphi_3\lambda^2+\varphi_2\lambda^3)\\ -\varphi_1\lambda^1-\varphi_2\lambda^2-\varphi_3\lambda^3-i(-\varphi_2\lambda^1+\varphi_1\lambda^2+\chi\lambda^3)\end{pmatrix}$$

于是

$$\Delta\varphi_1=-\frac{1}{2}(\chi\lambda^1-\varphi_3\lambda^2+\varphi_2\lambda^3)$$

$$\Delta\varphi_2=-\frac{1}{2}(\chi\lambda^2-\varphi_1\lambda^3+\varphi_3\lambda^1)$$

$$\Delta\varphi_3=-\frac{1}{2}(\chi\lambda^3-\varphi_2\lambda^1+\varphi_1\lambda^2)$$

$$\Delta\chi=-\frac{1}{2}(-\varphi_1\lambda^1-\varphi_2\lambda^2-\varphi_3\lambda^3)$$

$$\frac{\partial\varphi_1^\lambda}{\partial\varphi_1}=1,\quad \frac{\partial\varphi_1^\lambda}{\partial\varphi_2}=-\frac{\lambda^3}{2},\quad \frac{\partial\varphi_1^\lambda}{\partial\varphi_3}=\frac{\lambda^2}{2},\quad \frac{\partial\varphi_1^\lambda}{\partial\chi}=-\frac{\lambda^1}{2},$$

$$\frac{\partial\varphi_2^\lambda}{\partial\varphi_1}=\frac{\lambda^3}{2},\quad \frac{\partial\varphi_2^\lambda}{\partial\varphi_2}=1,\quad \frac{\partial\varphi_2^\lambda}{\partial\varphi_3}=-\frac{\lambda^1}{2},\quad \frac{\partial\varphi_2^\lambda}{\partial\chi}=-\frac{\lambda^2}{2},$$

$$\frac{\partial\varphi_3^\lambda}{\partial\varphi_1}=-\frac{\lambda^2}{2},\quad \frac{\partial\varphi_3^\lambda}{\partial\varphi_2}=\frac{\lambda^1}{2},\quad \frac{\partial\varphi_3^\lambda}{\partial\varphi_3}=1,\quad \frac{\partial\varphi_3^\lambda}{\partial\chi}=-\frac{\lambda^3}{2},$$

$$\frac{\partial\chi^\lambda}{\partial\varphi_1}=\frac{\lambda^1}{2},\quad \frac{\partial\chi^\lambda}{\partial\varphi_2}=\frac{\lambda^2}{2},\quad \frac{\partial\chi^\lambda}{\partial\varphi_3}=\frac{\lambda^3}{2},\quad \frac{\partial\chi^\lambda}{\partial\chi}=1,$$

$$\therefore \quad J\left(\frac{\varphi_1^\lambda\varphi_2^\lambda\varphi_3^\lambda\chi^\lambda}{\varphi_1\varphi_2\varphi_3\chi}\right)=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{\lambda^3}{2} & \frac{\lambda^2}{2} & -\frac{\lambda^1}{2} \\ \frac{\lambda^3}{2} & 1 & -\frac{\lambda^1}{2} & -\frac{\lambda^2}{2} \\ -\frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda^1}{2} & 1 & -\frac{\lambda^3}{2} \\ \frac{\lambda^1}{2} & \frac{\lambda^2}{2} & \frac{\lambda^3}{2} & 1 \end{vmatrix}=1+O(\lambda^2) \qquad (9.10)$$

所以$\frac{\partial J}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}=0$，这就说明〔$d\varphi_1$〕〔$d\varphi_2$〕〔$d\varphi_3$〕〔$dx$〕也是同位空间旋转不变的。后面还要用到这个性质。

在$\mu^2>0$的情况，用前面讲过的重正化办法，去掉极点项，φ，χ的质量都取有限的μ，$Z_\varphi=Z_\chi$，$\lim\limits_{k^2=-\mu^2}\Delta_\varphi(k)=\lim\limits_{k^2=-\mu^2}\Delta_x(k)=\frac{-i}{k^2+\mu^2}$。

试问，能不能直接把$\mu^2>0$重正化格林函数的生成泛函延拓到$\mu^2<0$去呢？问题不这样简单，因为：

1. 简单的延拓使得φ，χ的质量都成为虚数（$\sqrt{-\mu^2}$）。

2. 用$\overline{\chi}=\chi-v$代换，可以看到在$\mu^2=0$处发生了质的变化，或不连续的变化。见下面的关于传播子的表（其中Δ_χ在$v\neq0$时就是$\Delta_{\bar\chi}$）：

$\mu^2>0$	$\mu^2=0$	$\mu^2<0$
$\Delta\varphi\sim\frac{1}{k^2+\mu^2}$	$\Delta\varphi\sim\frac{1}{k^2}$	$\Delta\varphi\sim\frac{1}{k^2}$（或在$R_\xi$规范取非物理质量）
$\Delta\chi\sim\frac{1}{k^2+\mu^2}$	$\Delta\chi\sim\frac{1}{k^2}$	$\Delta\chi\sim\frac{1}{k^2+(-2\mu^2)}$
A_μ^i质量$=0$	A_μ^i质量$=0$	A_μ^i质量为$m_A^2=\left(\frac{gv}{2}\right)^2$

所以不能随便把$\mu^2>0$延拓到$\mu^2<0$。为了进一步讨论这个问题，我们先考察一种同位旋不对称的情况：

设φ_1，φ_2，φ_3，χ原先是对称的，而V是

$$V=-\frac{\mu^2}{2}(\varphi^2+\chi^2)-\frac{\lambda}{4}(\varphi^2+\chi^2)^2$$

其中没有三线顶点。然后，把j_χ换成$j_\chi+\gamma$，就引入了同位旋不对称性，此时

$j_1\varphi_1+j_2\varphi_2+j_3\varphi_3+j_\chi\chi$换成$j_1\varphi_1+j_2\varphi_2+j_3\varphi_3+(j_\chi+\gamma)\chi$

从而破坏了φ_1，φ_2，φ_3，χ的对称性。取

$$\Gamma[\Phi]=Z[j+\gamma]-(j+\gamma)\Phi$$

（这是简写，其实只是j_χ改成$j_\chi+\gamma$，其余j_1，j_2，j_3不改），则有（定义）：

$$\frac{\delta Z[j+\gamma]}{\delta j_1}=\Phi_1,\quad \frac{\delta Z[j+\gamma]}{\delta j_2}=\Phi_2,\quad \frac{\delta Z[j+\gamma]}{\delta j_3}=\Phi_3$$

$$\frac{\delta Z[j+\gamma]}{\delta j_\chi}=X \qquad (9.11)$$

还有

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi_1}=-j_1,\quad \frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi_2}=-j_2,\quad \frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\Phi_3}=-j_3\quad \frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta X}=-j_\chi-\gamma \tag{9.12}$$

这些式子的导出和第五章、第八章一样。这里 Φ 是 j 的泛涵。为了方便，没有把规范场 A 写出来。经泛函积分后有：

$$\int \mathrm{d}(x) e^{i\int\left(-\frac{1}{2}\chi K_\chi \chi+(j_\chi+\gamma)\chi\right)\mathrm{d}^4x}$$

$$\to e^{-\frac{1}{2}\int (j_\chi(x)+\gamma)\mathrm{d}^4x\,\Delta_x(x-y)\mathrm{d}^4y(j_\chi(y)+\gamma)}$$

所以做微扰展开得到

$$\frac{\delta Z[j+\gamma]}{\delta j_\chi(x)}=i\int \Delta_x'(x-y)\mathrm{d}^4y(j_x(y)+\gamma) \tag{9.13}$$

一般情况下，(9.13) 中还要加圈图贡献。当 $j=0$，(9.13) 给出

$$\left.\frac{\delta Z[j+\gamma]}{\delta j_\chi(x)}\right|_{j=0}=i\int \Delta_x'(x-y)\mathrm{d}^4y\cdot\gamma$$

取 γ 为常数，而

$$\int \Delta_x'(x-y)\mathrm{d}^4y=\int e^{ik(x-y)}\frac{1}{(2\Pi)^4}\Delta_x'(k)\mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4y$$

$$=\int e^{ikx}\delta^4(k)\Delta_\chi'(k)\mathrm{d}^4k=\Delta_x'(k=0)=\frac{-i}{m_\chi^2}$$

则有

$$\left.\frac{\delta Z[j+\gamma]}{\delta j_\chi(x)}\right|_{j=0}=\frac{1}{m_\chi^2}\cdot\gamma=v \tag{9.14}$$

所以引入 $j_\chi\to j_\chi+\gamma$ 后不影响 φ_1，φ_2，φ_3 的真空平均值（仍都是0），而 χ 的真空平均值换成 $v\neq 0$（j_χ 换成 $j_\chi+\gamma$，但 χ 真空平均值仍定义在 $|_{j=0}$，而不是 $|_{j+\gamma=0}$）。补充说明几点：

1. 这里 m_χ^2 与物理质量 μ_χ^2 有所不同，μ_χ^2 是在下式（减除点或极点在 $k^2=-\mu_\chi^2$）

$$\lim_{k^2\to-\mu_\chi^2}\Delta_\chi'(k^2)=\frac{-i}{k^2+\mu_\chi^2}$$

中出现的；而 m_χ^2 则是按

$$im_\chi^2=\lim_{k^2\to0}\Delta_x'^{-1}(k^2)$$

定义的。不过树图近似中 m_χ^2 与 μ_χ^2 没有差别，差别从一圈图微扰修正开始。

2. 关于重正化：现在在 Z 泛函积分的指数上是

$$\cdots+\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\mu}-\frac{1}{2}\frac{\partial\chi}{\partial\chi_\mu}\frac{\partial\chi}{\partial x_\mu}-\frac{\mu^2}{2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+(\overline{\chi}+v)^2)\right)$$

$$+j_i\varphi_i+(j_\chi+\gamma)(\overline{\chi}+v)$$

积分体积元是 d（φ_1）d（φ_2）d（φ_3）d（$\overline{\chi}+v$）。所以无非是在（4.44）~（4.54）中把 j_χ 改写成 $j_\chi+\gamma$（在 4.53 中 φ_i 具体化为 χ，$v_i\neq 0$）。同样可得到（4.55），(4.56)，第八章重正化的证明不受影响。只是在 v（2）$=v$ 与 γ 之间有关系（9.14）。

3. 采用第二章的形式

$$W[J+\gamma]=\int \mathrm{d}(\varphi)e^{i\int \mathrm{d}^4x\left[-\frac{1}{\hbar}\varphi_iK_{ij}\varphi_j+\frac{1}{\hbar}\mathscr{L}_I(\varphi)+\varphi_ij_i+\chi(j_\chi+\gamma)\right]}$$

$$= W'[J] = \int \mathrm{d}(\varphi) e^{i\int d^4x[-\frac{1}{\hbar}\varphi_i K_{ij}\varphi_j + \frac{1}{\hbar}\mathscr{L}'_I(\varphi) + \varphi j_i + \chi j_\chi]}$$

其中把 $\chi\gamma$ 并人 $\mathscr{L}_I$（φ），写成 $\mathscr{L}_I'$（φ）$=\mathscr{L}_I$（φ）$+\chi\gamma$。于是，W'〔J〕与通常的 W〔J〕完全一样，特点只是 $\mathscr{L}_I'$（φ）中含 χ 的线性项。

由此定义 $\frac{W'[J]}{W'[O]}=e^{iz'[J]}$，（2.137）中的 $\overline{\varphi}_i$ 与 χ 相当，v_iA 与 γ 相当。则有（不考虑蝌蚪图）：

$$\frac{\delta Z'[J]}{\delta j_\chi} = X = i\triangle'_\chi(k=0)\cdot\gamma$$

与（2.138）一致。Z'〔J〕就是（9.11）的 Z〔$J+\gamma$〕，与§2－4 的 Z'〔J〕一致。

再定义

$$\Gamma'[\varphi] = Z'[J] - \int d^4x(\varphi_i(x)j_i(x) + j_\chi(x)\chi(x))$$

则在树图近似下，Γ'〔φ〕$=S'$〔φ〕。

$$\left.\frac{\delta\Gamma'[\varphi]}{\delta\chi}\right|_{\varphi=0,\chi=0} = -\gamma$$

与§2－5 一致。而且 Γ'〔φ〕就是（9.12）的 Γ〔Φ〕。

4. 检查一下 v 的重正化：根据第五章，有两种出发点：

第一种 $e^{i[\frac{1}{2}\varphi^0K\varphi^0+j^0\varphi^0]}\xrightarrow{\text{积分}}e^{-\frac{1}{2}j^0K^{-1}j^0}$

$$\xrightarrow{\text{现在改写成}} e^{-\frac{1}{2}(j_\chi^0+\gamma^0)\Delta x(j_\chi^0+\gamma^0)}$$

第二种 $e^{i[\frac{1}{2}\varphi Z_\varphi K\varphi+j\varphi]}\xrightarrow{\text{积分}}e^{-\frac{1}{2}j\frac{K^{-1}}{Z_\varphi}j}$

$$\xrightarrow{\text{现在改写成}} e^{-\frac{1}{2}(j_x+\gamma)\frac{\Delta\chi}{Z_\varphi}(j\chi+\gamma)}$$

参考第八章并根据（9.14）有：

$$j^0 = Z_\varphi^{-1/2}j,\ \gamma^0 = Z_\varphi^{-1/2}\gamma,\ \triangle'_\chi(k) = Z_\varphi\triangle'_\chi(k)$$

于是

自第一种 $$\left.\frac{\delta Z}{\delta j_\chi^0}\right|_{j^0=0} = i\triangle'_x\ (k=0)\ \cdot\gamma^0 = v^0$$

自第二种 $$\left.\frac{\delta Z}{\delta j_\chi}\right|_{j=0} = i\triangle'^{-1}_\chi\ (k=0)\ \cdot\gamma = v$$

$$\therefore v^0 = Z_\varphi^{1/2}v \qquad \text{与第八章一致。}$$

5. 在 $j_\chi\to j_\chi+\gamma$，$\chi\to\overline{\chi}+v$ 时（注意：现在 v 的定义不同于 $\left.\frac{\delta Z\ [j+\gamma]'}{\delta j_\chi\ (\chi)}\right|_{j=0}=\frac{1}{m_\chi^2}\cdot\gamma=v$），我们有（见（9.5））：

$$V = \frac{1}{2}\mu^2(\varphi^2+\overline{\chi}^2+2v\overline{\chi}+v^2) + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^2+\overline{\chi}^2+2v\overline{\chi}+v^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}\lambda(\varphi^2+\overline{\chi}^2)^2 + \lambda v\overline{\chi}(\varphi^2+\overline{\chi}^2) + \frac{1}{2}(\mu^2+\lambda v^2)(\varphi^2+\overline{\chi}^2) + \lambda v^2\overline{\chi}^2$$

$$+v(\mu^2+\lambda v^2)\overline{\chi}+\text{常数}$$

$$\varphi^2=\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2,\ \mu_{\overline{\chi}}^2=(\mu^2+3\lambda v^2),\ \mu_\varphi^2=(\mu^2+\lambda v^2) \tag{9.15}$$

$\overline{\chi}$ 的一次项是 v $(\mu^2+\lambda v^2)$ $\overline{\chi}$。于是和"3."一样，把 $\gamma\overline{\chi}$ 并到 $\mathscr{L}_I(\varphi)$ 中去，写成 $\mathscr{L}_I'$ (φ)，就可以计算出：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\delta Z[j+\gamma]}{\delta j_\chi(\chi)}\right|_{j=0} &= \frac{\delta Z'[j]}{\delta j_\chi(\chi)}=\frac{1}{i}\frac{1}{W[j]}\int\sum_n\frac{i^n}{n!}d^4\chi_1\cdots d^4\chi_n\\ &\cdot\mathscr{L}_I'\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(\chi_1)}\right)\cdots\cdot\mathscr{L}_I'\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j(\chi_n)}\right)\\ &\cdot(-1)\Delta_{\overline{\chi}}(\chi-y)\mathrm{d}^4y(j_\chi(x)+\gamma)\\ &\cdot\left.e^{-\frac{1}{2}\int(j_\chi+\gamma)\Delta_{\overline{\chi}}(j_\chi+\gamma)+\cdots}\right|_{j=0}\\ &=i\int\Delta_{\overline{\chi}}'(x-y)\mathrm{d}^4y(j_\chi(y)+y-v(\mu^2+\lambda v^2)-vG')\Big|_{j=0}\\ &=\frac{1}{m_{\overline{\chi}}^2}(\gamma-v(\mu^2+\lambda v^2+G'))\\ &=\overline{X}\big|_{j=0}\end{aligned} \tag{9.16}$$

说明几点：

1. $\Delta_{\overline{\chi}}'$ 是重正化好的 $\overline{\chi}$ 传播子，在树图近似下，$m_{\overline{\chi}}^2=\mu_{\overline{\chi}}^2$。关于 $v\neq0$，$\overline{X}|_{j=0}=0$ 情况下的可以重正化，将在下面第二步讨论。

2. (9.16) 中的 $j_\chi+\gamma$ 项来自 $\sum\limits_n$ 展开中第一项，即 $n=0$ 项。

3. (9.16) 中的 v $(\mu^2+\lambda v^2)$ 项来自 $-V$ 中的 $\overline{\chi}$ 线性项 $-v$ $(\mu^2+\lambda v^2)$ $\cdot\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_x}\cdots$

4. $G'=G'$ $(\gamma-\gamma)$ 是常数，是蝌蚪图贡献，因现在有含 $\overline{\chi}$ 的三线顶点，$\overline{\chi}$ 有蝌蚪图。

再回到 (9.16)，要求 $\overline{X}|_{j=0}=0$，即 $\overline{\chi}$ 的真空平均值为零，则又一次确定了 γ 与 v 的关系为

$$\gamma=v(\mu^2+\lambda v^2+G') \tag{9.17}$$

不要忘记上面说过，这里的 v 和前一例的 v 是在不同条件下引入和定义的，它们是不相同的。另外，我们还注意到，在树图近似下有：

$$\gamma\approx v(\mu^2+\lambda v^2)$$

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\overline{X}}=-j_\chi-\gamma\approx\frac{\delta S[\Phi]}{\delta\overline{X}}=-j_\chi-v(\mu^2+\lambda v^2)$$

注意这里引入的对称性破缺，但 $\overline{X}|_{j=0}=0$，同时出现 $\overline{x}$ 一次项。

既有 $\gamma\neq0$，又有 $v\neq0$，

§9-2 v 和 m_φ^2 的独立性，v 从 0 延拓到 $\neq0$ 时，重正化常数 z 不变

第二步的讨论就是从 γ 和 v 都为 0 出发，延拓到 γ 和 v 都不为 0。它们之间有 (9.17) 的关系，保证 $\overline{X}|_{j=0}=0$。而且要检验一下在这种情况下如何重正化。现在我们把 $\chi-\overline{\chi}+v$ 代入 (9.8) 得到

$$
\begin{aligned}
L = & -\frac{1}{4}\bar{F}_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1(x)\partial_\mu\varphi_1(x) \\
& + \partial_\mu\varphi_2(x)\partial_\mu\varphi_2(x) + \partial_\mu\varphi_3(x)\partial_\mu\varphi_3(x) + \partial_\mu\bar{\chi}(x)\partial_\mu\bar{\chi}(x)) \\
& - \frac{i}{4}gA_\mu(x)\cdot[-2(\partial_\mu\bar{\chi}(x))i\varphi(x) + 2i(\bar{\chi}(x)) + v)(\partial_\mu\varphi(x)) \\
& - 2i\varphi(x)\times(\partial_\mu\varphi(x))] \\
& - \frac{g^2}{8}A_\mu^i(x)A_\mu^i(x)(\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + \varphi_3^4(x) + \bar{\chi}^2(x) + 2\bar{\chi}(x)v) \\
& - \frac{g^2}{8}A_\mu^i(x)A_\mu^i(x)v^2 \\
& - \frac{\lambda}{4}(\varphi_i(x)\varphi_i(x) + \bar{\chi}^2(x) + 2\bar{\chi}(x)v)^2 \\
& - \frac{1}{2}\mu_\varphi^2(\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x) + \varphi_3^2(x) + \bar{\chi}^2(x) + 2\bar{\chi}(x)v) \qquad (9.18) \\
& \cdot (\mu_\varphi^2 = \mu^2 + \lambda v^2)
\end{aligned}
$$

可见 v 和 μ_φ^2（$=\mu^2+\lambda v^2$）在（9.18）中是互相独立的。还看到 v 都是以 $\bar{\chi}+v$ 相加的形式出现。

第三步就是 v 保持≑0，但（$\mu^2+\lambda v^2+G'$）和 $\gamma\to 0$。当然这也就保证了 $\bar{X}|_{j=0}=0$。这正是我们所关心的真空自发破缺的情况。

第二步 从 $\mu_\varphi^2>0$，$v=0$，$\gamma=0$ 出发，按已有方法重正化，得到不发散的结果：

$$
\begin{gathered}
(\chi^0;\varphi_i^0) = Z_\varphi^{1/2}(x,\varphi_i), A_\mu^{a0} = Z_3^{1/2}A_\mu^a, \\
u_a^0 = \tilde{Z}_3^{1/2}u_a, \qquad \bar{u}_a^0 = \tilde{Z}_3^{1/2}\bar{u}_a, \\
j_\mu^{a\cdot} = Z_3^{-1/2}j_\mu^a, \quad j_i^0 = z_\varphi^{-1/2}j_i, \quad j_\chi^0 = Z_\varphi^{-1/2}j_\chi, \\
g^0 = \frac{Z_1}{Z_3^{3/2}}g = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_2 Z_3^{1/2}}g, \qquad \lambda^0 = Z_4 Z_\varphi^{-2}\lambda \qquad (9.19)
\end{gathered}
$$

A_μ^a 的质量为 0，χ，φ_i 的质量为 μ_φ，此时取减除点 $k^2=-\mu_\varphi^2$，则有

$$
\lim_{k^2=-\mu_\varphi^2}\Delta_\chi(k^2) = \lim_{k^2=-\mu_\varphi^2}\Delta_\varphi(k^2) = \frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^2}
$$

现在，我们先固定 μ_φ^2，令 v（γ）和 γ 由 0 变到≑0。于是要问，v 是怎样重正化的?

前已知道，$\Gamma[\Phi]$ 的展开系数在 $A=u=\bar{u}=\bar{\chi}=\varphi=0$ 处为多顶点 $1PI$ 格林函数：

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\Pi}(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_m;z_1,\cdots,z_l\mid v) \\
& = \left.\frac{\delta^{n+m+l}\Gamma[A,\varphi,\chi]}{\delta A_\mu^a(x_1)\cdots\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\chi(z_1)}\right|_{A=u=\bar{u}=\varphi=\bar{\chi}=0} \qquad (9.20)
\end{aligned}
$$

（~表示 x 表象，$\bar{\chi}=0$ 就是 $\chi=v$，略去了 $\bar{u}$，u 和费米场以及各种指标）。

它的 Fourier 变换是（因平移不变，$\tilde{\Pi}$ 中只出现坐标之差，结果就有能量动量守恒的 δ 函数）：

$$
(2\pi)^4\delta^4(\Sigma p + \Sigma q + \Sigma r)\Pi(p_1,\cdots,p_n;q_1,\cdots,q_m;r_1,\cdots r_l\mid v)
$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i e^{ip_i x_i} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{d}^4 y_j e^{i} q_j y_j \cdot \prod_{k=1}^{l} \mathrm{d}^4 z_k e^{ir_k z_k}$$

$$\cdot \tilde{\Pi}(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_m; z_1, \cdots, z_l \mid v) \tag{9.21}$$

固定别的参数，对 v 作 Taylor 展开：

$$\Pi(p_1, \cdots, p_n; q_1, \cdots, q_m; r_1, \cdots, r_l \mid v)$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{v^s}{s!} \left(\frac{\partial^s}{\partial v^s} \Pi(p_1, \cdots, p_n; q_1, \cdots, q_m; r_1, \cdots, r_l \mid v) \right) \bigg|_{v=0} \tag{9.22}$$

对（9.21）求 v 微商，得到

$$(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p + \Sigma q + \Sigma r) \frac{\partial}{\partial v} \prod (p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots q_m; r_1 \cdots r_l \mid v) \mid_{v=0}$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i e^{ip_i x_i} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{d}^4 y_j e^{iq_j y_j} \prod_{k=1}^{l} \mathrm{d}^4 z_n e^{ir_k z_k}$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial v} \tilde{\Pi}(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_m; z_1 \cdots z_l \mid v) \mid_{v=0} \tag{9.23}$$

由于（9.20），$\bar{\chi} = 0$ 就是 $\chi = v$：

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{\Pi}(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_m; z_1 \cdots z_l \mid v) \mid v = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial v} \frac{\delta^{n+m+l} \Gamma[A, \varphi, x]}{\delta A_\mu^a(x_1) \cdots \delta\varphi(y_1) \cdots \delta x(z_1) \cdots} \bigg|_{\substack{A = u = \bar{u} = \varphi = 0 \\ x = v}} \bigg|_{v=0} \tag{9.24}$$

其中 v 总是以 $\chi = \bar{\chi} + v$ 的形式出现在 Γ〔A，φ，χ〕中，所以（利用（9.20））

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\delta^{n+m+l} \Gamma[A, \varphi, x]}{\delta A_\mu^a(x_1) \cdots \delta\varphi(y_1) \cdots \delta\chi(z_1) \cdots} \bigg|_{\substack{A = u = \bar{u} = \varphi = 0 \\ \chi = v}}$$

$$= \int \left(\frac{\partial}{\partial v} (\bar{x}(\omega) + v) \right) \mathrm{d}^4 \omega \frac{\delta^{n+m+l+1} \Gamma[A, \varphi, x]}{\delta_\mu^a(x_1) \cdots \delta\varphi(y_1) \cdots \delta\chi(z_1) \cdots \delta\chi(\omega)} \bigg|_{\substack{A = u = \bar{u} = \varphi = 0 \\ \chi = v}}$$

$$= \int \mathrm{d}^4 \omega \tilde{\Pi}(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_m; z_1 \cdots z_l \omega \mid v) \tag{9.25}$$

（9.25）代入（9.24）：

$$\frac{\partial}{\partial v} \tilde{\Pi}(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_m; z_1 \cdots z_l \mid v) \mid_{v=0}$$

$$= \int \mathrm{d}^4 \omega \tilde{\Pi}(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_m; z_1 \cdots z_l \omega \mid 0) \tag{9.26}$$

（9.26）代入（9.23）（利用（9.21））：

$$(2\Pi)^4 \delta^4(\Sigma p + \Sigma q + \Sigma r) \frac{\partial}{\partial v} \Pi(p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots q_m; r_1 \cdots r_l \mid v)_{v=0}$$

$$= \int \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}^4 x_i e^{ip_i x_i} \prod_{j=1}^{m} \mathrm{d}^4 y_j e^{iq_j y_j} \prod_{k=1}^{l} \mathrm{d}^4 z_k e^{ir_k z_k} \mathrm{d}^4 \omega \tilde{\Pi}(x_1 \cdots x_n; y_1 \cdots y_m; z_1 \cdots z_l \omega \mid 0)$$

$$= (2\Pi)^4 \delta^4(\Sigma p + \Sigma q + \Sigma r) \Pi(p_1 \cdots p_n; q_1 \cdots q_m; r_1 \cdots r_l 0 \mid 0) \tag{9.27}$$

这里与 ω 相联系的能量动量为 0，所以 r_l 右边的能量动量写作 0。竖线右边的 0 则代表 $v = 0$。由（9.27）得到：

$$\frac{\partial}{\partial v}\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid v)\mid_{v=0}$$
$$=\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l 0\mid 0) \qquad (9.28)_1$$

相仿有：

$$\frac{\partial^s}{\partial v^s}\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid v)\mid_{v=0}$$
$$=\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\underbrace{00\cdots0}_{s\text{个}0}\mid 0) \qquad (9.28)_2$$

再代入（9.22）：

$$\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid v)$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{v^s}{s!}\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\underbrace{00\cdots0}_{s\text{个}0}\mid 0) \qquad (9.29)$$

右方正好都是第一步讨论过的对称性没有破缺的（$v=0$，$\gamma=0$）$1PI$ 格林函数，其中有 s 个 0，表示外加 s 条 χ 外线，其能量动量都为零。

按照第一步的讨论，右方是可重正化去发散的。假定我们是从 S^0 出发作微扰，则（9.29）中的 v 应改写成 v^0。我们再把 g^0，λ^0 写出来，则（9.29）应写成：

$$\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid v^0,g^0,\lambda^0)$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{v^{0s}}{s!}\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\underbrace{00\cdots0}_{s\text{个}0}\mid 0,g^0,\lambda^0) \qquad (9.29)_1$$

经过重正化，右方的 Π 化为有限的

$$\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l 0\,0\cdots0\mid 0,g,r)$$

而且有如下关系（参考第五章）：

$$\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid 0^0,g^0,\lambda^0)$$
$$=z_3^{-n/2}z_\varphi^{-(m+l)/2}\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid 0,g,\lambda) \qquad (9.30)_1$$

$(9.30)_1$ 中 $g^0=\frac{z_1}{z_3^{3/2}}g$，$\lambda^0=\frac{z_4}{z_\varphi^2}\lambda$。而且又有

$$\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid\underbrace{0\,0\cdots0}_{s\text{个}0}\mid 0,g^0,\lambda^0)$$
$$=z_3^{-n/2}z_\varphi^{-(m+l+s)/2}\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l,\underbrace{0\,0\cdots0}_{s\text{个}0}\mid 0,g,\lambda) \qquad (9.30)_2$$

代入 $(9.29)_1$ 得

$$\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid v^0,g^0,\lambda^0)$$
$$=z_3^{-n/2}z_\varphi^{-(m+l)/2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(z_\varphi^{-1/2}v^0)^s}{s!}$$
$$\cdot\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\underbrace{0\,0\cdots0}_{s\text{个}0}\mid 0,g,\lambda) \qquad (9.29)_2$$

取
$$v^0=z_\varphi^{1/2}v \qquad (9.31)$$

则：
$$\Pi(p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_m;r_1\cdots r_l\mid v^0,g^0,\lambda^0)$$

$$= z_3^{-n/2} z_\varphi^{-(m+l)/2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{v^s}{s!}$$
$$\cdot \Pi(p_1\cdots p_n; q_1\cdots q_m; r_1\cdots r_l \underbrace{0\,0\cdots 0}_{s\text{个}0} | 0, g, \lambda) \tag{9.29$_3$}$$

所以立刻看到，（9.30）的乘法重正化同样适用于 $v \neq 0$ 的情况，只需定义（推广（9.30））：

$$\Pi(p_1\cdots p_n; q_1\cdots q_m; r_1\cdots r_l \mid v, g, \lambda)$$
$$= z_3^{n/2} z_\varphi^{(m+l)/2} \Pi(p_1\cdots p_n; q_1\cdots q_m; r_1\cdots r_l \mid v^0, g^0, \lambda^0) \tag{9.32}$$

则有（比较（9.29）$_3$ 和（9.32））：

$$\Pi(p_1\cdots p_n; q_1\cdots q_m; r_1\cdots r_l \mid v, g, \lambda)$$
$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{v^s}{s!} \Pi(p_1\cdots p_n; q_1\cdots q_m; r_1\cdots r_l \underbrace{0\,0\cdots 0}_{s\text{个}0} | 0, g, \lambda) \tag{9.29$_4$}$$

以上是从 S^0 出发作微扰。假定我们不是从 S^0 出发，而是从 $S+\Delta S$ 出发作微扰，则（9.29）也正好应写成（9.29）$_4$ 的形式。由此可见如果要求从 S^0 出发和从 $S+\Delta S$ 出发的两种做法自洽，则 $v \neq 0$ 时，从 S^0 出发得到的格林函数和从 $S+\Delta S$ 出发得到的格林函数（都是去肢的）之间必须有（9.32）所定义的乘法重正化关系。这个关系和 $v=0$ 时的乘法重正化关系（9.30）完全一样。而且要求 $v^0 = Z_\varphi^{1/2} v$。

这样，就检验了第八章 $v \neq 0$ 时可重正化性的结论，并且得到了重正化的（$v \neq 0$ 时）

$$\Pi(p_1\cdots p_n; q_1\cdots q_m; r_1\cdots r_l \mid v, g, \lambda),$$

它是（9.29）$_4$ 右方的求和，右方每一项都是不发散的。注意右方的每一项都是在原来的（$v=0$）无自发破缺的 Π（$p_1\cdots p_n$；$q_1\cdots q_m$；$r_1\cdots r_l \mid 0$，g，λ）$1PI$ 图上又加上若干个（例如 S 个）只增加 χ 外线（其能量动量为0）的顶点，然后把每一条 χ 外线换成一个 v。①

这里还要说明两点：

1. $\mathscr{L}$ 中有 $V(s)$，例如

$$V(s) = \mu^2 s^+ s + \Lambda(s^+ s)^2$$

除了 Z_Λ 外，在取最小重正化时，还有 Z_μ：

$$\mu_0^2 = \frac{Z_\mu}{Z_s}\mu^2$$

在这里，并不在质壳减除，μ^2 也和耦合常数一样对待，所以出现质量重正化常数 Z_μ（见第八章和第十章）。在最小重正化与质壳减除重正化之间仅相差一个有限重正化。

2. 在第二步，我们采用的 Z 在破缺之前和破缺之后是相同的。也许要问，有了自发破缺，μ^2 要从大于零换到小于零，各个 Z（包括 Z_μ）是不是要改变？在下一章，§10－2 的讨论中，将会看到，如果取最小重正化，则所有的 Z，包括质量重正化因子

---

① $R\xi$ 规范这一类型的规范确定项中也含有 v，但这些 v 不是通过 $\chi \to \overline{\chi} + v$ 而出现，而是一开始就放在规范确定项中的。只要已经证明 Higgs 场 χ 的真空期待值为零时，采用这一类型规范确定项是可重正化的，则根据上面的讨论，$\chi \to \overline{\chi} + v$ 后仍可重正化，即规范确定项中含 v 时没有新困难。

（例如 Z_μ）在内，都是与质量无关的。即自发破缺前后，Z 都是相同的（包括 Z_μ）。因此，质量的改变并不会妨碍这里第二步的证明（即使 μ^2 从 >0 换到 <0 也无妨），也不会妨碍下面第三步的证明。

§9-3　m_φ^2 延拓到 0，Γ 中 $\bar{x}$ 一次项消失，外源 γ 也消失

第三步　前一步已检验 $\mu_\varphi^2>0$，$v\neq 0$，$\gamma\neq 0$ 时可以重正化。现在第三步就是要检验 $v\neq 0$ 而 $\gamma=0$ 时也可重正化。由 $\gamma=v\ (\mu_\varphi^2+G')$ 看到，若是 $v\neq 0$ 而 $\gamma=0$，则必 $(\mu_\varphi^2+G')\ =0$，所以要看一看 $m_\varphi^2=\mu_\varphi^2+G'$延拓到 0 的问题。

考察 S^0 和 $S+\Delta S$：

在 S^0 中有 $-\frac{\mu_\varphi^{02}}{2}\ (\varphi_i^{02}+\bar{x}^{02}+2v^0\bar{x}^0)$；

在 $S+\Delta S$ 中有

$$-\frac{1}{2}(Z_\varphi-1)\mu_\varphi^2(\varphi_i^2+\bar{\chi}^2+2v\bar{x})+\frac{\delta\mu_\varphi^2}{2}Z_\varphi(\varphi_i^2+\bar{\chi}^2+2v\bar{x})。$$

其中

$$\mu_\varphi^2-\delta\mu_\varphi^2=\mu_\varphi^{02}$$

S^0 给出的自由传播子是（符号意义见第五章）：

$$\Delta_\varphi(k)=\frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^{02}},\qquad \Delta_{\bar{\chi}}(k)=\frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^{02}+2\lambda^0v^0}$$

$S+\Delta S$ 给出的自由传播子是（Landan 规范，$\xi=\infty$）：

$$\Delta_\varphi^{\text{重正}}(k)=\frac{1}{Z_\varphi}\cdot\frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^{02}},\qquad \Delta_{\bar{\chi}}^{\text{重正}}(k)=\frac{1}{Z_\varphi}\frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^{0}+2\lambda^0v^{02}}\text{①}$$

S^0 作出的 Γ 中有（后面将讨论为什么这个形式是点）：

$$\begin{aligned}&(\mu_\varphi^{02}+G'^0)\Big(\int[\varphi_i^0(x)\varphi_i^0(x)+\bar{\chi}^0(x)\bar{\chi}^0(x)+2\bar{\chi}^0(x)v]d^4x\Big)\\&+\Big(\int\varphi_i^0(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)^4}(G'^0(k)-G'^0)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4y\varphi_i^0(y)\\&+\int\bar{\chi}^0(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)^4}(G'^0(k)-G'^0)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4y\bar{\chi}^0(y)\Big)\end{aligned}\tag{9.33$_1$}$$

这里 G'^0 (k) 和 $G'^0=^{'0}$ $(k^2=0)$ 都含有发散。相应地有完全传播子：

$$\Delta_\varphi'(k)=\frac{-i}{k^2+(\mu_\varphi^{02}+G'^0)+(G'^0(k)-G'^0)}$$

$$\Delta_{\bar{\chi}}'(k)=\frac{-i}{k^2+(\mu_\varphi^{02}+G'^0+2\lambda^0v^{02})+(G'^0(k)-G'^0)}$$

$S+\Delta S$ 作出的 Γ 中有（后面的讨论也适用）：

---

① $\frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^2}+\frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^2}(-i(z_\varphi-1)(k^2+\mu_\varphi^2)+iZ_\varphi\delta\mu_\varphi^2-2iZ_4\lambda v^2)\frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^2}+\cdots=\frac{-i}{Z_\varphi(k^2+\mu_\varphi^{02})+2Z_4\lambda v^2}$

$=\frac{1}{Z_\varphi}\cdot\frac{-i}{k^2+\mu_\varphi^{02}+2\frac{Z_4}{Z_\varphi^2}\lambda v^{02}}$，$\lambda^0=\frac{Z_4}{Z_\varphi^2}\lambda$

$$(\mu_\varphi^2 + G')\Big(\int[\varphi_i(x)\varphi_i(x) + \bar{\chi}(x)\bar{\chi}(x) + 2\bar{\chi}(x)v]\mathrm{d}^4x\Big)$$

$$+ \Big(\int\varphi_i(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)^4}(G'(k) - G')e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4y\varphi_i(y)$$

$$+ \int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)^4}(G'(k) - G')e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4y\bar{\chi}(y)\Big) \qquad (9.33)_2$$

这里 $G'(k)$ 和 $G' = G'(k^2=0)$ 都已去掉发散$\left(\text{去掉了}\frac{1}{n-4}\text{极点项}\right)$。有关的抵消项就在 $\delta\mu_\varphi^2$ 中。相应地也有如下传播子（完全传播子）：

$$\underline{\Delta}'_\varphi(k) = \frac{-i}{k^2 + (\mu_\varphi^2 + G') + (G'(k) - G')}$$

$$\underline{\Delta}'_{\bar{\chi}}(k) = \frac{-i}{k^2 + (\mu_\varphi^2 + G' + 2\lambda v^2) + (G'(k) - G')}$$

现在，在 Δ'_φ 和 $\Delta'_{\bar{\chi}}$ 中，$m_\varphi^2 = \mu_\varphi^2 + G'$代替了原先的 μ_φ^2 的位置，而（$G'(k) - G'$）相当于辐射修正，它的减除点在 $k^2=0$ （$G'(k^2=0) - G'=0$）。

回顾前面所列的表，表中的没有经过辐射修正的 Δ_φ 和 Δ_χ 分别是$\frac{1}{k^2+\mu_\varphi^2}$和$\frac{1}{k^2+\mu_\varphi^2+2\lambda v^2}$，其中 $\mu_\varphi^2 = \mu^2 + \lambda v^2$（见（9.18））。$\mu^2>0$ 时，$v=0$；$\mu^2<0$ 时，$v=\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \neq 0$。所以说在 $\mu^2=0$ 有奇点。但现在经过辐射修正后，φ 的质量不再是 μ_φ^2，而是

$$m_\varphi^2 = \mu_\varphi^2 + G'^{①}$$

这里 m_φ^2 和 v 是独立变化的量（代替以前的 μ_φ^2 和 v）。而且在整个 $m_\varphi^2 = \mu_\varphi^2 + G' \geqslant 0$ 区域，Δ'_φ，Δ'_χ 都是连续变化的。因此，我们可以把 $m_\varphi^2 = \mu_\varphi^2 + G' = \mu^2 + 2\lambda v + G'$延拓到零。〔注意 μ_φ^2 不是延拓到 0，而是延拓到 $-G'$。延拓后 μ_φ^2 取正值还是取负值，依赖于 G'取的是正值还是负值〕。

显然，在这样的延拓过程中，不破坏第二步所证明的可重正性（在 Δ'_φ，$\Delta'_{\bar{\chi}}$ 连续变动中，$\langle\bar{\chi}\rangle_0=0$ 不变，要求（9.17）式成立）。小结一下：

1. 由于保证 $\bar{\chi}$ 真空平均值为零，所以自（9.17）关系式

当 $m_\varphi^2 = \mu_\varphi^2 + G' \to 0$ 时，

$$\gamma = v(\mu_\varphi^2 + G') \to 0,$$

所以检验了 $v \neq 0$ 而 $\gamma=0$ 时，仍是可重正化的（第二步的证明仍适用）。

2. 当 $\gamma=0$，$m_\varphi^2=0$ 时，得到

$$\Delta'_\chi(k) = \frac{-i}{k^2 + (G'(k) - G')}, \qquad \Delta'_{\bar{\chi}}(k) = \frac{-i}{k^2 + 2\lambda v^2 + (G'(k) - G')}。$$

就是说，Goldstone 粒子 φ 的自能（在 $k^2=0$ 处）全部消去（因为 φ 没有了静止质量，所以叫它 Goldstone 粒子），$\bar{\chi}$ 则保留了 $m_{\bar{\chi}}^2 = 2\lambda v^2 = -i\Delta'^{-1}_{\bar{\chi}}$（$k^2=0$）。但要注意 $\Delta'_\varphi(k)$

---

① 从(9.17)，(9.18) 看到。如果 $\gamma=0$，则或者 $v=0$，$\mu_\varphi^2+G'\neq 0$；或者 $v\neq 0$，$\mu_\varphi^2+G'=0$。前者是无破缺的情况；后者是有破缺并出现 Goldstone 粒子 φ 的情况。

和 Δ'_χ (k) 中的 G' 现在都是在 $k^2=0$ 处减除。

3. 在 Goldstone 粒子 φ 的自能（在 $k^2=0$ 处）全部消去的同时（即 $\mu_\varphi^2+G'=0$ 时），x 的一次项也在 Γ 中消去，不再出现。见 $(9.33)_2$ 式，这是一个很重要的事实。

以下我们再讨论或证明一些细节：

1. L_{inv} 同位空间旋转不变（规范不变性的一种表现）。在 $v=0$ 时，要求 V 为 $(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\chi^2)$ 的函数，真空时，$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\chi=0$。又在 $v\neq 0$ 时，按照第二步的讨论，仍有同位空间旋转不变性①。只是此时把 χ 写成 $\bar{\chi}$，并把 $\bar{\chi}$ 延伸成为 $\bar{\chi}+v$。$\bar{\chi}+v$ 代替了原来 χ 的地位。真空时 $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\bar{\chi}=0$，而且要求（同位空间旋转不变性和 $\bar{\chi}+v$ 代替 χ 的结果）V 为 $(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+(\bar{\chi}+v)^2)$ 的函数。关于为什么用 $(\bar{\chi}+v)$ 代替 χ，还可这样来看：在 $\Gamma[A,\varphi,\chi]$ 中，$\tilde{\Pi}$ $(x_1\cdots x_n;\ y_1\cdots y_m;\ z_1\cdots z_l\mid 0,\ g,\ \lambda)$ 是以如下形式出现的：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n!m!l!}\tilde{\Pi}(x_1\cdots x_n;y_1\cdots y_m;z_1\cdots z_l\mid 0,g,\lambda)\\
&\cdot\underbrace{A(x_1)\cdots}_{n\text{个}}\underbrace{\varphi(y_1)\cdots}_{m\text{个}}\underbrace{\chi(z_1)\cdots}_{l\text{个}}
\end{aligned}
\qquad (9.34)_1
$$

而 $\tilde{\Pi}$ $(x_1\cdots x_n;\ y_1\cdots y_m;\ z_1\cdots z_l\omega_1\cdots\omega_s\mid 0,\ g,\ \lambda)$ 则是以如下形式出现的：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n!m!(l+s)!}\tilde{\Pi}(x_1\cdots x_n;y_1\cdots y_m;z_1\cdots z_l\omega_1\cdots\omega_s\mid 0,g,\lambda)\\
&\cdot\underbrace{A(x_1)\cdots}_{n\text{个}}\underbrace{\varphi(y_1)\cdots}_{m\text{个}}\underbrace{\chi(z_1)\cdots\chi(\omega_s)}_{l+s\text{个}}
\end{aligned}
\qquad (9.34)_2
$$

注意 $(9.34)_1$、$(9.34)_2$ 中分别有乘子 $\frac{1}{n!\ m!\ l!}$ 和 $\frac{1}{n!\ m!\ (l+s)!}$。

再把 $\Gamma[A,\varphi,\chi]$ 换成 $\Gamma[A,\varphi,\bar{\chi}+v]$，那无非是把 Γ 上挂的 χ 换成 $\bar{\chi}+v$。就是说，$\Gamma[A,\varphi,\bar{\chi}+v]$ 中与 (9.33)，(9.34) 相对应的项，无非是把 (9.33)，(9.34) 中的 χ 换成 $\bar{\chi}+v$，别的不改动。然后，我们就用 $\Gamma[A,\varphi,\bar{\chi}+v]$ 来定义 $(9.29)_4$ 的左方：

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\Pi}(x_1\cdots x_n;y_1\cdots y_m;z_1\cdots z_l\mid v,g,\lambda)\\
&=\left.\frac{\delta^{n+m+l}\Gamma[A,\varphi,\bar{\chi}+v]}{\delta A(x_1)\cdots\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\chi(z_1)\cdots}\right|_{A=u=\bar{u}=\varphi=\bar{\chi}=0}
\end{aligned}
\qquad (9.35)
$$

（这个定义和 (9.20) 一致），就必然得到 $(9.29)_4$ 右方求和展开。因为

$$
\left.\frac{\delta^{n+m+l}}{\delta A(x_1)\cdots\delta\varphi(y_1)\cdots\delta x(z_1)\cdots}\right|_{A=u=\bar{u}=\varphi=\bar{\chi}=0}
$$

作用在 $(9.34)_1$ 上，正好把 $\frac{1}{n!\ m!\ l!}$ 的分母消去，得到 $S=0$ 的项。作用在 $(9.34)_2$ 上，则分母消得只剩 $\frac{1}{s!}$，分子上剩有 v^s。恰好和 $(9.29)_4$ 右方 $S=S$ 项的系数一致。这样，(9.35) 就给出了一个求和展开。同时，如果取 $\bar{\chi}$ (ω_i) $=0$，则在 Fourier 变换后，

① 表现为 V 是同位空间标量。

与 ω_i 相联系的能量动量为 $0\left(\text{参见 (9.25)，(9.27) 式。} \bar{\chi}=0 \text{ 时，} \frac{\delta}{\delta x}=\frac{\delta}{\delta v}\right)$。因此，对这个求和展开再作 Fourier 变换，就得到 $(9.29)_4$ 右方的求和。

2. 由于上述重正化前后 V 的同位旋转不变性，已知 Γ 中除含有

$$A(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\bar{\chi}^2+2\bar{\chi}v)+B(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\bar{\chi}^2+2\bar{\chi}v+v^2)^2$$
$$=(A+2Bv^2)(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\bar{\chi}^2+2\bar{\chi}v)+B([\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\bar{\chi}^2+2\bar{\chi}v)^2+v^4]$$

外，还含有如下的 φ 二次项（微扰贡献）：

$$\int\varphi_i(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\varphi_i(y)+\int\bar{x}(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\bar{x}$$
$$+2\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4yv \tag{9.36}$$

(9.36) 是这样得来的：首先，由于同位旋转不变性，Γ 中 φ 二次项微扰贡献一般应是如下形式：

$$\int\varphi_i(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\varphi_i(y)+\int\chi(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\chi(y)$$

然后，当 $v\neq0$，χ 改写成 $\bar{\chi}+v$，则

$$\int(\bar{\chi}(x)+v)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y(\bar{\chi}(y)+v)$$
$$=\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\bar{\chi}(y)+\int v\cdot\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\bar{\chi}(y)$$
$$+\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\cdot v+\int v\cdot\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\cdot v$$
$$=\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\bar{\chi}(y)$$
$$+2\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\cdot v+\text{常数。}$$

这里利用了 $\bar{\chi}$ 是玻色场，$c(x-y)=c(y-x)$。这样，就得到了 (9.36)。又取

$$c(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int c(k)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k$$
$$c_0=c(k^2=0)$$

则 Γ 中含 φ 二次的项合起来可写成如下形式：

$$(A+2Bv^2+c_0)\left(\int\varphi_i(x)\mathrm{d}^4x\varphi_i(x)+\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}_x^4x(x)+2\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4x\cdot v\right)$$
$$+\int\varphi_i(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)^4}(c(k)-c_0)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\cdot\mathrm{d}^4y\varphi_i(y)$$
$$+\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)}(c(k)-c_0)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\cdot\mathrm{d}^4y\bar{\chi}(y) \tag{9.37}$$

因为我们注意到：

$$2\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\cdot v$$
$$=2\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)^4}c(k)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4y\cdot v$$
$$=2\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc(k)e^{ikx}\delta^4(k)\mathrm{d}^4k\cdot v=2\int\bar{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc_0v$$

还注意到

$$\begin{aligned}&\int\overline{\chi}(x)\mathrm{d}^4xc(x-y)\mathrm{d}^4y\overline{\chi}(y)\\=&\int\overline{\chi}(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)^4}(c(k)-c_0)e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4y\overline{\chi}(y)\\&+c_0\int\overline{\chi}(x)\mathrm{d}^4x\frac{1}{(2\pi)^4}e^{ik(x-y)}\mathrm{d}^4k\mathrm{d}^4y\overline{\chi}(y)\end{aligned}$$

第二项正好是

$$c_0\int\overline{\chi}(x)\mathrm{d}^4x\overline{\chi}(x)$$

因此得到（9.37），它是第三步验证的依据之一。

一般重正化时，$c(k)-c_0$ 不一定 $\sim O(k^4)$，也可能 $\sim O(k^2)$，于是Δ'_φ，Δ'_χ 中 $G'(k)-G'$可能是 $\sim O(k^2)$。Δ'_φ，Δ'_χ 分母上 k^2 的系数$\neq1$。后面关于有限重正化的讨论（见（9.53））将说明，经过适当的有限重正化，可把这$\neq1$ 的系数吸收到 Z_φ 中去。

§9－4　$v\neq0$ 重正化的四个例子

例1　求 $v\neq0$ 时 A^i_μ 的传播子。

取第一步中（9.8）式的 L_{inv}，再取 R_ξ 规范（见第二章例3），消去 $v\neq0$ 时的 $A-\varphi_i$ 混合的二次项。注意规范确定项中不含有 $\overline{\chi}$，不影响 $\overline{\chi}$ 的传播子$\Delta_{\overline{\chi}}$。

在（9.8）中令 $\chi=\overline{\chi}+v$，展开得 A^i_μ 的二次部分为：

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{4}(\partial_\mu\mathrm{A}_\nu-\partial_\nu\mathrm{A}_\mu)^2-\frac{\xi}{2}\partial_\mu\mathrm{A}_\mu:\partial_\mu\mathrm{A}_\mu-\frac{q^2v^2}{8}\mathrm{A}_\mu\mathrm{A}_\mu\\&\rightarrow\frac{1}{2}A^a_\mu\square A^a_\nu\delta_{\mu\nu}+\frac{1}{2}(\xi-1)A^a_\mu\partial_\mu\partial_\nu A^a_\nu-\frac{M^2}{2}A^a_\mu A^a_\mu\end{aligned}$$

其中　　$M=\dfrac{qv}{2}$。

$$\therefore K_{\mu\nu}(k)=k^2\delta_{\mu\nu}+M^2\delta_{\mu\nu}+(\xi-1)k_\mu k_\nu$$

$$\Delta^A_{\mu\nu}(k)=\frac{-i}{k^2+M^2}\delta_{\mu\nu}-i\frac{(1-\xi)}{(k^2+M^2)(\xi k^2+M^2)}k_\mu k_\nu \tag{9.38}$$

这就是第二章例2的结果，现在我们要用它来验证一下前述第二步的做法。为简单计，可取 $\xi=1$，则

$$\Delta^A_{\mu\nu}(k)=\frac{-i}{k^2+M^2}\delta_{\mu\nu} \qquad (9.38)_1$$

按照第二步的做法，先取 $v=0$，$M=0$ 的情况：

$$\Delta^A_{\mu\nu}(k)=\frac{-i}{k^2}\delta_{\mu\nu} \qquad (9.38)_2$$

然后，取 $v\neq0$。由于（9.8）中有一项 $-\frac{q^2}{8}\chi^2A^i_\mu A^i_\mu$，取 iL_{inv}，求微扰，则这个顶点中的 $A^i_\mu A^i_\mu$ 与图9.1的 AA 线有两种组合方式，从而第一个 $-\frac{q^2}{8}\chi^2A^i_\mu A^i_\mu$ 顶点在 AA 线上提供一

个 $-i\frac{q^2}{4}\chi^2$。于是，在（9.29）中看到，（9.29）的右方各项实际上是

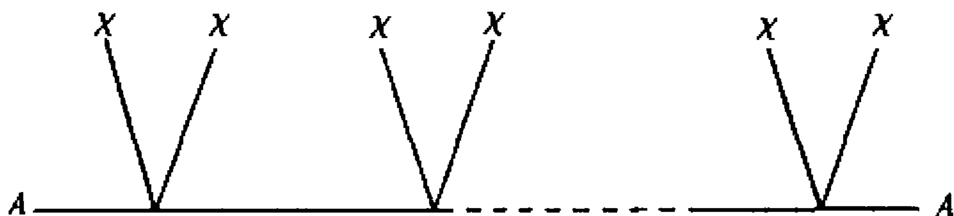


图 9.1

增加若干个图 9.1 中表现出来的有两条 χ 外线的顶点，而把 χ 外线都换成 v。于是，每一个这种顶点提供一个 $-\frac{iq^2}{4}v^2=-iM^2$。所以 $(9.38)_2$ 应修正为如下链式和：

$$\frac{-i}{k^2}+\frac{-i}{k^2}(-iM^2)\frac{-i}{k^2}+\cdots=\frac{-i}{k^2}\left(1+\frac{M^2}{k^2}\right)^{-1}=\frac{-i}{k^2+M^2}$$

确是和 $(9.38)_1$ 一致。说明两点：

1. 这里是每增一个顶点，多两条 χ 线。第三步的讨论容易推广到这种情况。

2. （9.29）右方的 $\frac{1}{s!}$ 因子可保证与实际微扰结果一致。现在我们直接作微扰，就不必另外去考虑 $\frac{1}{s!}$ 因子。

例 2 求 $v\neq 0$ 时 χ 的传播子。

还是用（9.8）的 L_{inv} 和 R_ξ 规范。iL_{inv} 中有 $-i\frac{\lambda}{4}\chi^4$ 项，当 $v=0$，与外面的 $\chi\chi$ 线连成如下 9.2 图的链。χ^4 与 $\chi\chi$ 线有 $4\times 3=12$ 种连法，所以 9.2 图中的每一个顶点提供一个 $-i3\lambda\chi^2$（χ 代表外线或传播子）。然后按照（9.29）的做法，把 χ^2 换成 v^2，则 9.2 图的换成 9.3 图的链（$v\neq 0$ 时）。

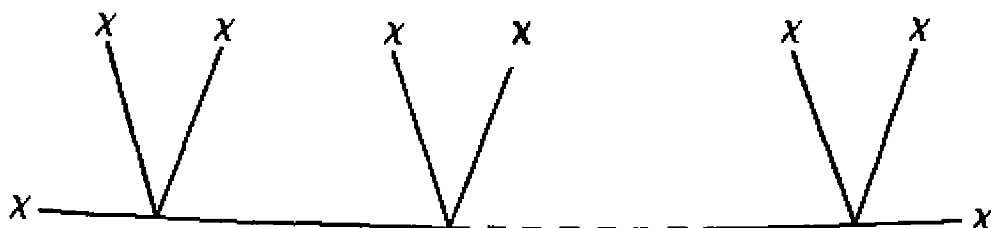


图 9.2

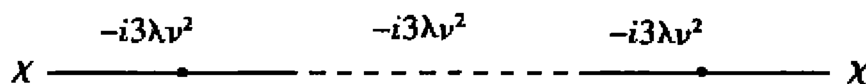


图 9.3

又在 $v=0$ 时，另外还有 $\frac{\mu^2}{2}\chi^2$ 项，提供含 $-i\mu^2$ 的链，所以 $v=0$ 时，χ 的传播子是

$$\Delta_\chi(k)=\frac{-i}{k^2+\mu^2} \tag{9.39}$$

而在 $v\neq 0$ 时，应考虑 9.3 图的链，所以

$$\begin{aligned}\Delta_{\tilde\chi}(k)&=\frac{-i}{k^2+\mu^2}+\frac{-i}{k^2+\mu^2}(-i3\lambda v^2)\frac{-i}{k^2+\mu^2}+\cdots\\&=\frac{-i}{k^2+\mu^2}\left(1+\frac{3\lambda v^2}{k^2+\mu^2}\right)^{-1}=\frac{-i}{k^2+(\mu^2+\lambda v^2)+2\lambda v^2}\end{aligned} \tag{9.39$_1$}$$

也和直接用 $\chi=\bar{\chi}+v$ 代入 L_{inv}所得结果一致。当 $\mu^2+\lambda v^2=0$ 时，不考虑圈图修正有：

$$\Delta_{\bar{\chi}}(k)=\frac{-i}{k^2+2\lambda v^2} \tag{9.40}$$

例 1 的两点说明这里也适用。

例 3　有费米子的情况

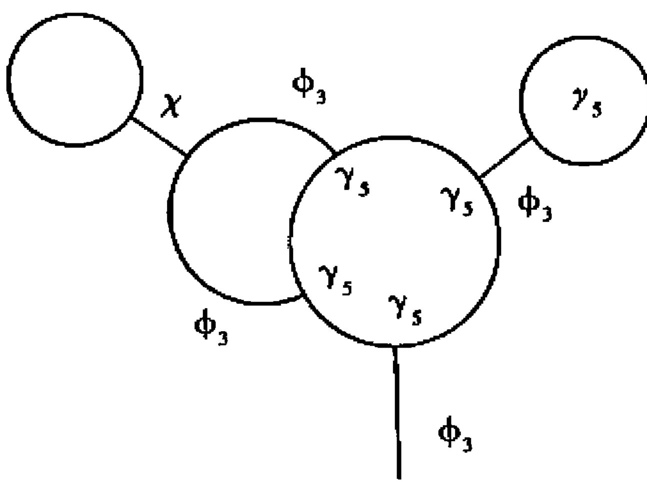


图　9.4

自 (9.9)。φ_1，φ_2 明显地没有轻子蝌蚪图。φ_3 的轻子蝌蚪图（图 9.4）必定有一个圈在取 Tr 求积分时留下奇数个 γ_5（图 9.4 去掉右上示图，圈中就留下三个 γ_5）。然而蝌蚪图的圈没有外部动量，只有内部动量。内部动量积分后，就没有什么动量可以和 γ_5 配合形成 $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}k_\mu^a k_\nu^b k_\sigma^c k_\rho^d\neq 0$ 的贡献。所以，φ_3 的轻子蝌蚪图也没有贡献。

再看 $\bar{\chi}$ 的轻子蝌蚪图：当 $v=0$，e 的传播子中没有质量，$Tr\,\dfrac{1}{\hat{p}}=Tr\,\dfrac{\hat{p}}{p^2}=0$，$x$ 的蝌蚪图就有贡献。当 $v\neq 0$ (9.9) 中多出一项$\dfrac{-G_e v}{\sqrt{2}}\bar{e}e$，取 $m_e=\dfrac{G_e v}{\sqrt{2}}$，它就是电子的静止质量。此时，$\bar{\chi}$ 的最低次蝌蚪图 $\neq 0$。我们看 9.5 图，每一个点代表一个 $-\dfrac{G_e v}{\sqrt{2}}\bar{e}e=-m_e\bar{e}e$ 顶点，蝌蚪图的贡献是（前面的负号来自费米圈）：

$$\begin{aligned}
&(-)i\left(\frac{-G_e}{\sqrt{2}}\right)\left(Tr\,\frac{-1}{\hat{p}}+Tr\,\frac{-1}{\hat{p}}(-im_e)\frac{-1}{\hat{p}}+\cdots\right)\\
&=i\frac{G_e}{\sqrt{2}}Tr\,\frac{-1}{\hat{p}}\left(1-\frac{im_e}{\hat{p}}\right)^{-1}=i\frac{G_e}{\sqrt{2}}Tr\,\frac{-1}{\hat{p}-im_e}\\
&=-i\frac{G_e}{\sqrt{2}}Tr\,\frac{\hat{p}+im_e}{p^2+m_e^2}=\frac{2G_e^2 v}{p^2+M_e^2}
\end{aligned} \tag{9.41}$$

此式和下面几个式子都省写了积分和蝌蚪尾上的传播子。

φ_1，φ_2 的最低次自能（外线取 $k=0$）：仍根据 (9.9) 中的相互作用，有两个顶点（见图 9.6）：

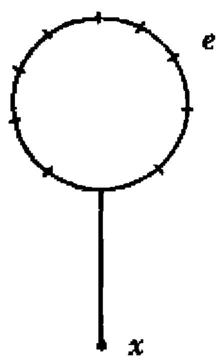


图 9.5

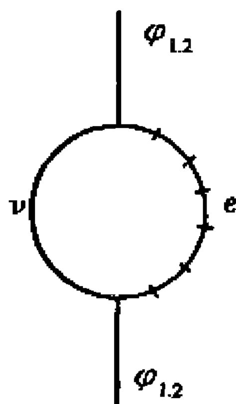


图 9.6

$$\left[\bar{e}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu\varphi_2+\bar{\nu}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e\varphi_2\right]\left[\bar{e}\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu\varphi_2+\bar{\nu}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e\varphi_2\right]$$

有两种组合，所以有两倍（负号来自费米圈）：

$$\begin{aligned}&2(-)i^2\frac{G_e^2}{2}\cdot Tr\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\frac{-1}{\hat{p}}\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\\&\cdot\left[\frac{-1}{\hat{p}}+\frac{-1}{\hat{p}}(-im_e)\frac{-1}{\hat{p}}+\cdots\right]\\&=G_e^2Tr\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\frac{-1}{\hat{p}}\cdot\frac{-1}{\hat{p}-im_e}\\&=\frac{G_e^2}{2}Tr(1+\gamma_5)\frac{\hat{p}}{p^2}\cdot\frac{\hat{p}+im_e}{p^2+m_e^2}=\frac{2G_e^2}{p^2+m_e^2}\end{aligned}\tag{9.42}$$

φ_3 的最低次自能（外线取 $k=0$）：仍根据（9.9）的相互作用（见图9.7）：

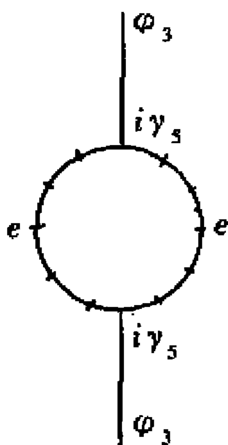


图 9.7

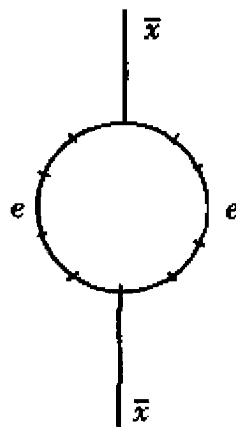


图 9.8

$$\begin{aligned}&(-)i^2\frac{G_e^2}{2}Tr\cdot i\gamma_5\left(\frac{-1}{\hat{p}}+\frac{-1}{\hat{p}}(-im_e)\frac{-1}{\hat{p}}\right.\\&\left.+\cdots\right)i\gamma_5\left(\frac{-1}{\hat{p}}+\frac{-1}{\hat{p}}(-im_e)\frac{-1}{\hat{p}}+\cdots\right)\\&=\frac{G_e^2}{2}Tri\gamma_5\frac{-\hat{p}-im_e}{p^2+m_e^2}i\gamma_5\frac{-\hat{p}-im_e}{p^2+m_e^2}\\&=-\frac{G_e^2}{2}Tr\frac{\hat{p}-im_e}{p^2+m_e^2}\frac{-\hat{p}-im_e}{p^2+m_e^2}=\frac{G_e^2}{2}T\gamma\frac{p^2+m_e^2}{(p^2+m_e^2)^2}=\frac{2G_e^2}{p^2+m_e^2}\end{aligned}\tag{9.43}$$

χ 的最低次自能（外线取 $k=0$）：（见图9.8）

$$(-)i^2\frac{G_e^2}{2}Tr\left(\frac{-1}{\hat{p}}+\frac{-1}{\hat{p}}(-im_e)\frac{-1}{\hat{p}}+\cdots\right)$$

$$\cdot\left(\frac{-1}{\hat{p}}+\frac{-1}{\hat{p}}(-im_e)\frac{-1}{\hat{p}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{G_e^2}{2}Tr\frac{-\hat{p}-im_e}{p^2+m_e^2}\cdot\frac{-\hat{p}-im_e}{p^2+m_e^2}=2G_e^2\frac{p^2-m_e^2}{(p^2+m_e^2)^2}$$

$$=\frac{2G_e^2}{p^2+m_e^2}-\frac{4G_e^2m_e^2}{(p^2+m_e^2)^2}\tag{9.44}$$

综合上述结果，最低次费米图给 Γ 中 φ，χ 一、二次项的贡献正好是$\Big($顶点$\frac{\text{const}}{2}\varphi\varphi$ 与外面的 $\varphi\varphi$ 线有两种连接法，所以贡献是 $2\times\frac{\text{const}}{2}=\text{const}$，可见在 Γ 中对 $\varphi_1\varphi_1+\varphi_2\varphi_2+\varphi_3\varphi_3+\overline{\chi}\overline{\chi}$ 项要再除以 2$\Big)$：

$$-G_e^2\int d^4p\frac{1}{p^2+m_e^2}(\varphi_1\varphi_1+\varphi_2\varphi_2+\varphi_3\varphi_3+\overline{\chi}\overline{\chi}+2v\overline{\chi})$$

$$-2G_e^2\int d^4p\frac{m_e^2}{(p^2+m_e^2)^2}\overline{\chi}\overline{\chi}\tag{9.45}$$

这里又一次看到如果把 $\overline{\chi}$ 一次项减除掉，则同时也减除掉了 φ_1，φ_2，φ_3 在 $k=0$ 的自能图贡献。不过，这里是单圈的特殊情况，以前讨论的是一般情况。

小结一下：

1. 从上面的的三步验证可以看到，在有真空自发破缺时，仍可取无破缺（$v=0$）时的 Z_1，Z_φ，Z_3，Z_4，$\tilde{Z}_1$，$\tilde{Z}_3$，等等，并保证把发散完全消去。

2. 在有真空自发破缺时，S 以及 Γ 中都会出现 $\overline{\chi}$ 一次项。如果 $\overline{\chi}$ 一次项的系数取作零，则 Goldstone 粒子 φ_1，φ_2，φ_3 的质量项（$k=0$ 处的自能项）也必同时为零。

例 4 用第五章的办法来讨论重正化的传播子。

仍用 §9－1 的模型，取 R_ξ 规范，$\xi=1$。S^0 中含有：

$$-\frac{1}{2}\mu^{02}(\varphi_1^{02}+\varphi_2^{02}+\varphi_3^{02}+\overline{\chi}^{02}+2v^0\overline{\chi}^0+v^{02})$$

$$-\frac{1}{4}\lambda^0(\varphi_1^{02}+\varphi_2^{02}+\varphi_3^{02}+\overline{\chi}^{02}+2v^0\overline{\chi}^0+v^{02})^2-\frac{1}{8}g^{02}v^{02}A^{02}$$

$S+\Delta S$ 中含有：

$$-\frac{1}{2}Z_\mu\mu^2(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\overline{\chi}^2+2v\overline{\chi}+v^2)$$

$$-\frac{1}{4}\lambda Z^4(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\overline{\chi}^2+2v\overline{\chi}+v^2)^2-\frac{1}{8}\frac{Z_1^2}{Z_3^2}Z_\varphi g^2v^2A^2$$

$$A^0=Z_3^{1/2}A,(\varphi^0,\bar{x}_0,v^0)-Z_\varphi^{1/2}(\varphi,\bar{x},v)$$

$$g^0=\frac{Z_1}{Z_3^{3/2}}g,\qquad\lambda^0=\frac{Z_4}{Z_\varphi^2}\lambda$$

1. $$\Delta_A'(k) = \frac{-i}{Z_3k^2} + \frac{-i}{Z_3k^2}\left(-i\frac{1}{4}\frac{Z_1^2}{Z_3^2}Z_\varphi g^2v^2 + i\Pi_A^{\text{重正}}(k)\right)\frac{-i}{Z_3k^2} + \cdots$$
$$= \frac{-i}{Z_3k^2}\left(1 + \frac{\frac{1}{4}(Z_1^2/Z_3^2)Z_\varphi g^2v^2 - \Pi_A^{\text{重正}}(k)}{Z_3k^2}\right)^{-1}$$
$$= \frac{-i}{Z_3k^2 + \frac{1}{4}\frac{Z_1^2}{Z_3^2}\varphi_4 g^2 v - \Pi_A^{\text{重正}}(k)} \tag{9.46}$$

2. $$\Delta_{\bar{\chi}}'(k) = \frac{-i}{Z_\varphi k^2} + \frac{-i}{Z_\varphi k^2}(-2iZ_4\lambda v^2 + i\Pi_\chi^{\text{重正}}(k))\frac{-i}{Z_\varphi k^2} + \cdots$$
$$= \frac{-i}{Z_\varphi k^2}\left(1 + \frac{2Z_4\lambda v^2 - \Pi_\chi^{\text{重正}}(k)}{Z_\varphi k^2}\right)^{-1}$$
$$= \frac{-i}{Z_\varphi k^2 + 2Z_4\lambda v^2 - \Pi_{\bar{\chi}}^{\text{重正}}(k)} \tag{9.47}$$

3. A（或$\bar{\chi}$）的自能图发散度是 D（Γ）=2，所以$\Pi_A^{\text{重正}}$（k）（或$\Pi_{\bar{\chi}}^{\text{重正}}$（$k$））包括两个发散项，一个是常数项，一个是 k^2 项。常数项与$\frac{1}{4}\frac{Z_1^2}{Z_3^2}Z_\varphi g^2v^2$（或 $2Z_4\lambda v^2$）抵消，使常数项成为有限；k^2 项与 Z_3k^2（或 $Z_\varphi k^2$）抵消，使 k^2 项成为有限。

再以$\bar{\chi}$的传播子Δ_χ为例，设

$$\Pi_{\bar{\chi}}^{\text{重正}}(k^2) = a_0 + a_1k^2 + a_2k^4 + a_3k^6 + \cdots \tag{9.48}$$

（这是在 $k^2=0$ 附近展开，因为前已证明过，减除取在 $k^2=0$ 处，便于$\bar{\chi}$一次项与 φ_i^2 质量项同时消去）。其中 a_0，a_1 是发散常数，a_2，$a_3\cdots$都不发散。可取

$$(Z_\varphi - 1) = a_1, \qquad (Z_4 - 1)2\lambda v^2 = a_0 \tag{9.49}$$

这样就可把Δ_x'（k）化为比较常见的传播子形式：

$$\Delta_{\bar{x}}'(k) = \frac{-i}{Z_\varphi k^2 + 2Z_4\lambda v^2 - \Pi_{\bar{\chi}}^{\text{重正}}(k)}$$
$$= \frac{-i}{k^2 + a_1k^2 + 2\lambda v^2 + a_0 - \Pi_{\bar{\chi}}^{\text{重正}}(k)}$$
$$= \frac{-i}{k^2 + 2\lambda v^2 - (a_2k^4 + a_3k^6 + \cdots)}$$
$$= \frac{-i}{k^2 + 2\lambda v^2 - \Pi_{\bar{\chi}c}(k^2)} \tag{9.50}$$

其中 $$\Pi_{\bar{\chi}c}(k^2) = O(k^4)$$

但在有的时候，减除时取 Z_φ^1，Z_4^1，而且

$$(Z_\varphi^1 - 1) \neq a_1, \qquad (Z_4^1 - 1)2\lambda v^2 \neq a_0 \tag{9.51}$$

这时

$$\Delta_{\bar{\chi}}'(k) = \frac{-i}{Z_\varphi^1k^2 + 2Z_4^1\lambda v^2 - \Pi_{\chi}^{\text{重正}}(k^2)}\text{①} \tag{9.52}$$

---

① 取 Z_φ,Z_4 时,$Z_\varphi\Pi_{\bar{\chi}}' = \Pi_{\bar{\chi}}^{\text{重正}}$,

取 Z_φ',Z_4' 时,$Z_\varphi'\Pi_{\bar{\chi}}' = \Pi_{\bar{\chi}}^{\text{重正}'}$。

但 Z_φ^1 和 Z_φ 有相同的发散,只相差有限部分。

虽然也是有限的，但不能写成（9.50）形式，因为 k^2 的系数不为 1。不过，只要经过有限重正化，仍可回到（9.50）形式。我们取（9.52）和下式（k 表象）求链式和：

$$\Delta S = \frac{1}{2}(-(Z_\varphi - Z_\varphi^1)k^2 - (Z_4 - Z_4^1)2\lambda v^2)\bar{\chi}^2 \tag{9.53}$$

$$\begin{aligned}
\Delta'_{\bar{\chi}}(k) &= \frac{-i}{Z_\varphi^1 k^2 + 2Z_4^1\lambda v^2 - \Pi_\chi^{重正1}(k^2)} \\
&\quad + \frac{-i}{Z_\varphi^1 k^2 - 2Z_4^1\lambda v^2 - \Pi_\chi^{重正1}(k^2)}\Big(-i(Z_\varphi - Z_\varphi^1)k^2 - i(Z_4 - Z_4^1)2\lambda v^2 \\
&\quad - i\Pi_\chi^{重正1}(k^2) + i\Pi_\chi^{重正}(k^2)\Big)\frac{-i}{Z_\varphi^1 k^2 + 2Z_4^1\lambda v^2 - \Pi_\chi^{重正1}(k^2)} + \cdots\cdots \\
&= \frac{-i}{Z_\varphi^1 k^2 - 2Z_4^1\lambda v^2 - \Pi_\chi^{重正1}(k^2)} \cdot \\
&\quad \left(1 + \frac{(Z_\varphi - Z_\varphi^1)k^2 + (Z_4 - Z_4^1)2\lambda v^2 + \Pi_\chi^{重正}(k^2) - \Pi_\chi^{重正}(k^2)}{Z_\varphi^1 k^2 + 2Z_4^1\lambda v^2 - \Pi_\chi^{重正}(k^2)}\right)^{-1} \\
&= \frac{-i}{Z_\varphi k^2 - 2Z_4\lambda v^2 - \Pi_\chi^{重正}(k^2)} = \frac{-i}{k^2 + 2\lambda v^2 - \Pi_{\bar{\chi}c}(k^2)}
\end{aligned}$$

〔其中 $\Pi_\chi^{重正}(k^2) - \Pi_\chi^{重正}(k^2)$ 的出现是因为ΔS 改了，相应地 $\Pi_\chi^{重正1}(k^2)$ 应换成 $\Pi_\chi^{重正}(k^2)$。参考旧脚注〕

这就回到了（9.50）的形式。

4. 求完全传播子的极点，以（9.50）为例，也就是求

$$k^2 + 2\lambda v^2 - \Pi_{\bar{\chi}c}(k^2)$$

的零点。把零点记作 $-a^2$，则满足

$$-a^2 + 2\lambda v^2 - \Pi_{\bar{\chi}c}(-a^2) = 0$$

但 $\Pi_{\bar{\chi}c}(-a^2) \neq 0$（$\Pi_{\bar{\chi}c}(0) = 0$），所以

$$a^2 = 2\lambda v^2 - \Pi_{\bar{\chi}c}(-a^2) \neq 2\lambda v^2 \tag{9.54}$$

可见 $2\lambda v^2$ 与极点位置 a^2 有差别，差别是 $-\Pi_{\bar{\chi}c}(k^2)$，它来自圈图贡献。此地 $\Pi_{\bar{\chi}c}(k^2)$已经是有限的，而且是 $\sim O(k^4)$。在耦合常数很小时，它很小，$2\lambda v^2$ 与 a^2 的差别就很小。自（9.50），（9.54），$\bar{\chi}$ 的完全传播子又可写成

$$\Delta'_{\bar{\chi}}(k) = \frac{-i}{k^2 + a^2 - O_{\bar{\chi}c}(k^2) + O_{\bar{\chi}}(-a^2)} \tag{9.55}$$

§9-5 R_ξ 规范中各个传播子的极点

R_ξ 规范用于有自发破缺的情况很方便。它的可变的参数 ξ 可以把么正规范（$\xi=0$）同 *Landau* 规范（$\xi=\infty$）以及'tHooft-Feynman 规范（$\xi=1$）联系起来，从而证明 *F-P* 场、非物理的 Higgs 场（即 Goldstone 场）等等并不破坏么正性。一般来看，么正规范是不可重正的。但用 R_ξ 规范就可看到么正规范是 R_ξ 规范的 $\xi=0$ 极限情况，从而也可以重正化，得到不发散的结果，而且物理的 S 矩阵元与 ξ 无关。

仍考察 *SU*（2）的例子，取

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix},\ \tilde{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,v),\quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2 + i\varphi_1\\ \chi - i\varphi_3\end{pmatrix}$$

$$\varphi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - i\varphi_1, \chi + i\varphi_3) \tag{9.56}$$

又取 R_ξ 规范，则 τ^i 取 *Pauli* 矩阵时有：

$$C^i = \xi^{1/2}\partial_\mu A^i_\mu + \xi^{-1/2}g\left(i\tilde{v}\frac{\tau^i}{2}\varphi - i\varphi^+\frac{\tau^i}{2}v\right)$$

$$= \xi^{1/2}\partial_\mu A^i_\mu + \xi^{-1/2}\frac{gv}{2}\frac{i}{\sqrt{2}}\left((0\ 1)\tau^i\varphi - \varphi^+\tau^i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \xi^{1/2}\partial_\mu A^i_\mu - \xi^{-1/2}\frac{gv}{2}\varphi_i \qquad (i = 1,2,3) \tag{9.57}$$

定义
$$M = \frac{gv}{2} \tag{9.58}$$

则
$$C^i = \xi^{1/2}\partial_\mu A^i_\mu - \xi^{-1/2}M\varphi_i \tag{9.59}$$

$$-\frac{1}{2}C^iC^i = -\frac{\xi}{2}\ (\partial_\mu A^i_\mu \cdot \partial_\mu A^i_\mu)\ + M\partial_\mu A^i_\mu \cdot \varphi_i - \frac{1}{2}\frac{M^2}{\xi}\varphi_i\varphi_i \tag{9.60}$$

回过来看（9.8）式，331 页最后一行最后一项是

$$-\frac{i}{4}gA^i_\mu \cdot 2i\chi(\partial_\mu\varphi^i) = \frac{g}{2}(\bar{\chi} + v)A^i_\mu\partial_\mu\varphi^i$$

右方的第二项$\frac{gv}{2}A^i_\mu\partial_\mu\varphi_i = MA^i_\mu\partial_\mu\varphi_i$，它与（9.60）右方第二项合在一起正好消去（表面上或边界上为 0）。这里又一次看到，R_ξ 规范可以去 $A^i_\mu\partial_\mu\varphi_i$ 或 $\partial_\mu A^i_\mu \cdot \varphi_i$ 直接耦合项。

但是，⟨01T（$A\varphi$）10⟩ 还有类高次图（圈图）的贡献，例如

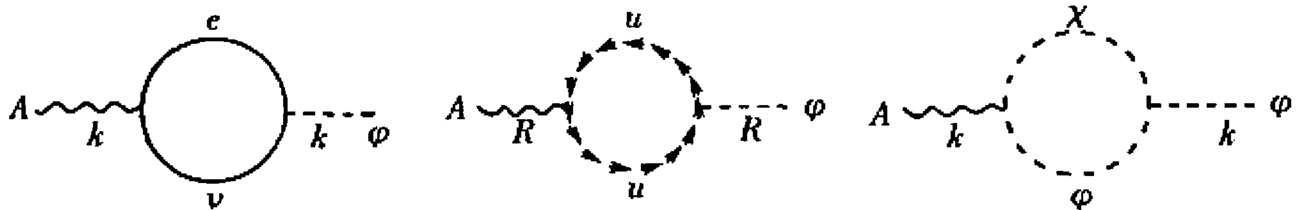


图 9.9

一般情况下，不能把这些高次 $A-\varphi$ 混合传播子的贡献消去。但是我们可以通过调节参数，例如把 $M = \frac{gv}{2}$换成 M'，来使得 $A-\varphi$ 混合传播子抵消掉。后面将讨论这一点。

现在求规范补偿项，自（9.60）：

$$\frac{\delta C^i}{\delta\lambda^j} = \xi^{1/2}\left(-\frac{1}{g}\delta_{ij}\partial_\mu + f_{ijk}A^k_\mu(y)\right)\partial_\mu\delta^4(x-y)$$

$$- \xi^{-1/2}M\left(-\frac{\bar{\chi}+v}{2}\delta_{ij} + \varepsilon_{ijk}\frac{\varphi_k}{2}\right) \tag{9.61}$$

其中第二项是如下得到的，自（9.10）：

$$\frac{\delta\varphi_1}{\delta\lambda^1} = -\frac{\chi}{2},\quad \frac{\delta\varphi_1}{\delta\lambda^2} = \frac{\varphi_3}{2},\quad \frac{\delta\varphi_1}{\delta\lambda^3} = -\frac{\varphi_2}{2},\qquad x = \bar{x} + v$$

$$\frac{\delta\varphi_2}{\delta\lambda^1} = -\frac{\varphi_3}{2},\quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\lambda^2} = -\frac{\chi}{2},\quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\lambda^3} = \frac{\varphi_1}{2},$$

$$\frac{\delta\varphi_3}{\delta\lambda^1}=\frac{\varphi_2}{2},\qquad \frac{\delta\varphi_3}{\delta\lambda^2}=-\frac{\varphi_1}{2},\ \frac{\delta\varphi_3}{\delta\lambda^3}=-\frac{\chi}{2},$$

∴ 合在一起得$\frac{\delta\varphi_i}{\delta\lambda^j}=-\frac{\chi}{2}\delta_{ij}+\varepsilon_{ijk}\frac{\varphi_k}{2}$

所以，自（3.49）定义；取 $M_{ij}=-\frac{\delta C^i}{\delta\lambda^j}g\xi^{-1/2}$ （$g\xi^{-1/2}$是常数），则有

$$\begin{aligned}L_{F-P}&=\bar{u}_i M_{ij}u_j=-\partial_\mu\bar{u}_i\partial_\mu u_i+g\ (\partial_\mu\bar{u}_i)\ \cdot u_j A_\mu^k f_{ijk} \qquad \text{（与（4.22）对照）}\\&-\frac{M}{\xi}\frac{g}{2}\ (\bar{\chi}+v)\ (\bar{u}_1u_1+\bar{u}_2u_2+\bar{u}_3u_3)\\&+\frac{M}{\xi}\frac{g}{2}\ [\varphi_1\ (\bar{u}_2u_3-\bar{u}_3u_2)\ +\varphi_2\ (\bar{u}_3u_1-\bar{u}_1u_3)\ +\varphi_3\ (\bar{u}_1u_2-\bar{u}_2u_1)]\end{aligned}\tag{9.62}$$

与（9.8），（9.60）合在一起：

$$\begin{aligned}L_{eff}=&-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}\cdot F^i_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\ (\partial_\mu\varphi_i\cdot\partial_\mu\varphi_i)\ -\frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\chi}\cdot\partial_\mu\bar{\chi}\qquad (\chi=\bar{\chi}+v)\\&-\frac{i}{4}gA^i_\mu\ [-2\ (\partial_\mu\bar{\chi})\ \cdot i\varphi_i+2i\bar{\chi}\ (\partial_\mu\varphi_i)\ -2i\varepsilon_{ijk}\varphi_j\ (\partial_\mu\varphi_k)]\\&-\frac{g^2}{8}A^i_\mu A^i_\mu\ (\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_2^3+\bar{\chi}^2+2v\bar{\chi}+v^2)\ -\mu^2\ (\varphi^+\varphi)\ -\lambda\ (\varphi^+\varphi)^2\\&-\frac{\xi}{2}\ (\partial_\mu A^i_\mu\cdot\partial_\nu A^i_\nu)\ -\frac{M^2}{2\xi}\varphi_i\varphi_i-\partial u_\mu i\cdot\partial_\mu u_i\\&+gf_{ijk}\ (\partial_u\bar{u}_i)\ u_jA^k_\mu-\frac{M}{\xi}\frac{g}{2}\ (\bar{\chi}+v)\ (\bar{u}_1u_1+\bar{u}_2u_2+\bar{u}_3u_3)\\&+\frac{Mg}{2\xi}\ [\varphi_1\ (\bar{u}_2u_3-\bar{u}_3u_2)\ +\varphi_2\ (\bar{u}_3u_1-\bar{u}_1u_3)\ +\varphi_3\ (\bar{u}_1u_2-\bar{u}_2u_1)]\end{aligned}\tag{9.63}$$

未经微扰修正的极点

A^i_μ 的传播子：从 L_{eff}中收集 A^i_μ 的二次项：

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu)(\partial_\mu A^i_\nu-\partial_\nu A^i_\mu)-\frac{\xi}{2}\partial_\mu A^i_\mu\cdot\partial_\nu A^i_\nu-\frac{M^2}{2}A^i_\mu A^i_\mu$$

$$\to\frac{1}{2}A^i_\mu\square A^i_\nu\delta_{\mu\nu}+\frac{\xi-1}{2}A^i_\mu\partial_\mu\partial_\nu A^i_\nu-\frac{M^2}{2}A^i_\mu A^i_\nu\delta_{\mu\nu}$$

$$\begin{aligned}\Delta^A_{\mu\nu}(k)&=\frac{-i}{k^2+M^2}\delta_{\mu\nu}+\left(\frac{1}{\xi}-1\right)\frac{-i}{(k^2+M^2)\left(k^2+\frac{M^2}{\xi}\right)}k_\mu k_\nu\\&=-i\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right)\frac{1}{k^2+M^2}+\frac{i}{k^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\end{aligned}\tag{9.64}$$

φ_i的传播子：收集 φ_i 的二次项：

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_i\partial_\mu\varphi_i)-\frac{M^2}{2\xi}\qquad\varphi_i\varphi_i\text{（树图近似，取 }\mu^2=-\lambda v^2\text{）}$$

$$\Delta_{\varphi i}(k) = \frac{-i}{k^2 + \frac{M^2}{\xi}} \qquad i = 1,2,3 \tag{9.65}$$

$\overline{\chi}$ 的传播子：收集 $\overline{\chi}$ 的二次项

$$-\frac{1}{2}(\partial_\mu\overline{\chi}\cdot\partial_\mu\overline{\chi}) - \frac{2\lambda v^2}{2}\overline{\chi}^2 \qquad （树图近似，取\ \mu^2 = -\lambda v^2）$$

$$\Delta_\chi(k) = \frac{-i}{k^2 + 2\lambda v^2} \tag{9.66}$$

$\overline{u}u$的传播子：收集 $\overline{u}$，u 二次项

$$-\partial_\mu\overline{u}_i\partial_\mu u_i - \frac{M}{\xi}\frac{qv}{2}\overline{u}_i u_i$$

$$\Delta_{u_i}(k) = \frac{-i}{k^2 + \frac{M}{\xi}\frac{qv}{2}} \tag{9.67}$$

在树图近似下，取 $M^2 = \left(\frac{qv}{2}\right)^2$（消去 $A-\varphi$ 混合项），则 A，φ，u 的传播子有相同的极点。注意在$\Delta^A_{\mu\nu}$（k）中这个极点项与Δ_{φ_i}（k），Δ_{u_i}（k）的极点项符号正相反。下面将看到，它们在矩阵之中互相抵消。

经过微扰修正的极点

在有微扰修正时，这三个传播子的极点也相同。这将在下面证明，我们的出发点是：

$$W[\eta,J,K] = \int d(A)d(\varphi)d(\chi)d(u)d(\overline{u}) \cdot e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}(C^i)^2+\eta^i_\mu A^i_\mu+J^i\varphi_i+K\chi]} \tag{9.68}$$

（泛函相乘，积分 d^4x 已包含在内。$\chi=\overline{\chi}+v$，d（χ）=d（$\overline{\chi}$）。这里写χ就够了，暂不必把 $\chi=\overline{\chi}+v$ 代入），设 $C^i=\xi^{1/2}\partial_\mu A^i_\mu-\xi^{-1/2}M'\varphi_i$（把（9.59）中的 M 换成可调节的 M'），则可取 η^i_μ，J^i，K 分别为 $\partial_\mu\Lambda^i$，$\frac{M'}{\xi}\Lambda^i$，0，而 Λ^i 中不含有场算子，于是有

$$W\left[\partial_\mu\Lambda^i,\frac{M'}{\xi}\Lambda^i,0\right] = \int d(A)d(\varphi)d(\chi)d(u)d(\overline{u}) \cdot e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}(C^i)^2-\frac{\Lambda^i}{\xi^{1/2}}C^i]}$$

$$= \int d(A)d(\varphi)d(\chi)d(u)d(\overline{u})\; e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}\left(C^i+\frac{\Lambda^i}{\xi^{1/2}}\right)^2]}e^{i\frac{1}{2}\frac{\Lambda^i\Lambda^i}{\xi}} \tag{9.69}$$

然而 $-\frac{1}{2}\left(C^i+\frac{\Lambda^i}{\xi^{1/2}}\right)^2=-\frac{1}{2}(\overline{C}^i)^2$ 相当于一个新的规范确定项，在第三章知道，由于规范不变性，规范确定项目 $-\frac{1}{2}(C^i)^2$ 极成 $-\frac{1}{2}(\overline{C}^i)^2$，$W[0]$ 不变$\left(这里\frac{\Lambda^i}{\xi^{1/2}}不含场，所以\ L_{F-P}的形式不变\right)$，所以：

$$W[0,0,0] = \int d(A)d(\varphi)d(\chi)d(u)d(\bar{u}) \cdot e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}(C^i)^2]}$$

$$= \int d(A)d(\varphi)d(\chi)d(u)d(\bar{u}) \cdot e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}(C^i+\frac{\Lambda^i}{\xi^{1/2}})^2]} \tag{9.70}$$

代入（9.69）：

$$W\left[\partial_\mu \Lambda^i, \frac{M'}{\xi}\Lambda^i, 0\right] = W[0,0,0]e^{i\frac{1}{2}\frac{\Lambda^i\Lambda^i}{\xi}}$$

于是

$$Z\left[\partial_\mu \Lambda^i, \frac{M'}{\xi}\Lambda^i, 0\right] = -i\ln W[\partial_\mu \Lambda^i, \frac{M'}{\xi}\Lambda^i, 0]$$

$$= 常数 + \frac{1}{2}\frac{\Lambda^i\Lambda^i}{\xi} \tag{9.71}$$

对（9.71）作 Λ^i 泛函微分：

左方：

$$\frac{\delta}{\delta\Lambda^b(y)}\frac{\delta}{\delta\Lambda^a(x)}Z[\partial_\mu\Lambda^i, \frac{M'}{\xi}\Lambda^i, 0]\Big|_{\Lambda=0}$$

$$= \frac{\delta}{\delta\Lambda^b(y)}\frac{-i\cdot i}{W}\int d(A)\cdots d(\bar{u})\left(-\partial_\mu A^a_\mu(x) + \frac{M'}{\xi}\varphi_a(x)\right) \cdot e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}(c^i)^2-\frac{\Lambda^i}{\xi^{1/2}}c^i]}\Big|_{\Lambda^i=0}$$

$$= \frac{-i\cdot i\cdot i}{W[0]}\int d(A)\cdot d(\bar{u})\left(-\partial_\mu A^a_\mu(x) + \frac{M'}{\xi}\varphi_a(x)\right) \cdot \left(-\partial_\nu A^b_\nu(y) + \frac{M'}{\xi}\varphi_b(y)\right)\cdot e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}(c^i)^2]}$$

$$- \frac{-i\cdot i\cdot i}{W[0]}\int d(A)\cdots d(\bar{u})\left(-\partial_\mu A^a_\mu(x) + \frac{M'}{\xi}\varphi_a(x)\right) \cdot e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}(c^i)^2]}$$

$$\cdot \frac{1}{W[0]}\int d(A)\cdots d(\bar{u})\left(-\partial_\nu A^b_\nu(y) + \frac{M'}{\xi}\varphi_b(y)\right) \cdot e^{i[L_{inv}+L_{F-P}-\frac{1}{2}(c^i)^2]}$$

$$= i\cdot i\left(-\partial x_\mu \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta^a_\mu(x)} + \frac{M'}{\xi}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^a(x)}\right) \cdot \left(-\partial y_\nu \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta^b_\nu(y)} + \frac{M'}{\xi}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^b(y)}\right)$$

$$\cdot (-i)n\int d(A)\cdots d(\bar{u}) \cdot e^{i}[L_{inv} + L_{F-P} - \frac{1}{2}(c^i)^2 + \eta^i_\mu A^i_\mu + J^i\varphi_i + K\chi]\Big|_{\eta=J=K=0}$$

$$= -\left(-\partial_{x_\mu}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta^a_\nu(x)} + \frac{M'}{\xi}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^a(x)}\right)$$

$$\cdot\left(-\partial_{y_\nu}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta_\nu^b(y)}+\frac{M'}{\xi}\frac{1}{i}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\delta}{\delta J^b(y)}\right)Z[\eta,J,K]\Big|_{\eta=J=K=0}$$

右方：$=\frac{1}{\xi}\delta^4\ (x-y)\ \delta^{ab}$

从而有

$$\left(\partial_{x_\mu}\partial_{y_\nu}\frac{\delta}{\delta\eta_\mu^a(x)}\frac{\delta}{\delta\eta_\nu^b(y)}-\frac{M'}{\xi}\partial_{x\mu}\frac{\delta}{\delta\eta_\mu^a(x)}\cdot\frac{\delta}{\delta J^b(y)}\right.$$

$$\left.-\frac{M'}{\xi}\partial_{y_\nu}\frac{\delta}{\delta J^a(x)}\frac{\delta}{\delta\eta_\nu^b(y)}+\frac{M'^2}{\xi^2}\frac{\delta}{\delta J^a(x)}\frac{\delta}{\delta J^b(y)}\right)$$

$$\cdot Z[\eta,J,K]\,|_{\eta=J=K=0}=\frac{1}{\xi}\delta^4(x-y)\delta^{ab}\tag{9.72}$$

根据第一章的讨论，(9.72) 可写成（都是连接图）：

$$i\partial x_\mu\partial y_\nu\ \langle 0|\ TA_\mu^a\ (x)\ A_\nu^b\ (y)\ |0\rangle$$

$$-i\frac{M'}{\xi}\partial_{x_\mu}\langle 0|\ TA_\mu^a(x)\varphi_b(y)\,|\,0\rangle-i\frac{M'}{\xi}\partial_{y_\nu}\langle 0|\ TA_\nu^b(y)\varphi_a(x)\,|\,0\rangle$$

$$+i\frac{M'^2}{\xi^2}\langle 0|\ T\varphi_a(x)\varphi_b(y)\,|\,0\rangle=\frac{1}{\xi}\delta^4(x-y)\delta^{ab}\tag{9.73}$$

从已知的没有微扰修正的 A，φ，u 的传播子形式来看，对于传播子的 P 表示应取如下参数形式：

$$i\langle 0|\ TA_\mu^i(x)A_\nu^k(y)\,|\,0\rangle\sim\left(\delta_{\mu\nu}\frac{1}{a}+p_\mu p_\nu\frac{b}{ad}\right)\delta^{ik}\tag{9.74}$$

$$i\langle 0|\ TA_\mu^i(x)\varphi_k(y)\,|\,0\rangle\sim ip_\mu\delta^{ik}\frac{c}{d}\tag{9.75}$$

在 (9.75) 里，若 x，y 交换，则其 p 表示中 $ip_\mu\to -ip_\mu$。

$$i\langle 0|\ T\varphi_i(x)\varphi_k(y)\,|\,0\rangle\sim\delta^{ik}\frac{1}{d}\tag{9.76}$$

a，b，c，d 不含 p^2 的极点，但可以是 p^2 的级数。把 (9.74)，(9.75)，(9.76) 代入 (9.73)，得到：

$$p^2\frac{1}{a}+p^2p^2\frac{b}{ad}+2\frac{M'}{\xi}p^2\frac{c}{d}+\frac{M'^2}{\xi^2}\frac{1}{d}=\frac{1}{\xi}\tag{9.77}$$

(∂x_μ 提供 ip_μ，$\partial\ y_\nu$ 提供 $-ip_\nu$)。正如关于图 9.9 的讨论所说，如果取 $M'=M=\frac{gv}{2}$，则 c 不会是零。但总可以调节 M'，使微扰修正后的 $A_\mu^i\partial_\mu\varphi^i$ 耦合项在 $p^2=0$ 时（经抵消后）得零，即

$$c(p^2=0)=0\tag{9.78}$$

在 $p^2=0$ 时，自 (9.77) 有

$$d(p^2=0)=\frac{M'^2}{\xi}\tag{9.79}$$

(9.77) 又可写成：

$$p^2 d + p^2 p^2 b + 2\frac{M'}{\xi}p^2 ca + \frac{M'^2}{\xi^2}a = \frac{1}{\xi}ad$$

作$\frac{d}{d\ (p^2)}$微商；

$$p^2 d' + d + 2p^2 b + p^2 p^2 b' + 2\frac{M'}{\xi}ca + 2\frac{M'}{\xi}p^2\frac{\partial}{\partial P^2}(ca)$$

$$+\frac{M'^2}{\xi^2}a' = \frac{1}{\xi}a'd + \frac{1}{\xi}ad'$$

令 $p^2=0$，并把 $d\ (p^2=0)\ =\frac{M'^2}{\xi}$代入，得到

$$d(p^2=0) = \frac{M'^2}{\xi} = \frac{1}{\xi}a(p^2=0)d'(p^2=0)$$

$$\therefore a(p^2=0)d'(p^2=0) = M'^2 \tag{9.80}$$

把（9.74～9.76）与没有微扰修正的传播子（9.64），（9.65）进行对比，$p^2\to 0$ 时，a 应与$p^2+M'^2$相当，d 应与 $p^2+\frac{M'^2}{\xi}$相当。则自（9.79）有

$$d(p^2=0) = \frac{M'^2}{\xi}$$

自（9.80）有

$$a(p^2=0)d'(p^2=0) = M'^2$$

不同的传播子有共同的分母 d，有共同的极点，这是规范不变性的结果。后面计算 Δ_u 时还要讨论这一点。

几点说明

1. 第八章已知道，C^i 在重正化中不变，所以

$$\xi^{0 1/2}\partial_\mu A_\mu^{i0} - \frac{M'^0}{\xi^{0 1/2}}\varphi^{0i} = \xi^{1/2}\partial_\mu A_\mu^i - \frac{M'}{\xi^{1/2}}\varphi_i$$

相应地有（见第八章）：

$$\xi^0 = \frac{\xi}{Z_3},\quad \frac{M'^0}{\xi^{0 1/2}} = \frac{M'}{\xi^{1/2}}Z_\varphi^{-1/2},\quad M'^0 = Z_3^{-1/2}Z_\varphi^{-1/2}M' \tag{9.81}$$

我们从 S^0 来作微扰（因 S^0 有规范不变性，上面的证明也适用），则（9.79）给出

$$d^0(p^2=0) = \frac{M'^{02}}{\xi^0} = \frac{M'^2}{\xi}Z_\varphi^{-1} \to \lim_{p^2\to 0} d^0(p^2) = Z_\varphi^{-1}\left(d^2 + \frac{M'^2}{\xi}\right) \tag{9.82}$$

（上面（9.80）的讨论说过，$p^2\to 0$ 时，d 与 $p^2+\frac{M'^2}{\xi}$相当）。如果（9.82）中是 αp^2，而不是 p^2，则经有限重正化后可使 α 换成 1。又自（9.80）给出（根据（9.82））：

$a^v\ (p^2=0)\ d^{0\prime}\ (p^2=0)\ = a^v\ (p^2=0)\ Z_\varphi^{-1} = M'^{02} = Z_3^{-1}Z_4^{-1}M'^2$

$\therefore \lim\limits_{p^2\to 0} a^0\ (p^2)\ = Z_3^{-1}\ (p^2+M'^2)$ (9.83)

这里如果是 βp^2，不是 p^2，也可经有限重正化把 β 换成 1。

2. 再看一下 $a\ (p^2)$ 和 $d\ (p^2)$ 的两种形式。用 S^0 作微扰，因为自（9.81），（9.83），$a^0\ (p^2=0) = Z_\varphi M'^{02} = Z_3^{-1}M'^2$，还因为用 S^0 作微扰，$a\ (p^2)$ 第一项应该是

p^2，所以：

$$\frac{1}{a^0(p^2)} = \frac{1}{p^2 + Z_\varphi M'^{02} - \Pi'(p^2)} \tag{9.84}$$

其中Π'（$p^2=0$）$=0$，而且$Z_3\Pi'$（p^2）$=\Pi^{重正}$（p^2）（A的自能图，见第五章），于是利用（9.81）：

$$\frac{1}{a(p^2)} = \frac{Z_3}{Z_3p^2 + Z_3Z_4M'^{02} - Z_3\Pi'(p^2)}$$

$$= \frac{Z_3}{Z_3p^2 + M'^2 - \Pi^{重正}(p^2)} \tag{9.84$_1$}$$

仿照第五章并考虑有限重正化，有

$$Z_3p^2 - \Pi^{重正}(p^2) = \left(1 + \sum_n f(n)\right)p^2 - \left(\sum_n f(n)p^2 + \Pi_{AC}(p^2)\right)$$

$$= p^2 - \Pi_{AC}(p^2) \qquad (\Pi_{AC}(p^2) = O(p^4))$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{a^0(p^2)} = \frac{Z_3}{p^2 + M'^2 - \Pi_{AC}(p^2)} \tag{9.85}$$

与（9.83）一致。

d^0（p^2）也类似，自（9.82），d^0（$p^2=0$）$=\frac{M'^{02}}{\xi^0}$，也是因为用S^0作微扰，d（p^2）第一项应该是p^2，所以：

$$\frac{1}{d^0(p^2)} = \frac{1}{p^2 + \frac{M'^{02}}{\xi^0} - \Pi'_d(p^2)} \tag{9.86}$$

也有Π'_d（$p^2=0$）$=0$，而且$Z_\varphi\Pi'_d$（p^2）$=\Pi_d^{重正}$（p^2）：

$$\frac{1}{d^0(p^2)} = \frac{Z_\varphi}{Z\varphi p^2 + Z_\varphi \frac{M'^{02}}{\xi^0 - Z_\varphi\Pi'_d(p^2)}} = \frac{Z_\varphi}{Z_\varphi p^2 + \frac{M'^2}{\xi} - \Pi_d^{重正}(p^2)}$$

仿照第五章并考虑有限重正化，有

$$Z_\varphi p^2 - \Pi_d^{重正}(p^2) = \left(1 + \sum_n g(n)\right)p^2 - \left(\sum_n g(n)p^2 + \Pi_{\varphi c}{}^2(p^2)\right)$$

$$= p^2 - \Pi_{\varphi c}(p^2) \qquad (\Pi_{\varphi c}(p^2) = O(p^4))$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{d^0(p^2)} = \frac{Z_\varphi}{p^2 + \frac{M'^2}{\xi} - \Pi_{\varphi c}(p^2)} \tag{9.87}$$

与（9.82）一致。

3. $\Delta^{A'}_{\mu\nu}$（p）与b（p^2）。自（9.74），（9.85），（9.87），有（也是自S^0出发作微扰）

$$\Delta^{A'ik}_{\mu\nu}(p) = -i\left(\frac{\cdot Z_3}{p^2 + M'^2 - \Pi_{AC}(p^2)}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\frac{Z_3\left(p^2 + \frac{M'^2}{\xi} - \Pi_{\varphi c}(p^2)\right) + Z_3Z_\varphi p^2 b(p^2)}{(p^2 + M'^2 - \Pi_{AC}(p^2))\left(p^2 + \frac{M'^2}{\xi} - \Pi_{\varphi c}(p^2)\right)}\right)\delta^{ik}$$

(9.74) 与 (2.84) 比较，没有微扰时，$b=\frac{1}{\xi}-1$，现在有微扰，则 $b\ (p^2)$ 应具如下形式：

$$b(p^2) = Z_\varphi^{-1}\left(\frac{1}{\xi} - 1 + B(p^2)\right)$$

（必须有 Z_φ^{-1} 因子，否则重正化后还遗留发散因子，这是自相矛盾的）。于是

$$\Delta_{\mu\nu}^{A'ik}(p) = -i\left(\frac{Z_3}{p^2 + M'^2 - \Pi_{AC}(p^2)}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\frac{Z_3\left(\frac{p^2 + M'^2}{\xi} - \Pi_{\varphi c}(p^2) + p^2 B(p^2)\right)}{(p^2 + M'^2 - \Pi_{AC}(p^2))\left(p^2 + \frac{M'^2}{\xi} - \Pi_{\varphi c}(p^2)\right)}\right)\delta^{ik} \qquad (9.88)$$

$$\lim_{p^2=0}\Delta_{\nu\mu}^{A'ik}(p) = -i\left(\frac{Z_3}{p^2 + M'^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\frac{Z_3}{\xi p^2 + M'^2}\right)\delta^{ik} = Z_3 \lim_{p^2=0}\Delta_{\mu\nu}^{A'ik}(p) \qquad (9.89)$$

这里 $\lim_{p^2=0}\Delta_{\mu\nu}^{A'ik}\ (p)$ 与 (2.84) 一致。

4. 再看 $\Delta_\mu'\ (p)$ 的极点。正如前面已证明的，在有真空自发破缺时，Γ 中的 χ 应换成 $\bar{\chi}+v$，可见 Slavnov 恒等式仍成立，B. R. S. 变换也依旧，只是要作一个“变数”变换，把 χ 换成 $\bar{\chi}+v$。现在我们就通过 B. R. S. 变换和 Slavnov 恒等式来找 $\Delta_\mu\ (p)$ 的极点与 $\Delta_\varphi\ (p)$ 的极点之间的关系。先把 A_μ^i，φ_i，$\chi=\bar{\chi}+v$，u_a，$\bar{u}_a$ 的 B. R. S. 变换写出来（参考 (9.61)、(9.10) 和 (4.34)）：

$$\delta A_\mu^a(x) = (-\partial_\mu\delta^4(x-y)\delta^{ab} + g\varepsilon^{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)A_\mu^c(z))u_b(y)\delta\lambda$$

$$\delta\varphi_i(x) = \left(-\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)g\frac{\chi(y)}{2}\delta^{ij}u_j(z)\right.$$
$$\left.+g\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)\frac{\varphi_k(y)}{2}u_j(z)\varepsilon^{ijk}\right)\delta\lambda$$

$$\delta\chi(x) = \left(\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)g\frac{\varphi_i(y)}{2}u_i(z)\right) \qquad (\delta\lambda=\delta\bar{\chi}(x))$$

$$\delta u_a(x) = -\frac{1}{2}gf_{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)u_b(y)u_c(z)\delta\lambda \qquad (f_{abc}=\varepsilon^{abc})$$

$$\delta\bar{u}_a(x) = (\xi\partial_\mu\delta^4(x-y)A_\mu^a(y) - \delta^4(x-y)M'\varphi_a(y))\delta\lambda \qquad (9.90)$$

(4.47) 现在写成（重复出现的坐标要积分）：

$$\int\Big\{-j_\mu^a(x)(-\partial_\mu\delta^4(x-y)\delta^{ab} + g\varepsilon^{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)A_\mu^c(z))u_b(y)$$
$$-j_i(x)\left(-\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)g\frac{\chi(y)}{2}u_i(z)\right.$$
$$\left.+g\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)\frac{\varphi_k(y)}{2}u_j(z)\varepsilon^{ijk}\right)$$
$$-j_x(x)\cdot\left(\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)g\frac{\varphi_i(y)}{2}u_i(z)\right)$$

$$- \bar{\xi}_a(x)\left(-\frac{g}{2}\varepsilon^{abc}u_b(x)u_c(x)\right)$$

$$+ \left(\xi\partial_\mu\delta^4(x-y)A^a_\mu(y) - \delta^4(x-y)M'\varphi_a(y)\right)\xi_a(x) \Big\}$$

$$\cdot \mathrm{d}(A)\cdots\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u})$$

$$\cdot e^{i\{S[A\cdots,u,\bar{u},K,L]+A^a_\mu j^a_\mu+\varphi_i j_i+\bar{\chi} j_\chi+\bar{\xi}_a u_a+\bar{u}_a\xi_a\}} = 0 \tag{9.91}$$

取$j_\chi \to j_\chi+\gamma$，$\chi\to\bar{\chi}+v$后，有（9.17）式。我们记得，若Γ中$\bar{\chi}$的一次项的系数

$$v(\mu^2+\lambda v^2+G')=0,$$

则$\gamma=0$。在作$\chi\to\bar{\chi}+v$变换后，Δ_χ换成$\Delta_{\bar{\chi}}$（参考（2.131）式）。对（9.91）作$\frac{\delta}{\delta\xi_d\ (W)}$微商，令$\xi_a=\bar{\xi}_a=0$，则有

$$\iint\Big\{-ij^a_\mu(x)\left(-\partial_\mu\delta^4(x-y)\delta^{ab}+g\varepsilon^{abc}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)A^c_\mu(z)\right)u_b(y)\bar{u}_d(w)$$

$$-ij_i(x)\left(-\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)g\frac{\chi(y)}{2}u_i(z)\bar{u}_d(w)\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{ijk}\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)g\frac{\varphi_k(y)}{2}u_j(z)\bar{u}_d(w)\right)$$

$$-ij_\chi(x)\left(\delta^4(x-y)\delta^4(x-z)g\frac{\varphi_i(y)}{2}u_i(z)\bar{u}_d(w)\right)$$

$$+\left(\xi\partial_\mu\delta^4(w-y)A^d_\mu(y)-\delta^4(w-y)M'\varphi_d(y)\right)\Big\}\cdot\mathrm{d}(A)\cdots\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u})$$

$$\cdot e^{i\{S[A,\cdots,u,\bar{u},K,L]+A^a_\mu j^a_\mu+\varphi_i j_i+\bar{\chi} j_\chi\}} = 0 \tag{9.92}$$

对（9.92）作$\frac{\delta}{\delta j_l\ (u)}$微商，令$j_i=j^a_\mu=j_\chi=0$，$K=L=0$：

$$\int\Big\{-i\left(-\delta^4(u-y)\delta^4(u-z)g\frac{\chi(y)}{2}u_l(z)\bar{u}_d(w)\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{ljk}\delta^4(u-y)\delta^4(u-z)g\frac{\varphi_k(y)}{2}u_j(z)\bar{u}_d(w)\right)$$

$$+i\left(\xi\partial_\mu\delta^4(w-y)A^d_\mu(y)\varphi_l(u)-\delta^4(w-y)M'\varphi_d(y)\varphi_l(u)\right)\Big\}$$

$$\cdot\mathrm{d}(A)\cdots\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u})e^{iS[A,\cdots,u,\bar{u}]} = 0 \tag{9.93}$$

用W〔0〕来除，则得到连接图的关系式：

$$g<0\left|T\frac{\chi(u)}{2}u_l(u)\bar{u}_d(w)\right|0>-\varepsilon^{ljk}g<0\left|T\frac{\varphi_k(u)}{2}u_j(u)\bar{u}_d(w)\right|0>$$

$$+\xi\partial_{w_\mu}<0|TA^d_\mu(w)\varphi_l(u)|0>-M'<0|T\varphi_d(w)\varphi_l(u)|0>=0 \tag{9.94}$$

第一项$\chi=\bar{\chi}+v$，又分成两项，前一项是

$$g<0\left|T\frac{\bar{\chi}(u)}{2}u_l(u)\bar{u}_d(w)\right|0>$$

最低次图见图9.10（参考（9.63）的耦合项）

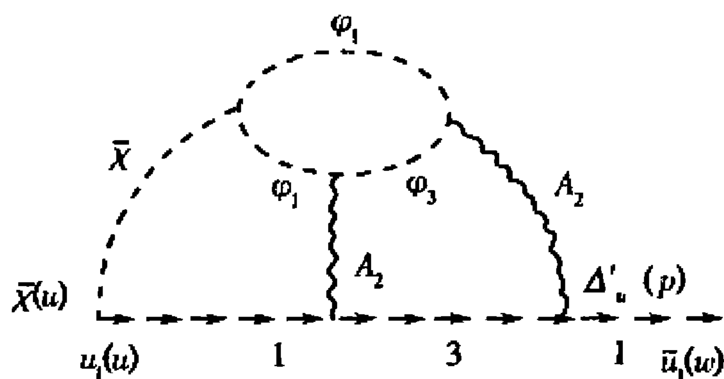


图 9.10

后一项是

$$\frac{gv}{2} < 0 \mid Tu_l(u)\bar{u}_d(w) \mid 0 > \text{是}\frac{gv}{2}\text{乘 } u\bar{u} \text{ 传播子。}$$

第二项是：

$$-\varepsilon^{lik} g <0\left| T\frac{\varphi_k\ (u)}{2}u_j\ (u)\ \bar{u}_d\ (w)\right|0>$$

最低次图见图 9.11

第三项是 $A-\varphi$ 传播子。前已说过，在取 $M=\frac{gv}{2}$时，它的最低次项为零。

剩下的次低次项如图 9.12。

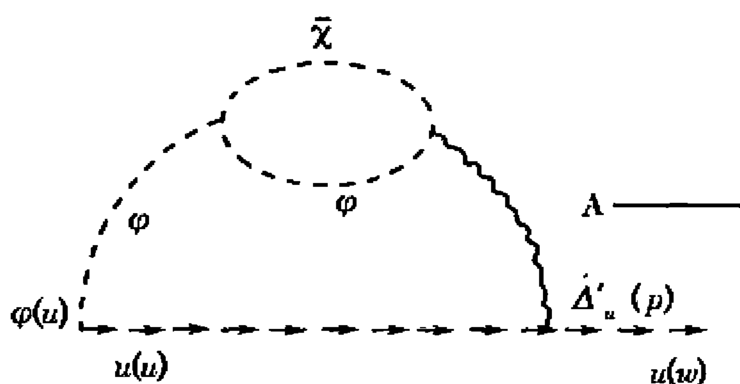


图 9.11

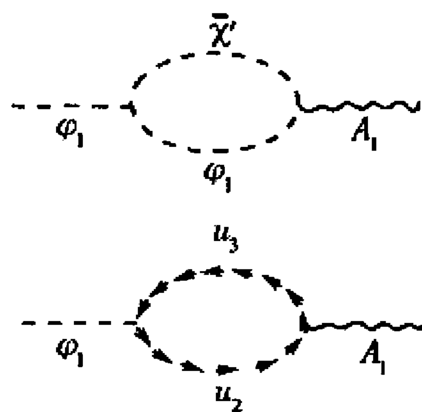


图 9.12

第四项是

$$-M' < 0 \mid T\varphi_d(w)\varphi_l(u) \mid 0 > \sim -\frac{M'}{d(p^2)}\cdot\delta^{dl}$$

考察图 9.10 和图 9.11。如要求一顶点 $\delta_i=0$（见（5.8）式），则 $\varphi\varphi\bar{\chi}$ 顶点要添一哑外线 v，图 9.10 的 $\bar{\chi}$（u）u（u）顶点和图 9.11 的 φ（u）u（u）顶点也要各添两条玻色哑外线。于是自（5.9）知道两图都是 $E_B=4$ （$\bar{u}$，v 和两条哑外线）。D（Γ） = 0，其次，两图都贡献Lorentz 标量，（6.13）必定适用，因 D（Γ） =0，所以骨架积分时 $\alpha=2$，从而内线积分后不会出现 p^2 的极点，此结论在更高次图也适用（更高次图还可能有更多 v 外线，导致不发散）。从而第一、二项里，p^2 除在Δ_u'（p^2）中有极点外，无其他的极点。

又由于（9.75），（9.76），我们知道 $A-\varphi$ 传播子和Δ_φ' 应有相同的 p^2 极点（分母上有相同的 d（p^2））。但（9.94）四项相加为零，即第三、四项之和与第一、二项之和抵消（第三、四项自己不会抵消），所以Δ_u'（p^2）中 p^2 的极点必定和$\frac{1}{d\ (p^2)}$的极点

相同。

$$\Delta_u'(p) \sim \frac{1}{d(p^2)} \tag{9.95}$$

在 $p^2 \to 0$ 时，Δ_u' (p) 与Δ_φ' (p) 有类似行为（见（9.87）），只是重正化常数不同。

$$\lim_{p^2 \to 0} \Delta_u'(p) = \frac{\tilde{Z}_3}{p^2 + \frac{M'^2}{\xi}}(-i) \tag{9.96}$$

5. 结论是：Δ_u' (p)，Δ_φ' (p)，$\Delta_A'^{纵}$ (p) 有相同极点。而且在 $p^2 \to 0$ 时，可同时消去 $A-\varphi$ 混合传播子（c ($p^2=0$) $=0$，见（9.78）），并得到 a ($p^2=0$) $=M'^2$，d ($p^2=0$) $=M'^2/\xi$（见（9.79～9.87）。就是说，$p^2 \to 0$ 时，φ 的自能贡献（及 $\bar{\chi}$ 的蝌蚪图贡献，见§9－3）抵消，传播子分母上的质量平方项就是不考虑 φ 自能图贡献的质量平方项 M'^2/ξ。下面将看到，这是随 ξ 而变的非物理极点。

6. 由于前已证明，$v \neq 0$ 时，重正化常数和 $v=0$ 时一样，所以第八章的下述结论仍成立：

$$\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_1}{Z_3}\left(= \frac{Z_g}{Z_2} \text{有费米场时}\right)$$

§9－6　R_ξ 规范中各传播子的发散的消去

这里具体看一下传播子中发散的消去。

(a)　A_μ^i:

S^0 中的质量项是 $-\frac{g^{0\,2} v^{0\,2}}{8} A_\mu^{i0} A_\mu^{i0}$。$S+\Delta S$ 中的质量项是 $-\frac{Z_1^2}{Z_3^2} - Z_\varphi \frac{g^2 v^2}{8} A_\mu^i A_\mu^i$。

A_μ^i 的传播子的横波部分（用 $S+\Delta S$ 作微扰）省略$\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)$因子后写成

$$\Delta_A'^{横}(p) = \frac{-i}{Z_3 p^2 + \frac{Z_1^2}{Z_3^2} Z_\varphi \frac{g^2 v^2}{4} - \Pi_A^{重正}(p^2)}$$

与（9.85）比较，可知 $\Pi_A^{重正}$ (p^2) 应是两个部分相加：

$$\Pi_A^{重正}(p^2) = \Pi_{A(1)}^{重正} + \Pi_{A(2)}^{重正}(p^2) \begin{cases} \Pi_{A(1)}^{重正} = \frac{Z_1^2}{Z_3^2} Z_\varphi \frac{g^2 v^2}{4} - M'^2(\text{常数}) \\ \Pi_{A(2)}^{重正}(p^2) = (Z_3 - 1)p^2 + \Pi_{AC}(p^2) \end{cases}$$

$$\therefore \Delta_A'^{横}(p) = \frac{-i}{p^2 + M'^2 - \Pi_{AC}(p^2)} \qquad (\text{与}(9.85)\text{一致}) \tag{9.97}$$

同时，另一方面又有：

$$\Delta_A'^{横}(p) = \frac{-i}{z_3 p^2 + z_3 \frac{g_0^{\,2} v^{02}}{4} - z_3 \Pi'_A(p^2)}$$

$$Z_3\Pi'_A(p^2) = \Pi_A{}^{重正}(p^2) = \Pi_{A(1)}^{重正} + \Pi_{A(2)}^{重正}(p^2)$$
$$= Z_3\frac{g^{02}v^{02}}{4} - Z_3Z_4M'^{02} + \Pi_{A(2)}^{重正}(p^2)$$

这就又得到

$$\Delta_A'^{横}(p) = \frac{1}{Z_3}\frac{-i}{p^2 + Z_\varphi M'^{02} - Z_3^{-1}\Pi_{A(2)}^{重正}(p^2)}$$
$$= \frac{1}{Z_3}\frac{-i}{a(p^2)} = \frac{1}{Z_3}\Delta'_A{}^{横}(p) \tag{9.98}$$

$\Delta'_A{}^{横}$ (p) 是用 S^0 作微扰：

$$\Delta'_A{}^{横}(p) = \frac{-i}{p^2 + Z_\varphi M'^{02} - \Pi'(p^2)} \qquad 与(9.84)一致$$

与（9.84），比较：$Z_3^{-1}\Pi_{A(2)}^{重正}$ (p^2) $=\Pi'$ (p^2) $=Z_3^{-1}\Pi^{重正}$ (p^2)

(b) φ_i:

S^0 中的质量项是 $-\frac{M'^{02}}{2\xi^0}\varphi_i^0\varphi_i^0 - \frac{(\mu^0+\lambda^0 v^{02})}{2}\varphi_i^0\varphi_i^0$。

$S+\Delta S$ 中的质量项是 $-\frac{M'^2}{2\xi}\varphi_i\varphi_i - \frac{\mu^{02}}{2}Z_\varphi\varphi_i\varphi_i - Z_4\frac{\lambda v_2}{2}\varphi_i\varphi_i$。$\varphi_i$ 的传播子（用 $S+\Delta S$ 作微扰）：

$$\Delta'_\varphi(p) = \frac{-i}{Z_\varphi p^2 + \frac{M'^2}{\xi} + Z_\varphi\mu^{02} + Z_4\lambda v^2 - \Pi_\varphi{}^{重正}(p^2)}$$

与（9.87）比较，$\Pi_\varphi{}^{重正}$ (p^2) 中也分两部分：

$$\Pi_\varphi{}^{重正}(p^2) = \Pi_{\varphi(1)}^{重正} + \Pi_{\varphi(2)}^{重正}(p^2)$$

其中

$$\Pi_{\varphi(1)}^{重正} = Z_\varphi\mu^{02} + Z_4\lambda v^2 = Z_\varphi\ (\mu^{02} + \lambda^0 v^{02})$$
$$\Pi_{\varphi(2)}^{重正}\ (p^2)\ =\ (Z_\varphi - 1)\ p^2 + \Pi_{\varphi c}\ (p^2)$$

这样就得到：

$$\Delta'_\varphi(p) = \frac{-i}{p^2 + \frac{M'^2}{\xi} - \Pi_{\varphi c}(p^2)} \qquad 发散消去，与(9.87)一致。\tag{9.99}$$

另一方面有（利用（9.81））：

$$\Delta'_\varphi(p) = \frac{-i}{Z_\varphi p^2 + Z_\varphi\frac{M'^{02}}{\xi^0} + Z_\varphi(\mu^{02} + \lambda^0 v^{02}) - Z_\varphi\Pi'_\varphi(p^2)}$$

其中

$$Z_\varphi\Pi'_\varphi\ (p^2)\ = \Pi_\varphi{}^{重正}\ (p^2)\ = \Pi_{\varphi(1)}^{重正} + \Pi_{\varphi(2)}^{重正}\ (p^2)$$
$$= Z_\varphi\ (\mu^{02} + \lambda^0 v^{02})\ \ + \Pi_{\varphi(2)}^{重正}\ (p^2)$$

这就又得到（注意 $(\mu^{02}+\lambda^0 v^{02})$ 被抵消）：

$$\Delta'_\varphi(p) = \frac{1}{Z_\varphi}\cdot\frac{-i}{p^2 + \frac{M'^{02}}{\xi^0} - Z_\varphi^{-1}\Pi_{\varphi(2)}^{重正}(p^2)}$$

$$= \frac{1}{Z_\varphi} \cdot \frac{-i}{d(p^2)} = \frac{1}{Z_\varphi} \Delta'_\varphi(p) \tag{9.100}$$

Δ'_φ (p) 是用 S^0 作微扰：

$$\Delta'_\varphi(p) = \frac{-i}{p^2 + \frac{M'^{02}}{\xi^0} - \Pi'_d(p^2)} \qquad \text{与(9.86)一致。}$$

前后比较有：$Z_\varphi^{-1}\Pi_{\varphi(2)}^{\text{重正}}$ (p^2) $= \Pi'_d$ (p^2) $= Z_\varphi^{-1}\Pi_d^{\text{重正}}$ (p^2)

(c) u, $\bar{u}$:

S^0 中的质量项是 $-\frac{M'^0 g^0 v^0}{2\xi^0}\bar{u}_i^0 u_i^0$

$S + \Delta s$ 中的质量项是 $-\frac{Z_1}{Z_3}\tilde{Z}_3 \frac{M'gv}{2\xi}\bar{u}_i u_i$

$u\,\bar{u}$ 的传播子（用 $S + \Delta S$ 作微扰）：

$$\Delta'_u(p) = \frac{-i}{\tilde{Z}_3 p^2 + \frac{Z_1}{Z_3}\tilde{Z}_3\frac{M'gv}{\xi} - \Pi_u^{\text{重正}}(p^2)}$$

与（9.96）比较，$\Pi_u^{\text{重正}}$ (p^2) 分两部分：

$$\Pi_u^{\text{重正}}(p^2) = \Pi_{u(1)}^{\text{重正}} + \Pi_{u(2)}^{\text{重正}}(p^2)$$

其中
$$\Pi_{u(1)}^{\text{重正}} = \frac{Z_1}{Z_3}\tilde{Z}_3\frac{M'gv}{\xi} - \frac{M'^2}{\xi} = \tilde{Z}_3\frac{M'^0 g^0 v^0}{\xi^0} - Z_\varphi\frac{M'^{02}}{\xi^0}$$

$$\Pi_{u(2)}^{\text{重正}}\ (p) = (\tilde{Z}_3 - 1)\ p^2 + \Pi_{uc}\ (p^2)$$

这样就得到：

$$\Delta'_u(p) = \frac{-i}{p^2 + \frac{M'^2}{\xi} - \Pi_{\varphi c}(p^2)} \quad \Pi_{uc}(p^2) = \Pi_{\varphi c}(p^2), \text{与(9.96)一致。} \tag{9.101}$$

另一方面有：

$$\Delta'_u(p) = \frac{-i}{\tilde{Z}_3 p^2 + \tilde{Z}_3\frac{M'^0 g^0 v^0}{\xi^0} - \tilde{Z}_3\Pi'_u(p^2)}$$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_3\Pi'_u(p^2) &= \Pi_u^{\text{重正}}(p^2) = \Pi_{u(1)}^{\text{重正}} + \Pi_{u(2)}^{\text{重正}}(p^2) \\ &= \tilde{Z}_3\frac{M'^0 g^0 v^0}{\xi^0} - Z_\varphi\frac{M'^{02}}{\xi^0} + \Pi_{u(2)}^{\text{重正}}(p^2)\end{aligned}$$

这就又得到：

$$\begin{aligned}\Delta'_u(p) &= \frac{-i}{\tilde{Z}_3 p^2 + Z_\varphi\frac{M'^{02}}{\xi^0} - \Pi_{u(2)}^{\text{重正}}(p^2)} \\ &= \frac{-i}{\tilde{Z}_3 p^2 + Z_\varphi\frac{M'^{02}}{\xi^0} - (\tilde{Z}_3 - 1)p^2 - \Pi_{\varphi c}(p^2)}\end{aligned}$$

$$= \frac{-i}{p^2 + Z_\varphi \frac{M'^{02}}{\xi^0} - \Pi^{重正}_{\varphi(2)}(p^2) + (z_\varphi - 1)p^2}$$

$$= \frac{-i}{Z_\varphi p^2 + Z_\varphi \frac{M'^{02}}{\xi^0} - \Pi^{重正}_{\varphi(2)}(p^2)} = \frac{1}{Z_\varphi} \frac{-i}{p^2 + \frac{M'^{02}}{\xi^0} - \Pi'_d(p^2)}$$

$$= \frac{1}{\tilde{Z}_3} \cdot \frac{\tilde{Z}_3}{Z_\varphi} \frac{-i}{d^0(p^2)} = \frac{1}{\tilde{Z}_3} \Delta'_u(p) \tag{9.102}$$

Δ'_u (p) 是用 S^0 作微扰：

$$\Delta'_u(p) = \frac{\tilde{Z}_3}{Z_\varphi} \frac{-i}{p^2 + \frac{M'^{02}}{\xi^0} - \Pi'_d(p^2)} \quad 与(9.96)一致。$$

上一节已看到：$\Pi'_d(p^2) = Z_\varphi^{-1}\Pi^{重正}_{\varphi(2)}(p^2) = Z_\varphi^{-1}\Pi^{重正}_d(p^2)$

(d) $\bar{\chi}$:

在有自发破缺的时候，$\bar{\chi}$ 的传播子有一点特殊性。这里把 $\bar{\chi}$ 二次项都写出来（用 p 表象）。

S^0 中的 $\bar{\chi}$ 二次项：$-\frac{1}{2}\bar{\chi}^0 p^2 \bar{\chi}^0 - \frac{\mu^{02} + 3\lambda^0 v^{02}}{2}\bar{\chi}^0\bar{\chi}^0$

$S + \Delta S$ 中的 $\bar{\chi}$ 二次项：$-\frac{1}{2} - Z_\varphi \bar{\chi} p^2 \bar{\chi} - \frac{\mu^0 + 3\lambda^{02} v^{02}}{2} Z_\varphi \bar{\chi}\bar{\chi}$

$$= -\frac{1}{2} Z_\varphi \bar{\chi} p^2 \bar{\chi} - \frac{Z_\varphi^2 \mu^0 + 3Z_4\lambda v^2}{2}\bar{\chi}\bar{\chi}$$

用 $S + \Delta S$ 作微扰：

$$\Delta'_{\bar{\chi}}(p) = \frac{-i}{Z_\varphi p^2 + Z_\varphi \mu^{02} + 3Z_4\lambda v^2 - \Pi^{重正}_{\bar{\chi}}(p^2)}$$

（由于自发破缺，$\Pi^{重正}_{\bar{\chi}}(p^2) \neq \Pi^{重正}_{\varphi}(p^2)$，例如，前面例 3（9.45）中可看到，$\bar{\chi}\bar{\chi}$ 的系数不同于（$\varphi_i\varphi_i + 2v\bar{\chi}$）的系数）。$\Pi^{重正}_{\bar{\chi}}(p^2)$ 也分两部分：

$$\Pi^{重正}_{\bar{\chi}}(p^2) = \Pi^{重正}_{\bar{\chi}(1)} + \Pi^{重正}_{\bar{\chi}(2)}(p^2)$$

由于 $\Delta'_{\bar{\chi}}(p)$ 是去掉发散的，所以

$$\Pi^{重正}_{\bar{\chi}(1)} = Z_\varphi \mu_0^2 + Z_4 \lambda v^2 + (Z_4 - 1)2\lambda v^2$$

$$= Z_\varphi \mu_0^2 + Z_\varphi \lambda^0 v^{02} + \left(Z_\varphi - \frac{Z_\varphi}{Z_4}\right)2\lambda^0 v^{02}$$

$$\Pi^{重正}_{\bar{\chi}(2)}(p^2) = (Z_\varphi - 1)p^2 + \Pi_{\bar{\chi}c}(p^2)$$

（参考（9.48）～（9.50）关于有限重正化的讨论。假定已经有限重正化，$\Pi_{\bar{\chi}c}(p^2) \sim O(p^4)$）。在 $\Pi^{重正}_{\bar{\chi}(1)}$ 中，$Z_\varphi\mu^{02} + Z_4\lambda v^2 = Z_\varphi(\mu^{02} + \lambda^0 v^{02})$ 抵消了 Γ 中的 $\frac{1}{2}(\mu^{02} + \lambda^0 v^{02})\bar{\chi}^0\bar{\chi}^0$ 项，$(Z_4 - 1)2\lambda v^2$ 则引致 $\bar{\chi}$ 的质量重正化（见（9.49））。这样就得到

$$\Delta'_{\bar{\chi}}(p) = \frac{-i}{p^2 + 2\lambda v^2 - \Pi_{\bar{\chi}c}(p^2)} \tag{9.103}$$

发散消去，与（9.50）一致。

同时，另一方面有：

$$\Delta'_{\bar\chi}(p) = \frac{-i}{Z_\varphi p^2 + Z_\varphi \mu^{02} + 3Z_\varphi \lambda^0 v^{02} - Z_\varphi \mu^{02} - 3Z_\varphi \lambda^0 v^{02} + \frac{Z_\varphi}{Z_4} 2\lambda^0 v^{02} - \Pi^{重正}_{\bar\chi(2)}(p^2)}$$

$$= \frac{1}{Z_\varphi} \frac{-i}{p^2 + \frac{1}{Z_4} 2\lambda^0 v^{02} - Z_\varphi^{-1} \Pi^{重正}_{\bar\chi(2)}(p^2)} \tag{9.104}$$

再用 S^0 作微扰：

$$\Delta'_{\bar\chi}(p) = \frac{-i}{p^2 + (\mu^{02} + 3\lambda^0 v^{02}) - \Pi'_{\bar\chi}(p^2)}$$

$$= \frac{-i}{p^2 + (\mu^{02} + 3\lambda^0 v^{02}) - Z_\varphi^{-1} \Pi^{重正}_{\bar\chi}(p^2)}$$

$$(\Pi'_{\bar\chi}(p^2) = Z_\varphi^{-1} \Pi^{重正}_{\bar\chi}(p^2)，见下面)$$

$$= \frac{-i}{p^2 + (\mu^{02} + 3\lambda^0 v^{02}) - \mu^0 - \lambda^0 v^{02} - \left(1 - \frac{1}{Z_4}\right) 2\lambda^0 v^{02} - Z_\varphi^{-1} \Pi^{重正}_{\bar\chi(2)}(p^2)}$$

$$= \frac{-i}{p^2 + \frac{1}{Z_4} 2\lambda^0 v^{02} - Z_\varphi^{-1} \Pi^{重正}_{\bar\chi(2)}(p^2)} \tag{9.105}$$

与（9.104）比较：

$$\Delta'_{\bar\chi}(p) = \frac{1}{Z_\varphi} \Delta'_{\bar\chi}(p) \tag{9.106}$$

仿照第五章，根据 S^0 有（F 代表自由）

$$\Delta_{\bar\chi F}(p) = \frac{-i}{p^2 + \mu^{02} + 3\lambda^0 v^{02}} \tag{9.107}$$

根据 $S + \Delta S$ 有：

$$\Delta^{重正}_{\bar\chi F}(p) = \frac{-i}{Z_\varphi p^2 + Z_\varphi \mu^{02} + Z_\varphi 3\lambda^0 v^{02}} \tag{9.108}$$

$$\Delta^{重正}_{\chi F}(p) = \frac{1}{Z_\varphi} \Delta_{\bar\chi F}(p) \tag{9.109}$$

由此，通过和第五章一样的讨论，就可证明：

$$\Pi'_{\bar\chi}(p^2) = \frac{1}{Z_4} \Pi^{重正}_{\bar\chi}(p^2) \tag{9.110}$$

$\bar\chi$ 的特殊在于 $\Delta'_{\bar\chi}(p)$ 的质量项中含有$\frac{1}{Z_4}$（见（9.105））。但这不成问题，因为$\Delta'_{\bar\chi}(p)$ 已经消去了发散（见（9.103）），达到了重正化的目的，而 $\Delta'_{\bar\chi}(p^2)$ 本来就是含有发散的，其中含有$\frac{1}{Z_4}$并不造成困难。我们也可以定义：

$$Z_\varphi \Pi^{*}_{\bar\chi}(p^2) = (Z_\varphi - 1) p^2 + \left(Z_\varphi - \frac{Z_\varphi}{Z_4}\right) 2\lambda^0 v^{02} + \Pi_{\bar\chi c}(p^2)$$

从而 $\Pi^{重正}_{\bar\chi}(p^2) = Z_\varphi \mu^{02} + Z_\varphi \lambda^0 v^{02} + Z_\varphi \Pi^{*}_{\bar\chi}(p^2)$

则 $$\Delta'_{\bar{\chi}}(p) = \frac{-i}{p^2 + 2\lambda^0 v^{02} - \Pi^*_{\bar{\chi}}(p^2)}$$

这个形式和（9.103）比较接近，$\frac{1}{Z_4}$不明显出现，

但 $$\Pi^*_{\bar{\chi}}(p^2=0) = \left(1 - \frac{1}{Z_4}\right) 2\lambda^0 v^{02} \neq 0$$

§9－7　从 R 规范（$\xi=\infty$）到 U 规范（$\xi=0$），非物理极点项抵消一例，么正性

先回顾一下（9.64）～（9.67）：

R_ξ 规范：

$$\Delta^{Aab}_{\mu\nu}(k) = \left[\frac{-i}{k^2+M^2}\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right) + \frac{i}{k^2 + \frac{M^2}{\xi}} \cdot \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right]\delta^{ab}$$

$$\Delta_{\varphi i}(k) = \frac{-i}{k^2 + \frac{M^2}{\xi}} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\Delta_{\bar{\chi}}(k) = \frac{-i}{k^2 + 2\lambda v^2} \qquad \text{树图近似:} M = \frac{gv}{2}$$

$$\Delta_u(k) = \frac{-i}{k^2 + \frac{M^2}{\xi}} \qquad C^i = \xi^{1/2}\left(\partial_\mu A^i_\mu - \frac{M}{\xi}\varphi_i\right) \tag{9.111}$$

$\xi=\infty$　R（可重正）规范（$\xi=\infty$，$M^2=0$，即 Landau 规范）

$$\Delta^{Aab}_{\mu\nu}(k) = \left[\frac{-i}{k^2+M^2}\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right) + i\frac{k_\mu k_\nu}{k^2 M^2}\right]\delta^{ab}$$

$$= \frac{-i}{k^2+M^2}\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\delta^{ab}$$

$$\Delta_{\varphi i}(k) = \frac{-i}{k^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\Delta_{\bar{\chi}}(k) = \frac{-i}{k^2 + 2\lambda v^2}$$

$$\Delta_u(k) = \frac{-i}{k^2} \qquad C^i = \lim_{\xi\to\infty}\xi^{1/2}\partial_\mu A^i_\mu \tag{9.112}$$

$\xi=1$　't Hooft 规范（$\xi=1$，$M^2=0$ 时就是 Feynman 规范）

$$\Delta^{Aab}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2+M^2}\delta_{\mu\nu}\delta^{ab}$$

$$\Delta_{\varphi i}(k) = \frac{-i}{k^2+M^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\Delta_{\bar{\chi}}(k) = \frac{-i}{k^2 + 2\lambda v^2}$$

$$\Delta_u(k) = \frac{-i}{k^2+M^2} \qquad C^i = (\partial_\mu A^i_\mu - M\varphi_i) \qquad (9.113)$$

$\xi=0$ U（么正）规范

$$\Delta^{Aab}_{\mu\nu}(k) = \frac{-j}{k^2+M^2}\left(\delta_{\mu\nu}+\frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right)\delta^{ab}$$

$$\Delta_{\varphi i}(k) = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$\Delta_{\bar{\chi}}(k) = \frac{-i}{k^2+2\lambda v^2}$$

$$\Delta_u(k) = 0 \qquad C^i = \lim_{\xi\to 0}\ \xi^{1/2}\left(\partial_\mu A^i_\mu - \frac{M}{\xi}\varphi_i\right) \qquad (9.114)$$

讨论：

1. Δ^A 中的 $k^2=-M^2$ 极点，以及 $\Delta_{\bar{\chi}}$ 中 $k^2=-2\lambda v^2$ 极点都不随 ξ 而变。而 Δ^A 中的纵向部分和 Δ_φ、Δ_u 则有共同的极点 $k^2=\frac{-M^2}{\xi}$，都是随 ξ 而变的。我们把与前一类极点相对应的粒子叫做**物理粒子**，与后一类极点相对应的粒子叫**非物理粒子**。

2. $\xi=\infty$，$\xi=1$ 都是可重正化的。U 规范（$\xi=0$）原是不可重正化的。但如果取 R_ξ 规范，则 $\xi\to 0$ 的极限情况就是 U 规范。在这个意义下，U 规范又是"可重正化"的了。更确切地说，U 规范"形式上"等价于 $\xi\to 0$ 的 R_ξ 规范。"形式上"的意思是：若在积分前取 $\xi=0$，则 R_ξ 规范与 U 规范的振幅就是相等的；若在积分后才令 $\xi=0$，则 R_ξ 规范的结果仍保持不发散，而 U 规范在原先的意义下是先取 $\xi=0$，后积分，积分后发散就消不掉。

3. 在 $\xi\to 0$ 时，$\Delta_\varphi\to 0$，$\Delta_u\to 0$。就是说，φ 粒子（Goldstone 粒子）和 u 粒子（$F-P$ 粒子）都不能传递了，它们不能出现了。由此可见，U 规范排除了非物理粒子。还可从另一方面来看，在么正条件（i，f 都是物理的态）

$$Im < f|\ T|\ i > = \sum_n < f|\ T^+|\ n > < n|\ T|\ i >$$
$$+ \sum_{n'} < f|\ T^+|\ n' > < n'|\ T|\ i > \qquad (9.115)$$

中，$\sum_n$ 是对物理粒子态求和，$\sum_{n'}$ 是对非物理粒子态求和。当 $\xi\to 0$，非物理粒子质量 $\frac{M^2}{\xi}\to\infty$，因此任何有限能量过程中，非物理中间态 n' 不会有贡献。于是得到：

$$Im < f|\ T|\ i > = \sum_n < f|\ T^+|\ n > < n|\ T|\ i >$$
$$\sum_{n'} < f|\ T^+|\ n' > < n'|\ T|\ i > = 0^{①} \qquad (9.116)$$

那么，ξ 不为 0 时怎样呢？后面我们将证明，任何物理的 S 矩阵元都是与 ξ 无关的，也就是说与规范无关的，所以在 $\xi\neq 0$ 时，自（9.116）仍有

$$Im < f|\ T|\ i > = \sum_n < f|\ T^+|\ n > < n|\ T|\ i > \qquad (9.117)$$

此式与规范无关。从而可见，么正性是规范无关的，**非物理粒子态不影响么正性**。

---

① 由于 $\xi=0$ 规范的情况下，非物理粒子明显地不违反么正条件，所以 $\xi=0$ 规范又被称为么正规范。

下面就来证明物理的（始末态都是物理粒子态的）S 矩阵元与规范无关。先举一个如下的

$$\bar{\chi}+A\rightarrow\bar{\chi}+A$$

弹性散射的例子。取树图近似，其最低次的含$\frac{M^2}{\xi}$极点的图是：

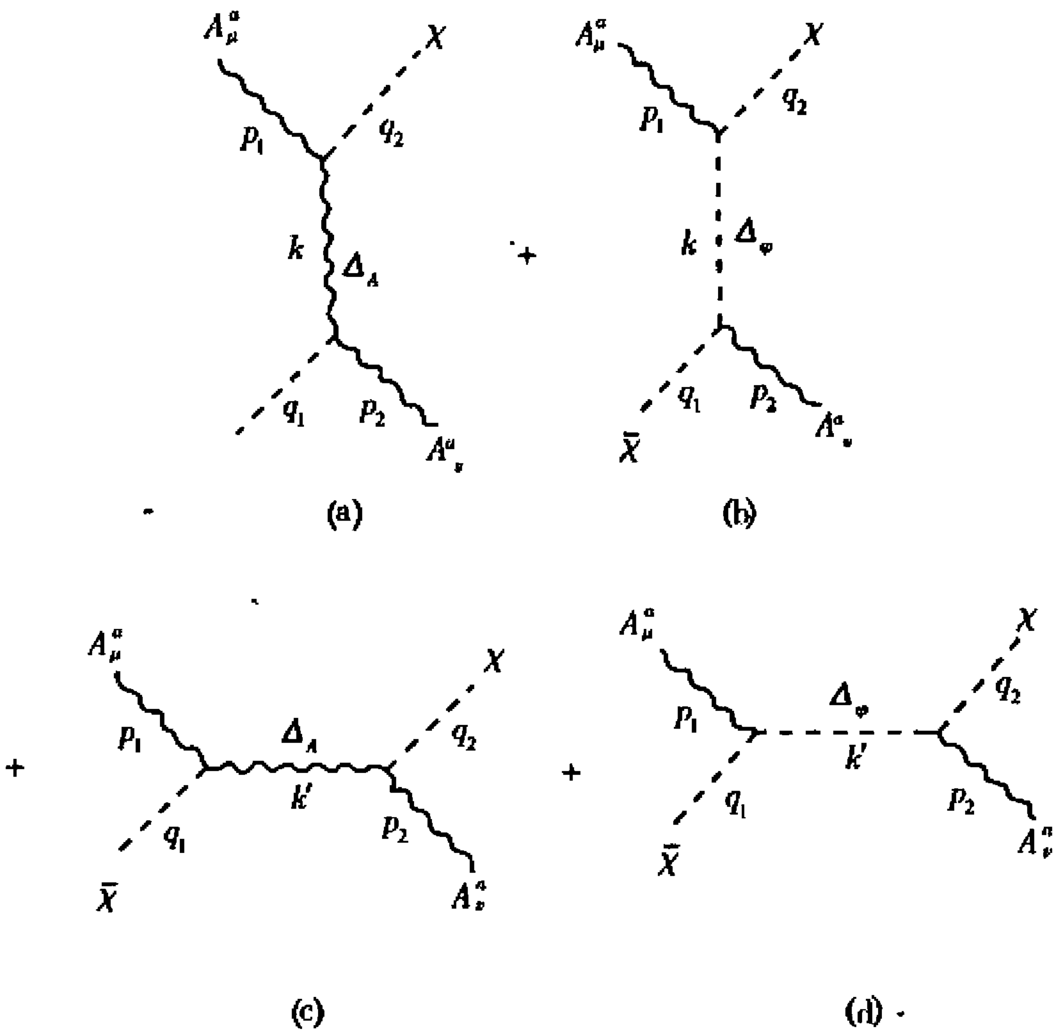


图 9.13

还有

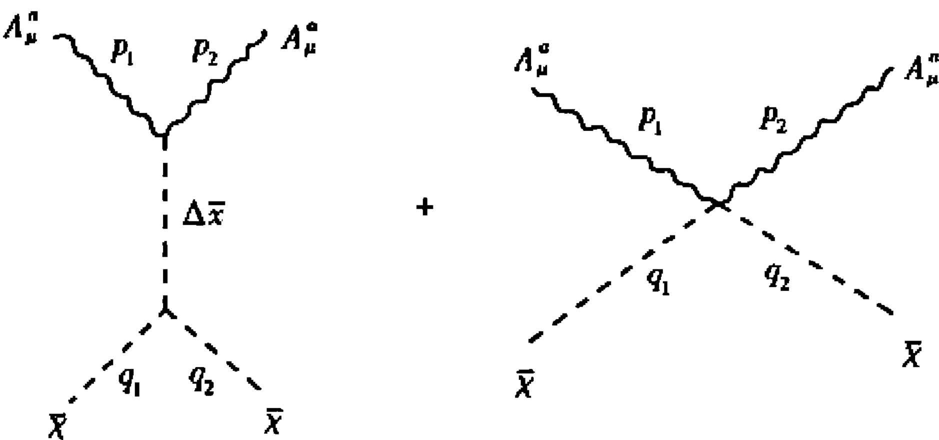


图 9.14

把它们的贡献写出来（取 S^0，略去“0”记号）：

图9.13的（a）和（c）来自（9.63）的 L_{eff}中的

$$-\frac{g^2}{8}A^i_\mu A^i_\mu\cdot 2\bar{\chi}v=-\frac{g^2v}{4}A^i_\mu A^i_\mu\bar{\chi}$$

$\left(\text{以下都不写出 } S \text{ 矩阵元中 } \bar{\chi} \text{ 的传播子，因 } \Delta_{\bar{\chi}} \text{ 不含有非物理的} \frac{M^2}{\xi}\text{极点}\right)$。于是

$$(\text{a}) \text{ 的贡献是 } \sim \Delta_{\mu\alpha}(p_1)\cdot 2\frac{g^2v}{4}\Delta_{\alpha\beta}(k)\cdot 2\frac{g^2v}{4}\Delta_{\beta\gamma}(p_2)$$

$$= \Delta_{\mu\alpha}(p_1)g^2\left(\frac{gv}{2}\right)^2\left[\frac{-i}{k^2+M^2}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{k_\alpha k_\beta}{M^2}\right)+\frac{i}{k^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{k_\alpha k_\beta}{M^2}\right]\Delta_{\beta\nu}(p_2)$$

$$(\text{c}) \text{ 的贡献是 } \sim \Delta_{\mu\alpha}(p_1)\cdot 2\frac{g^2v}{4}\Delta_{\alpha\beta}(k')\cdot 2\frac{g^2v}{4}\Delta_{\beta\gamma}(p_2)$$

$$= \Delta_{\mu\alpha}(p_1)g^2\left(\frac{gv}{2}\right)^2\left[\frac{-i}{k'^2+M^2}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{k'_\alpha k'_\beta}{M^2}\right)+\frac{i}{k'^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{k'_\alpha k'_\beta}{M^2}\right]\Delta_{\beta\nu}(p_2)$$

图9.13 的（b）和（d）来自（9.63）的 L_{eff}中的

$$-\frac{i}{4}gA^i_\alpha\cdot 2i\,\bar{\chi}\partial_\alpha\varphi_i-\frac{i}{4}gA^i_\alpha\cdot(-2i(\partial_\alpha\bar{\chi}))\cdot i\varphi_i$$

$$\xrightarrow{\text{经部分积分}} = g\,\bar{\chi}A^i_\alpha\partial_\alpha\varphi_i+\frac{g}{2}\bar{\chi}(\partial_\alpha A^i_\alpha)\varphi_i$$

$$(\text{b}) \text{ 的贡献是 } \sim \Delta_{\mu\alpha}(p_1)\cdot g\frac{-i}{k^2+\frac{M^2}{\xi}}k_\alpha k_\beta\cdot g\,\Delta_{\beta\nu}(p_2)+\cdots$$

$$(\text{d}) \text{ 的贡献是 } \sim \Delta_{\mu\alpha}(p_1)\cdot g\frac{-i}{k'^2+\frac{M^2}{\xi}}k'_\alpha k'_\beta\cdot g\,\Delta_{\beta\nu}(p_2)+\cdots$$

由于树图近似下 $M^2=\left(\frac{gv}{2}\right)^2$，所以（a）贡献的$\frac{M^2}{\xi}$极点项与（b）贡献的正好抵消，（c）贡献的$\frac{M^2}{\xi}$极点项与（d）贡献的正好抵消。

还有（b），（d）贡献中的另一部分（上面式中用 $+\cdots$来表示），它们是（9.63）的 L_{eff}中的$\frac{g}{2}\bar{\chi}$（$\partial_\alpha A^i_\alpha$）$\varphi_i$ 作出贡献的项。这些项可参照（b），（d）贡献的第一项来写出，只须把 $k_\alpha k_\beta$ 和 $k'_\alpha k'_\beta$ 去掉，同时把$\Delta_{\mu\alpha}$（p_1）和$\Delta_{\beta\nu}$（p_2）分别换成：

$$\Delta_{\mu\alpha}(p_1)p_{1\alpha}=\left[\frac{-i}{p_1^2+M^2}\frac{p_{1\mu}(p_1^2+M^2)}{M^2}+\frac{i}{p_1^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{p_1^2p_{1\mu}}{M^2}\right]$$

$$=\frac{-ip_{1\mu}}{M^2}+\frac{i}{p_1^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{p_1^2p_{1\mu}}{M^2}$$

$$\Delta_{\beta\nu}(p_2)p_{2\beta}=\left[\frac{-i}{p_2^2+M^2}\frac{p_{2\nu}(p_2^2+M^2)}{M^2}+\frac{i}{p_2^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{p_2^2p_{2\nu}}{M^2}\right]$$

$$=\frac{-ip_{2\nu}}{M^2}+\frac{i}{p_2^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{p_2^2p_{2\nu}}{M^2}$$

在求物理的 S 矩阵元时，对于 A 外线要乘上 $\lim\limits_{p_1^2=-M^2}\frac{i}{\sqrt{2E_{p_1}}}(p_1^2+M^2)\ \varepsilon_{p_1\mu}$ 和 $\lim\limits_{p_2^2=-M^2}\frac{i}{\sqrt{2E_{p_2}}}(p_2^2+M^2)\ \varepsilon_{p_2\nu}$，所以 $\frac{q}{2}\bar{\chi}\ (\partial_\alpha A_\alpha^i)\ \varphi_i$ 贡献的非物理极点项在导出 A 外线时自动消失。可见 $\frac{q}{2}\bar{\chi}\ (\partial_\alpha A_\alpha^i)\ \varphi_i$ 对这个物理的 S 矩阵元无贡献。

(a)，(c) 第一项中的 A 外线因子分别是（注意 $\varepsilon_{p_1\mu}p_{1\mu}=0$，$\varepsilon_{p_2\nu}p_{2\nu}=0$）：

$$\lim_{p_1^2=-M^2}\frac{i}{\sqrt{2E_{p_1}}}(p_1^2+M^2)\ \varepsilon_{p_1\mu}\Delta_{\mu\alpha}(p_1)$$

$$=\lim_{p_1^2=-M^2}\frac{i}{\sqrt{2E_{p_1}}}(p_1^2+M^2)\ \varepsilon_{p_1\mu}\left[\frac{-i}{p_1^2+M^2}\left(\delta_{\mu\alpha}+\frac{p_{1\mu}p_{1\alpha}}{M^2}\right)+\frac{i}{p_1^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{p_{1\mu}p_{1\alpha}}{M^2}\right]=\frac{\varepsilon_{p_1\alpha}}{\sqrt{2E_{p_1}}}$$

$$\lim_{p_2^2=-M^2}\frac{i}{\sqrt{2E_{p_2}}}(p_2^2+M^2)\ \varepsilon_{p_2\nu}\Delta_{\beta\nu}(p_2)$$

$$=\lim_{p_2^2=-M^2}\frac{i}{\sqrt{2E_{p_2}}}(p_2^2+M^2)\ \varepsilon_{p_2\nu}\left[\frac{-i}{p_2^2+M^2}\left(\delta_{\beta\nu}+\frac{p_{2\beta}p_{2\nu}}{M^2}\right)+\frac{i}{p_2^2+\frac{M^2}{\xi}}\frac{p_{2\beta}p_{2\nu}}{M^2}\right]=\frac{\varepsilon_{p_2\beta}}{\sqrt{2E_{p_2}}}$$

和 (4.11) 一致。

于是图 9.13 的 (a)，(b)，(c)，(d) 的总贡献是：

$$\sim\frac{\varepsilon_{p_1\alpha}}{\sqrt{2E_{p_1}}}g^2\left(\frac{qv}{2}\right)^2\frac{-i}{k^2+M^2}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{k_\alpha k_\beta}{M^2}\right)\frac{\varepsilon_{p_2\beta}}{\sqrt{2E_{p_2}}}$$
$$+\frac{\varepsilon_{p_2\alpha}}{\sqrt{2E_{p_1}}}g^2\left(\frac{qv}{2}\right)^2\frac{-i}{k'^2+M^2}\left(\delta_{\alpha\beta}+\frac{k'_\alpha k'_\beta}{M^2}\right)\frac{\varepsilon_{p_2\beta}}{\sqrt{2E_{p_2}}}$$

（此地也略去 $\Delta\bar{\chi}$）。非物理的 $\frac{M^2}{\xi}$ 极点确是在求物理的 S 矩阵元时全部消去。另外还有 9.14 的两个图，它们来自 (9.63) 的 L_{eff} 中的 $-\frac{q^2}{8}A_\mu^iA_\mu^i2v\,\bar{\chi}$ 和 $-\lambda\ (\varphi^+\varphi)^2$ 的贡献。在求物理的 S 矩阵元时，A 外线中显然也不出现 ξ。

所以这个例子表明，物理的 S 矩阵元与 ξ（也就是与规范）无关，与非物理的质量有关的极点项在物理的 S 矩阵元中全部消去。顺便说明一下，这个例子只考虑了树图，没有显出 Z_3，Z_3 的出现在于圈图，见下面的讨论。

§9－8　重正化的物理的 S 矩阵元与规范无关

前面在讨论 $\Delta'_u(p)$ 的极点时，曾经利用过 Slavnov 恒等式 (9.91)，这个恒等式在有 Higgs 场和有自发破缺时也是成立的。现在，我们把 (9.91) 写成更一般的形式（根据 (4.48)）：

$$\int d(\varphi)d(u)d(\bar{u})\left[j_i\left(\Delta_i^b+gt_{ik}^b\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_k}\right)\frac{1}{i}\frac{\delta^2}{\delta\xi\delta\bar{\xi}_b}-F_i^a\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_i}\right]$$

$$\cdot e^{i\int d^4x\left\{\mathscr{L}\text{inv}[\varphi] + \bar{u}_a\left(-\frac{bc_a}{\delta\varphi_i}(\Delta_i^b + gt_{ik}^b\varphi_k)\right)u_b - \frac{1}{2}c_a^2 + j_i\varphi_i + \bar{\xi}_a u_a + \bar{u}_a\xi_a\right\}}\Big| u = \bar{u} = 0$$

（根据(4.48) 式）

$$= \int d(\varphi)d(u)d(\bar{u})[ij_i(\Delta_i^b + gt_{ik}^b\varphi_k)u_b\bar{u}_a - F_i^a\varphi_i]$$

$$\cdot e^{i\int d^4x\left\{\mathscr{L}\text{inv}[\varphi] + \bar{u}_a\left(-\frac{\delta c_a}{\delta\varphi_i}(\Delta_i^b + gt_{ik}^b\varphi_k)\right)u_b - \frac{1}{2}c_a^2 + j_i\varphi_i\right\}} = 0 \tag{9.118}$$

由于下面要用算子泛函 $i\,\Delta C_a\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right)$作用到此式上去。先来证明：

$$i\,\Delta C_a\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right)ij_b e^{ij_i\varphi_i} = ie^{ij_i\varphi_i}\left(\frac{\delta\,\Delta C_a(\varphi)}{\delta\varphi_b} + ij_b\,\Delta C_a(\varphi)\right) \tag{9.119}$$

用归纳法：首先有

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_b}\right)ij_b e^{ij_i\varphi_i} = e^{ij_i\varphi_i}(1 + ij_b\varphi_b)。$$

设微商 n 次有

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_b}\right)^n ij_b e^{ij_i\varphi_i} = e^{ij_i\varphi_i}(n\varphi_b^{n-1} + ij\varphi_b^n),$$

则

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_b}\right)^{n+1} ij_b e^{ij_i\varphi_i} = e^{ij_i\varphi_i}((n+1)\varphi_b^n + ij_b\varphi_b^{n+1})$$

$$= e^{ij_i\varphi_i}\left(\frac{\delta\varphi_b^{n+1}}{\delta\varphi_b} + ij_b\varphi_b^{n+1}\right)$$

相仿有：

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_a}\right)^{n+1} ij_b e^{ij_i\varphi_i} = e^{ij_i\varphi_i}\left(\frac{\delta\varphi_a^{n+1}}{\delta\varphi_b} + ij_b\varphi_a^{n+1}\right) = e^{ij_i\varphi_i}\cdot ij_b\varphi_a^{n+1}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right)ij_b e^{ij_i\varphi_i} = e^{ij_i\varphi_i}\left(\frac{\delta f(\varphi)}{\delta\varphi_b} + ij_b f(\varphi)\right) \tag{9.120}$$

所以（9.119）成立，

于是，把 $i\,\Delta C_a\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j}\right)$作用到（9.118）上，并利用（9.119），得到：

$$\int d(\varphi)d(u)d(\bar{u})\left[i\left(\frac{\delta\,\Delta C_a}{\delta\varphi_i} + ij_i\,\Delta C_a\right)(\Delta_i^b + gt_{ik}^b\varphi_k)u_b\bar{u}_a - iC_a\,\Delta C_a\right]$$

$$\cdot e^{i\int d^4x\left\{\mathscr{L}\text{inv}[\varphi] + \bar{u}_a\left(-\frac{\delta c_a}{\delta\varphi_i}(\Delta_i^b + gt_{ik}^b\varphi_k)\right)u_b - \frac{1}{2}c_a^2 + j_i\varphi_i\right\}}$$

$$= \int d(\varphi)d(u)d(\bar{u})\left[-i\bar{u}_a\frac{\delta\,\Delta c_a}{\delta\varphi_i}(\Delta_i^b + gt_{ik}^b\varphi_k)u_b - ic_a\,\Delta c_a - j_i\,\Delta c_a(\Delta_i^b + gt_{ik}^b\varphi_k)u_b\bar{u}_a\right]$$

$$\cdot e^{i\int d^4x\left\{\mathscr{L}\text{inv}[\varphi] + \bar{u}_a\left(-\frac{\delta c_a}{\delta\varphi_i}(\Delta_i^b + gt_{ik}^b\varphi_k)\right)u_b - \frac{1}{2}c_a^2 + j_i\varphi_i\right\}} = 0 \tag{9.121}$$

现在考察一个规范 C 经过一个微小的变化变成 $C+\Delta C$，问 $W_c[j]$ 有什么变化？一般有

$$
\begin{aligned}
& W_{c+\Delta c}[j]-W_c[j] \\
& =\int \mathrm{d}(\varphi)\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u})\left[-i\bar{u}_a\frac{\delta\,\Delta c_a}{\delta\varphi_i}(\Delta_i^b+gt_{ik}^b\varphi_k)u_b-iC_a\,\Delta C_a\right] \\
& \cdot e^i\int \mathrm{d}^4x\left\{\mathscr{L}\operatorname{inv}[\varphi]+\bar{u}_a\left(-\frac{\delta c_a}{\delta\varphi_i}(\Delta_i^b+gt_{ik}^b\varphi_k)\right)u_b=\frac{1}{2}C_a^2+j_i\varphi_i\right\}
\end{aligned}
\tag{9.122}
$$

把（9.121）代入（9.122）得到：

$$
\begin{aligned}
& W_{c+\Delta c}[j]-W_c[j] \\
& =\int \mathrm{d}(\varphi)\mathrm{d}(u)\mathrm{d}(\bar{u})[ji\Delta c_\beta(\Delta_i^b+gt_{ik}^b\varphi_k)u_b\bar{u}_a] \\
& \cdot e^i\int \mathrm{d}^4x\left\{\mathscr{L}\operatorname{niv}[\varphi]+\bar{u}_a\left(-\frac{\delta c_a}{\delta\varphi_i}(\Delta_i^b+gt_{ik}^b\varphi_k)\right)\varphi_b-\frac{1}{2}c_a^2+j_i\varphi_i\right\}
\end{aligned}
\tag{9.123}
$$

由此可见，在对 $z_{c+\Delta c}[j]$ 作 $\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_i}$ 泛函微分时，出来的是：

$$
\varphi_i \xrightarrow{c\to c+\Delta c} \varphi_i+i\,\Delta c_a\bar{u}_a(\Delta_i^b+gt_{ik}^b\varphi_k)u_b \tag{9.124}
$$

也说是说，在取 C 规范时，$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu^a(x)}$ 给出一条 φ_i 腿；而在 $C+\Delta C$ 规范中，$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta j_\mu^a(x)}$ 给出的是 φ_i 腿和 $i\,\Delta C_a\bar{u}_a\,(\Delta_i^b+gt_{ik}^b\varphi_k)\,u_b$ 所能连出的各种腿（包括单线、双线、三线…的腿，见图9.15）的叠加。

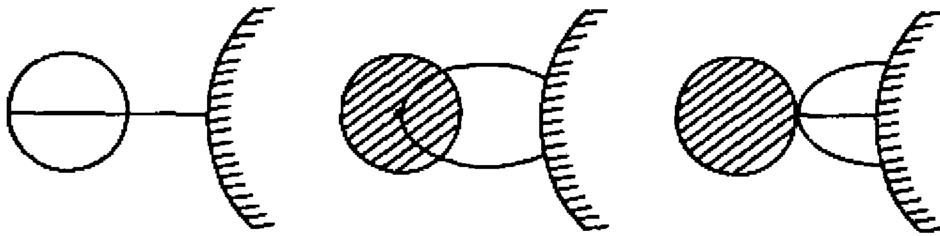


图　9.15

现在有两种情况，一种是 φ 的传播子的极点随规范而变，这种 φ 叫做非物理粒子；另一种是 φ 的传播子的极点不随规范而变，这种 φ 叫做物理粒子。现在就来考察 C 规范时伸出去的腿全部对应于物理粒子的格林函数，并把它换到 $C+\Delta C$ 规范。根据第五章的办法，以标量场 φ_l 为例，采用 §4－1 节给出的外线（见（4.9），只是在矩阵元 S_c^0 中，始末态乘上的是 $\frac{i}{\sqrt{2E_l}}(p_l^2+m_l^2)$，没有 $\frac{1}{Z_l}^{1/2}$ 因子）。取 $j_l^0=Z_l^{-1/2}j_l$，参考（8.76），立刻有：

$$
S_c^0=\prod_l\lim_{p_l^2=-m_l^2}\frac{(p_l^2+m_l^2)}{\sqrt{2E_l}}\frac{\delta^n Z_c[j]}{\delta j_l^0\cdots}=\prod_l\frac{(Z_l)_c^{1/2}}{\sqrt{2E_l}}G_c(p_1,p_2,\cdots) \tag{9.125}
$$

$$
S_{c+\Delta c}^0=\prod_l\lim_{p_l^2=-m_l^2}\frac{(p_l^2+m_l^2)}{\sqrt{2E_l}}\frac{\delta^n Z_{c+\Delta c}[j]}{\delta j_l^0\cdots}=\prod_l\frac{(Z_l)_{c+\Delta c}^{1/2}}{\sqrt{2E_l}}G_{c+\Delta c}(p_1,p_2,\cdots) \tag{9.126}
$$

这里 l 都是物理粒子，所以 m_l^2 不随规范而变。G_c 和 $G_{c+\Delta c}$ 分别是经过重正化了的截肢格林函数，只是规范不同。

然而从（9.124）来看，$C+\Delta C$ 规范的格林函数用 C 规范的语言来说，在截肢前虽

然出现双线腿、三线腿、…，但在乘上$\prod_l \lim_{p_l^2=-m_l^2} \frac{(p_l^2+m_l^2)}{\sqrt{2E_l}}$截肢后，只有带有$\frac{1}{p_l^2+m_l^2}$极点的腿(见9.5图的第一图)才能保留其贡献，其余双线腿、三线腿……的贡献(见9.5图的第二、三图)都在截肢中被截去。于是，S_c^0和$S_{c+\Delta c}^0$的不同，只在于各条腿的$\frac{1}{p_l^2+m_l^2}$极点上的留数不同而已(留数不同的来源在于(9.124)右方第二项给单线腿造成自能图。例如9.15图中第一图的自能圈图)。所以我们可用σ_l来反映留数的不同，取

$$S_{c+\Delta c}^0 = \prod_l \sigma_l S_c^0 = \prod_l \sigma_l \frac{(Z_l)_c^{1/2}}{\sqrt{2E_l}} G_c(p_1,p_2,\cdots) \tag{9.127}$$

与(9.126)比较，就发现：

$$\sigma_l = \frac{(Z_l)_{c+\Delta c}^{1/2}}{(z_l)_c^{1/2}} \tag{9.128}$$

而且：

$$G_{c+\Delta c}(p_1,p_2,\cdots) = G_c(p_1,p_2,\cdots) \tag{9.129}$$

(9.129)的等式也是很自然的，因为截肢前虽有双线腿、三线腿、…，截肢后则都是单线腿，除了单线腿上留数不同外，其余部分就都是一样的了。于是，我们恢复约化公式中的$\frac{1}{Z_l}^{1/2}$因子，得到重正化的物理粒子的S矩阵元不随规范而变的结论：

$$\left.\begin{aligned} S_c &= \prod_l \frac{1}{(Z_l)_c^{1/2}} S_c^0 = G_c(p_1,p_2,\cdots) \\ S_{c+\Delta c} &= \prod_l \frac{1}{(Z_l)_{c+\Delta c}^{1/2}} S_{c+\Delta c}^0 = G_c(p_1,p_2,\cdots) \end{aligned}\right\} \tag{9.130}$$

$$\therefore S_c = S_{c+\Delta c} \tag{9.131}$$

对于旋量场、矢量场等，情况是相仿的。

小结：

在有 Higgs 场而且 Higgs 场自发破缺的情况下，即使把破缺的φ改写成$\bar{\chi}+v$，作用量S仍保持 B. R. S. 变换下不变，从而 WT 恒等式，以及 Slavnov 恒等式仍成立。

这就导致一个结论，不论有没有自发破缺，规范条件的微小改变等价于原先规范中的$j_i\varphi_i$换成j_i($\varphi_i+\Phi_i$)，Φ_i是一个与规范的改变有关的微小量。

这样又有两种情况：一种情况是传播子极点随规范而变，这种φ_i对应于非物理粒子；另一种情况是传播子极点不随规范而变，这种φ_i对应于物理粒子。在这一节的讨论中，通过利用 Slavnov 恒等式，证明了外线全都是物理粒子（传播子极点不随规范而变）的经过重正化的矩阵元不随规范而变。这也说明，非物理的随规范而变的极点项对于这个物理粒子的矩阵元无贡献（它们互相正好抵消）。这样，也就保证了幺正性。

另外，最小重正化时，物理粒子传播子的极点可能偏离质壳，但可经过有限重正化回到质壳上。这一节的讨论中极点都在质壳上，对有限重正化来说，并不引起新的困难。[①]

① 从前面的讨论已经看到，物理粒子的极点在规范变换之下是不变的（当$\delta\mu^2$给定时）。

参考文献

1 G't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B50 (1972) 318.

2 B. W. Lee, J. Zinn - Justin, Phys. Rev. , D5 (1972) 3121, 3137; D7 (1973) 1049.

3 E. S. Abers, B. W. Lee, Phys. Reports. , C9 (1973) 1.

4 B. W. Lee, Methods in Field Theory, Edited by R. Balian, J. Zinn - Justin (1976)

第十章　重正化群和渐近自由

这一章我们要给出重正化群的一些细节，并讨论如何通过重正化群方程来证明非Abel 规范场所传递的相互作用有渐近自由性质。

§10－1　一个即使是不含带量纲参数的理论，在重正化后也要出现带量纲的参数

一般来说，可重正化的场论有两类参数：

1. 质量量纲为正的参数，如 $m\bar{\psi}\psi$ 中的 m，$\beta\varphi^3$ 中的 β。

2. 质量量纲为零的参数，如 $g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$ 中的 g，$\lambda\varphi^4$ 中的 λ。

如果有质量量纲为负的参数 α（例入费米相互作用），则在 $\mathscr{L}$ 中要出现如下形式的项

$$\alpha\varphi\cdots\bar{\psi}\cdots\psi\cdots,$$

其中乘积 $\varphi\cdots\bar{\psi}\cdots\psi\cdots$ 的质量量纲 >4（因 $\mathscr{L}$ 的质量量纲为 4）。然而第五章中说过，有这种项的 $\mathscr{L}$ 是不可重正的，所以，可重正化的场论中不含带负质量量纲的参数。

现在，考察一个格林函数，它的 p^2（输入或输出的能量动量平方）很大，以致 $\mathscr{L}$ 中的质量量纲为正的参数都可忽略（例如上述的 m，β），则这个格林函数的显示渐近行为的带头项必定和不含这些参数（例如 $m=0$，$\beta=0$）的相应理论带头项是一致的。

因此我们就来考察一个所带参数的质量量纲为零的理论，其中没有给定的参数来标定质量、动量、能量的大小。初看起来，会以为渐近行为应该纯由量纲分析来确定（即可以用量纲分析来定大动量格林函数与小动量格林函数之间的关系）。但实际并非如此，原因在于即使是一个所带参数的质量量纲为零的理论，在重正化时也总是要引入质量参数（包括取减除点时要引入质量；取最小重正化时要引入维数参量 μ）。特别是，在没有静止质量的理论里，μ 不能取做 0，否则要引起红外发散。

μ 并不是一个确定的量①。一旦 μ 定下来，则重正化常数 Z 和各种重正化的参量 g，λ 和 m（如果理论中含有静止质量的话）也都随之而定下来。格林函数随 μ 的变化也是有规律性的，描述这种变化规律性的方程就叫做重正化群方程。

在讨论重正化群方程之前，先举一例，看看重正化的 λ 如何随 μ 而变化，取（假定静止质量是 0）

$$\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}(\varphi_0,\lambda_0) = -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_0\partial_\mu\varphi_0 - \frac{\lambda_0}{4}\varphi_0^4 \tag{10.1}$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{\lambda}{4}\varphi^4 + \Delta\mathscr{L}(\varphi,\lambda,\mu)$$

其中（取最小重正比）

---

① 和前一章讨论幺正性时不一样，讨论幺正性时取定了 $p^2=-m^2$，m 是确定的。

$$\Delta\mathscr{L}=\lambda\frac{A(\varphi,\mu)}{n-4}+\lambda^2\left[\frac{B(\varphi,\mu)}{n-4}+\frac{C(\varphi,\mu)}{(n-4)^2}\right]+\cdots$$

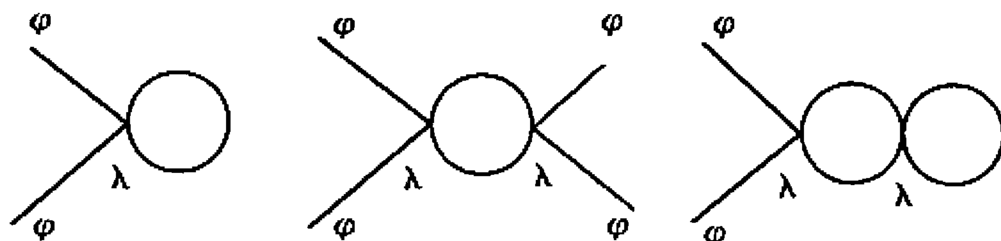


图 10.1

$\Delta\mathscr{L}$是抵消项，图 10.1 就是这个项主要对应的圈图。$A(\varphi,\mu)$，$B(\varphi,\mu)$，$C(\varphi,\mu)$，…和 Z_φ，Z_4，λ 都随 μ 而变；φ_0，λ_0 称为裸的，不随 μ 而变。

随 μ 的变化与量纲有关，在维数正常化的情况下，m,p,E 的量纲是 1，$\frac{\partial}{\partial x_\mu}$ 的量纲也是 1，另外，若取 $S=\mu^{4-n}\int\mathscr{L}d^nx=\int\mathscr{L}_0d^nx$，则 $\mathscr{L}_0$ 的量纲应取 n，相应有：

物理量	量纲	
$\mathscr{L}_0$	n	因$\int\mathscr{L}d^nx$　无量纲
φ_0,A_0	$\frac{n-2}{2}$	自 $\partial_\mu\varphi_0\partial_\mu\varphi_0$ 和 $\partial_\mu A_0\partial_\mu A_0$ 得来
$\psi_0,\bar\psi_0$	$\frac{n-1}{2}$	自 $\bar\psi\partial_\mu\psi$ 得来
m_0	1	自 $m_0^2\varphi_0^2$ 得来
λ_0	$4-n$	自 $\lambda_0\varphi_0^4$ 得来
g_0	$\frac{4-n}{2}$	自 $g_0\frac{\partial A_0}{\partial x_\mu}A_0A_0$ 得来
e_0	$\frac{4-n}{2}$	自 $e_0\bar\psi_0\psi_0A_0$ 得来

这里 λ_0 量纲为 $4-n$，但不随 μ；而 λ 量纲为 0（取 λ 为 $n=4$ 时的无量纲耦合常数），但随 μ 而变。由于 μ 是这个理论里唯一有量纲的参量，所以延拓 n 时，λ_0 与 λ 的关系应是：

$$\lambda_0=\mu^{4-n}\left[\lambda+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu(\lambda)}{(n-4)^\nu}\right]\tag{10.2}$$

在 $n=4$ 时，就回到

$$\lambda_0=\left[\lambda+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{a_\nu(\lambda)}{(n-4)^\nu}\right]$$

这正是我们熟悉的 λ_0 与 λ 的关系式。一般情况下，$a_\nu=a_\nu(m_r,\lambda)$，但现在取 $m_r=0$，所以（10.2）中写的是 $a_\nu=a_\nu(\lambda)$。（m_r 无量纲，见下一节）

现在变动 μ 如下：

$$\mu\to\mu'=\mu e^t\doteq\mu(1+t)\qquad|t|\ll1$$

由于 λ_0 不随 μ 而变，所以（取到 t 一次）：

$$\lambda_0 = \mu'^{4-n} e^{-(4-n)t}\left[\lambda + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu(\lambda)}{(n-4)^\nu}\right]$$

$$\doteq \mu'^{4-n}\left[\lambda + t(n-4)\lambda + t a_1(\lambda) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu(\lambda) + t a_{\nu+1}(\lambda)}{(n-4)^\nu}\right]$$

取 $\lambda = \tilde{\lambda} - t(n-4)\tilde{\lambda}$ （$n = 4$ 时，$\lambda = \tilde{\lambda}$），代入：

$$\lambda_0 = \mu'^{4-n}\left[\tilde{\lambda} + t a_1(\tilde{\lambda}) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu(\tilde{\lambda}) - t(n-4)\tilde{\lambda} \left.\frac{\partial a_\nu(\tilde{\lambda})}{\partial \tilde{\lambda}}\right|_{\tilde{\lambda}=\lambda} + t a_{\nu+1}(\tilde{\lambda})}{(n-4)^\nu}\right]$$

$$= \mu'^{4-n}\left[\tilde{\lambda} + t a_1(\tilde{\lambda}) - t\tilde{\lambda} \left.\frac{\partial a_1(\tilde{\lambda})}{\partial \tilde{\lambda}}\right|_{\tilde{\lambda}=\lambda}\right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu(\tilde{\lambda}) + t a_{\nu+1}(\tilde{\lambda}) - t\tilde{\lambda} \left.\frac{\partial a_{\nu+1}(\tilde{\lambda})}{\partial \tilde{\lambda}}\right|_{\tilde{\lambda}=\lambda}}{(n-4)^\nu}\right]$$

因为 $n = 4$ 时 $\lambda = \tilde{\lambda}$，所以当 n 回到 4 时有

$$\lambda_0 \overset{n=4}{=\!=\!=} \left[\lambda + t a_1(\lambda) - t\lambda \frac{\partial a_1(\lambda)}{\partial \lambda} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu(\lambda) + t a_{\nu+1}(\lambda) - t\lambda \frac{\partial a_{\nu+1}(\lambda)}{\partial \lambda}}{(n-4)^\nu}\right]$$

$$= \left[\lambda' + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a'_\nu(\lambda')}{(n-4)^\nu}\right] \tag{10.3}$$

所以，在 $\mu \to \mu' = \mu e^t$ （$|t| \ll 1$） 时

$$\lambda \to \lambda' = \lambda + t a_1(\lambda) - t\lambda \frac{\partial a_1(\lambda)}{\partial \lambda} \tag{10.4}$$

$$a'_\nu(\lambda') = a_\nu(\lambda) + t a_{\nu+1}(\lambda) - t\lambda \frac{\partial a_{\nu+1}(\lambda)}{\partial \lambda}$$

这就是无量风的 λ 随 $\mu \to \mu'$ 而变成 λ' 的具体例子。

$$\lambda' = \lambda'(\lambda, t), \lambda'(\lambda, 0) = \lambda$$

我们还看到，如果没有极点项，无量纲量 λ 就不会随 μ 而变。

现在定义 Z_λ 如下：

$$\lambda_0 = Z_\lambda \lambda \tag{10.5}$$

（λ 和 Z_λ 都要随 μ 而改变）。关于 Z_λ 的讨论请看后面。

再假定理论中有一个静止质量 $m \neq 0$，可取

$$m = \mu m_r \tag{10.6}$$

m_r 是一个无量纲量。我们来看一看 m_r 随 μ 的变化。仿照（10.2）写出

$$m_0 = \mu\left[m_r + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu(m_r, \lambda)}{(n-4)^\nu}\right] \tag{10.7}$$

变动 μ：$\mu \to \mu' = \mu e^t \doteq \mu(1+t)$ $\quad |t| \ll 1$。

由于 m_0 不随 μ 而变，所以（取到 t 一次）：

$$m_0 = \mu'(1-t)\left[m_r + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu(m_r, \lambda)}{(n-4)^\nu}\right]$$

$$= \mu'\left[m_r - tm_r + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu(m_r,\lambda) - tb_\nu(m_r,\lambda)}{(n-4)^\nu}\right]$$

取：$\lambda = \tilde{\lambda} - t(n-4)\tilde{\lambda}$，代入：

$$m_0 = \mu'\left[m_r - tm_r + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu(m_r,\tilde{\lambda}) - tb_\nu(m_r,\tilde{\lambda}) - t(n-4)\tilde{\lambda}\left.\frac{\partial b_\nu(m_r,\tilde{\lambda})}{\partial\tilde{\lambda}}\right|_{\tilde{\lambda}=\lambda}}{(n-4)^\nu}\right]$$

$$= \mu'\left[m_r - tm_r - t\tilde{\lambda}\left.\frac{\partial b_1(m_r,\tilde{\lambda})}{\partial\tilde{\lambda}}\right|_{\tilde{\lambda}=\lambda} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu(m_r,\tilde{\lambda}) - tb_\nu(m_r,\tilde{\lambda}) - t\tilde{\lambda}\left.\frac{\partial b_{\nu+1}(m_r,\tilde{\lambda})}{\partial\tilde{\lambda}}\right|_{\tilde{\lambda}=\lambda}}{(n-4)^\nu}\right]$$

回到 $n=4$ 有

$$m_0 \overset{n-4}{=\!=} \mu'\left[m_r - tm_r - t\lambda\frac{\partial b_1(m_r,\lambda)}{\partial\lambda} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu(m_r,\lambda) - tb_\nu(m_r,\lambda) - t\lambda\frac{\partial b_{\nu+1}(m_r,\lambda)}{\partial\lambda}}{(n-4)^\nu}\right]$$

$$= \mu'\left[m_r' + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu'(m_r',\lambda')}{(n-4)^\nu}\right] \tag{10.8}$$

就是说，在 $\mu \to \mu' = \mu e^t$（$|t| \ll 1$）的情况：

$$m_r \to m_r' = m_r - tm_r - t\lambda\frac{\partial b_1(m_r,\lambda)}{\partial\lambda}$$

$$b_\nu(m_r,\lambda) \to b_\nu'(m_r',\lambda') = b_\nu(m_r,\lambda) - tb_\nu(m_r,\lambda) - t\lambda\frac{\partial b_{\nu+1}(m_r,\lambda)}{\partial\lambda} \tag{10.9}$$

注意：$m = \mu m_r \neq m' = \mu' m_r'$；　$\frac{m'}{m}$与 $t\lambda\frac{\partial b_1(m_r,\lambda)}{\partial\lambda}$有关。

现在定义 Z_m 如下：

$$m_0 = Z_m m = Z_m \mu m_r \tag{10.10}$$

（m_r 和 Z_m 都要随 μ 而改变）。关于 Z_m 的讨论请看后面。

§10－2　重正化群，最小重正化和关于 m（质量）和 ξ（规范参数）的讨论

以 N 个 A 顶点的 $1PI$ 格林函数为例，裸的 $1PI$ 格林函数和重正化的 $1PI$ 格林函数之有如下关系（见第五章关于 $1PI$ 图的讨论）：

$$G_0(p_1,\cdots,p_N;g_0) = Z_3^{-\frac{N}{2}}G(p_1,\cdots,p_N;g;\mu) \tag{10.11}$$

Z_3 是 A 的重正化因子。这里用耦合常数 g 代替了上一节的 λ。后面将看到，μ 并不直接进入 Z_3，但 Z_3 是 g 的函数，

$$g = g(g_c,t), \quad g(g_c,0) = g_c \tag{10.12}$$

所以，g_c 定了以后，Z_3 只是 t 的函数。

以下为了方便，我们取

$$\mu = \mu_c e^t \tag{10.12$_2$}$$

这 μ_c 与前节的 μ 相当，μ 与前节的 μ'相当。

再考察（10.11）左方，它与 μ 无关，所以有

$$\mu \frac{\partial}{\partial\mu} G_0(p_1,\cdots,p_N;g_0) = 0$$

这导致对（10.11）右方作 $\mu \frac{\partial}{\partial\mu}$微商得零：

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\frac{\partial}{\partial g}\bigg|_{g_c} + (-N)\gamma\right] G(p_1,\cdots,p_N;g;\mu) = 0 \tag{10.13}$$

$$\beta = \mu \frac{\partial g}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\frac{\mu}{Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}$$

这就是最简单的一种重正化群方程。其中 $\big|_{g_c}$表示 g_c 固定（以下同）。

现在讨论两个问题：

1. 有静止质量 m 的重正化群方程。

此时（10.13）左方的 G（p_1，…，p_N；g；μ）应换成 G（p_1，…，p_N；g；μ；m)，并且左方应增加一项：

$$\gamma_m \cdot m\frac{\partial}{\partial m}\bigg|_{g_c} G(p_1,\cdots,p_N;g;\mu;m) \tag{10.14$_1$}$$

其中

$$\gamma_m = \frac{1}{m}\mu\frac{\partial m}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}$$

如果取（10.10）所定义的 Z_m，则因 m_0 不依赖于 μ，就有

$$\gamma_m = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln m = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln Z_m \tag{10.14$_2$}$$

在这里我们注意到，如果采用了最小重正化，则任何的 Z 中，m 都不会进去。可以具体地从第六章的维数正常化的积分公式来看：在积分后的式子里都有这样一个现象，即分母上的含有质量的因子 $(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}$，总是和分子上的 $\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)$因子同时出现。如果是发散项，总可延拓到 $\alpha=2$，则 $n=4$ 时，$\alpha-\frac{n}{2}=0$，因而

$$\Gamma\left(\alpha-\frac{n}{2}\right)\xrightarrow{\alpha-\frac{n}{2}\to 0}\frac{1}{2-\frac{n}{2}}$$

与此同时

$$\frac{(\mu^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}{(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}}\xrightarrow{\alpha-\frac{n}{2}\to 0} 1-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln\frac{m^2-k^2}{\mu^2}+\cdots$$

相乘后，第二项把$\frac{1}{4-n}$极点消去；第一项则保留$\frac{1}{n-4}$极点，但极点项不含有$\frac{m^2}{\mu^2}$。相仿，

对于 $(m^2-k^2)^{\alpha-1-\frac{n}{2}}$和 $\Gamma\left(\alpha-1-\frac{n}{2}\right)$也有类似的情况。所以看到，$\ln\frac{m^2}{\mu^2}$，$\frac{m^2}{\mu^2}$，…都不会进入 Z（应考虑到 Z 是无量纲量），也即 m 不会进入 Z。特别是 m 也不会进入 Z_m。可举一个有静止质量的 $\lambda\varphi^4$ 理论为例$\left(\mathscr{L}\text{中有}-\frac{\lambda}{4!}\varphi^4\text{ 项}\right)$：

单圈质量项 [圈图] =

$$= -i\lambda\mu^{4-n}\int\frac{d^np(-i)}{(2\pi)^4(p^2+m^2)} = -i\lambda\mu^{4-n}\frac{1}{(2\pi)^4}\frac{(-i)i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(1)(m^2)^{1-\frac{n}{2}}}$$

$$\xlongequal{n\Rightarrow 4}\frac{\lambda}{16\pi^2}\frac{(-i)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\left(1-\frac{n}{2}\right)(m^2)^{-1}}\doteq\frac{\lambda m^2}{8\pi^2}\cdot\frac{-i}{n-4}$$

可见进入 Z_m 的是$\frac{\lambda}{8\pi^2}\cdot\frac{1}{n-4}$，确是不含 m。

所以，根据

$$\gamma = -\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln Z_3$$

$$\gamma_m = -\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln Z_m$$

$$\beta = \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\bigg|_{g_c} = g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln g = -g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln Z_g$$

($g_0=Z_gg$，g_0 与 μ 无关)，可知 γ、γ_m、β 也都不会含有 m。

上述单圈质量项可以先延拓后积分，得到相同的结果。Z_m并不依赖于 m^2。而且甚至 $m^2=0$ 或取负值时，Z_m 仍只依赖于 λ。

单圈质量项 $= I_n$

$$= -i\lambda\mu^{4-n}\int\frac{d^np(-i)}{(2\pi)^4(p^2+m^2)} = I_n'\frac{2\pi^{\frac{n-4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)}$$

先延拓(见第六章)：

$$I_n' = -i\lambda\mu^{4-n}\cdot\frac{-2}{n-2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4\bar{p}P^{n-5}dP\frac{m^2(-i)}{(\bar{p}+P^2+m^2)^2}$$

$$\therefore\quad I_n = -i\lambda\mu^{4-n}\cdot\frac{-2}{n-2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^np\frac{m^2(-i)}{(p^2+m^2)^2}$$

$$= i\lambda\mu^{4-n}\frac{m^2}{(2\pi)^4}\cdot\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\cdot(-i)}{(m^2)^{2-\frac{n}{2}}}$$

$$\xrightarrow{n\to 4} \frac{i\lambda m^2}{16\pi^2} \frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{2-\frac{n}{2}}}$$

$$\doteq \frac{i\lambda m^2}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{4-n}\left(1-\left(2-\frac{n}{2}\right)\ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)+\cdots\right)$$

$$= m^2\left(-i\frac{\lambda}{8\pi^2}\cdot\frac{1}{n-4}\right) + \text{无极点项}$$

$$\therefore \qquad Z_m m^2 = m^2\left(1-\frac{\lambda}{8\pi^2}\cdot\frac{1}{n-4}+\cdots\right)$$

$\left(\text{考虑到}\ \mathscr{L}\ \text{中有}\ -\frac{1}{2}m^2\varphi^2\ \text{项}\right)$

可见进入 Z_m 的是 λ，Z_m 并不依赖于 m^2。

这个结论是从最小重正化得来的，然而最小重正化并不是唯一的做法。一般来说，减除发散有两类做法，一类是在物理的质壳上减除（前一章最后一节就需要做这样的减除），这样，物理的静止质量就会进入重正化的各种参量（例如 β，$\gamma\cdots$），不同于最小重正化的情况。不过，这种办法在没有任何静止质量的理论中不好用，因为减除后有红外发散。另一类做法是把静止质量也当做一个耦合常数，可以取 $m_0=Z_m m$。不在质壳上减除，m 一般不是物理质量。维数正常化的最小重正化就属于这类做法。

2. 有规范参数 $\xi=\frac{1}{a}$ 时的重正化群方程：ξ 也经受重正化，也随 μ 而变

$$\xi_0 = \frac{\xi}{Z_3}, \quad a_0 = Z_3 a, \quad (\xi_0, a_0 \text{ 与 } \mu \text{ 无关})$$

于是（10.13）左方 $G(p_1, \cdots, p_N; g; \mu)$ 应换成 $G(p_1, \cdots, p_N; g; \mu; m; a)$，并增加一项

$$\delta \frac{\partial}{\partial a}\bigg|_{g_c} G(p_1,\cdots,p_N;g;\mu;m;a)$$

其中

$$\delta = \mu\frac{\partial a}{\partial\mu}\bigg|_{g_c} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\frac{a_0}{z_3} \tag{10.15}$$

$$= -\mu a_0\frac{1}{Z_3}\cdot\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln Z_3 = -2a\gamma$$

到此为止，我们已经有了 β，γ_m，γ，δ 等重正化群的参量。正如上面讨论过的，它们都不含有 m，所以可写成

$$\beta = \beta(g,a), \quad \gamma_m = \gamma_m(g,a), \quad \gamma = \gamma(g,a)$$
$$\delta = \delta(g,a) = -2a\gamma(g,a)$$

在定义中 g_c 固定，所以独立变量也可换成 t。

还可以看到，它们都是有限的$\left(\text{不会有}\frac{1}{n-4}\text{极点}\right)$，因为（i）重正化的 g 有限，所以 $\beta(g, a)$ 有限；（ii）μ，m 都有取，所以 $\frac{1}{m}\mu\frac{\partial m}{\partial\mu}$ 有限，即 $\gamma_m(g, a)$ 有限；

（iii）在（10.13）中，G 是重正化的，有限的，$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$项和 $\beta\frac{\partial}{\partial g}$项也是有限的，后加的 $\gamma_m m\frac{\partial}{\partial m}$项又是有限的，另外加上 $\delta\frac{\partial}{\partial a}=-2a\gamma\frac{\partial}{\partial a}$项，它正比于 γ，a 又是有限的，所以在（10.13）中，$\gamma(g, a)$ 必须也是有限的，从而 $\delta(g, a)$ 也是有限的。

现在我们就把有 m、a 的重正化群方程写出来：

$$\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g,a)\frac{\partial}{\partial g}\Big|_{g_c}+(-N)\gamma(g,a)+\gamma_m(g,a)m\frac{\partial}{\partial m}\Big|_{g_c}$$
$$+\delta(g,a)\frac{\partial}{\partial a}\Big|_{g_c}\Big]G(p_1\cdots p_N;g;\mu;m;a)=0 \qquad (10.16)$$

在朗道规范，$a=0\to\delta=0$。此时 μ 的改变不会改变 $a=0$，即不会改变朗道规范，因为从

$$\delta=\mu\frac{\partial a}{\partial\mu}\Big|_{g_c}$$

看到，$\delta=0$ 时，$\frac{\partial a}{\partial\mu}\Big|_{g_c}=0$

我们还可以通过简单的办法证明，在最小重正化的情况下，

$$\rho=\frac{\partial g}{\partial a}=-g\frac{1}{Z_g}\frac{\partial Z_g}{\partial a}=0 \qquad (g_0=Z_g g)$$

$$\sigma=\frac{\partial\ln m}{\partial a}=-\frac{1}{Z_m}\frac{\partial Z_m}{\partial a}=0 \qquad (m_0=Z_m m)$$

也就是说，Z_g 与 a 无关，Z_m 与 a 无关，或

$$\beta=\beta(g),\quad \gamma_m=\gamma_m(g) \qquad (10.17)$$

都不含有 a。证明如下：

首先，类似于（10.2），我们写出

$$g_0=\mu^{\frac{4-n}{2}}g\left(1+\frac{\alpha_1}{n-4}+\frac{\alpha_2}{(n-4)^2}+\cdots\right)=\mu^{\frac{4-n}{2}}Z_g g$$

$$\therefore\quad Z_g=\left(1+\frac{\alpha_1}{n-4}+\frac{\alpha_2}{(n-4)^2}+\cdots\right)$$

$$\rho=\frac{\partial g}{\partial a}=-g\frac{1}{Z_g}\frac{\partial Z_g}{\partial a}$$

$$\therefore\quad \rho Z_g=-g\frac{\partial Z_g}{\partial a}$$

左方：
$$\rho Z_g=\rho\left(1+\frac{\alpha_1}{n-4}+\frac{\alpha_2}{(n-4)^2}+\cdots\right)$$

右方：
$$-g\frac{\partial Z_g}{\partial a}=-g\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial a}\frac{1}{n-4}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial a}\frac{1}{(n-4)^2}+\cdots\right)$$

左右对比，因为 ρ 有限（g 有限），不含有$\frac{1}{n-4}$极点，所以如果左右相等，则必定

$$\rho=0$$

从而看到

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial a} = \frac{\partial \alpha_2}{\partial a} = \cdots = 0$$

即 α_1，α_2，…都与 a 无关，说明 Z_g 和 $\beta = \beta(g)$ 都与 a 无关。

其次，类似于（10.7），我们写出

$$m_0 = \mu m_r\left(1 + \frac{b_1}{n-4} + \frac{b_2}{(n-4)^2} + \cdots\right) = mZ_m$$

$$\therefore \qquad Z_m = \left(1 + \frac{b_1}{n-4} + \frac{b_2}{(n-4)^2} + \cdots\right)$$

$$\sigma = \frac{\partial}{\partial a}\ln m = -\frac{1}{Z_m}\frac{\partial Z_m}{\partial a}$$

$$\therefore \qquad \sigma Z_m = -\frac{\partial Z_m}{\partial a}$$

左方：
$$\sigma Z_m = \sigma\left(1 + \frac{b_1}{n-4} + \frac{b_2}{(n-4)^2} + \cdots\right)$$

右方：
$$-\frac{\partial Z_m}{\partial a} = -\left(\frac{\partial b_1}{\partial a}\frac{1}{n-4} + \frac{\partial b_2}{\partial a}\frac{1}{(n-4)^2} + \cdots\right)$$

左右对比，因为 σ 有限（m 无限），不含有$\frac{1}{n-4}$极点，所以如果左右相等，则必定

$$\sigma = 0$$

从而看到
$$\frac{\partial b_1}{\partial a} = \frac{\partial b_2}{\partial a} = \cdots = 0$$

即 b_1，b_2，…都与 a 无关，说明 Z_m 与 a 无关和 $\gamma_m = \gamma_m(g)$ 与 a 无关。

证毕

注意在这个证明中最小重正化是很关键的，否则 Z_g，Z_m 中可能含有对 a 微分不为零的、又不含极点的项，ρ，σ 就不为零了。

以上我们用的是 a，不是 ξ，这样便于证明 $a=0$ 时，μ 的改变不会改变 $a=0$（不改变朗道规范）。由于 $\xi = \frac{1}{a}$，$\beta(g)$ 和 $\gamma_m(g)$ 也不含有 ξ。

§10-3　格林函数的反常量纲，有效耦合常数 g（g_m，t），β 和定点

格林函数的量纲

先从 $<0|TA_1A_2\cdots A_N|0>$ 入手，见 10.2 图，取 $n=4$。

此时 A 的量纲是 1，$<0|TA_1A_2\cdots A_N|0>$ 的量纲是 N。它的积分形式是（为了方便，可取$a=0, m=0$）：

$$\begin{aligned}&<0|TA_1A_2\cdots A_N|0>\\&\sim\int\frac{1}{p_1^2}\frac{1}{p_2^2}\cdots\frac{1}{p_N^2}d^4p_1d^4p_2\cdots d^4p_N\delta^4(p_1+p_2+\cdots+p_N)\\&\qquad\cdot G(p_1\cdots p_N;g;\mu)\end{aligned}\qquad(10.18)$$

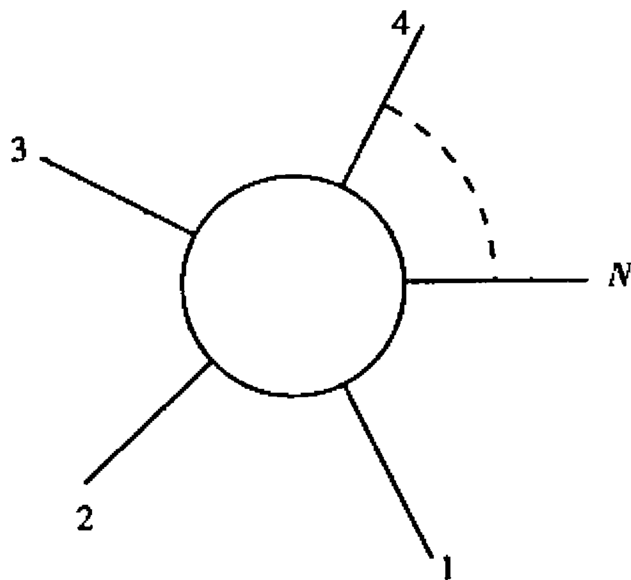


图 10.2

由于

$$\frac{1}{p_1^2}\frac{1}{p_2^2}\cdots\frac{1}{p_N^2} \qquad \text{的量纲是} \qquad -2N$$

$$d^4p_1d^4p_2\cdots d^4p_N \qquad \text{的量纲是} \qquad 4N$$

$$\underline{\delta^4(p_1+p_2+\cdots+p_N) \qquad \text{的量纲是} \qquad -4} \quad \text{合起来}$$

$$2N-4$$

所以 G（p_1，…，p_N；g，μ）的量纲是 $N-(2N-4)=4-N$。它的图是如下的 $1PI$ 图（图 10.3）：

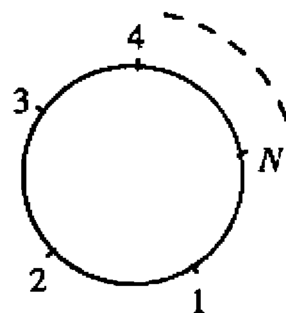


图 10.3

由于量纲的考虑，又有：

$$G(\lambda p_1,\lambda p_2,\cdots,\lambda p_N;g,\mu)=\lambda^{4-N}G\left(p_1,p_2,\cdots,p_N;g,\frac{\mu}{\lambda}\right)\longrightarrow$$

$$G(\lambda p_1,\lambda p_2,\cdots,\lambda p_N;g,\mu)=\mu^{4-N}G\left(\frac{\lambda p_1}{\mu},\frac{\lambda p_2}{\mu},\cdots,\frac{\lambda p_N}{\mu};g;1\right) \tag{10.19}$$

有效耦合常数 g（g_c，t）

综上所述，在最小重正化时，(10.16) 应写成：

$$\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\bigg|_{g_c}+(-N)\gamma(g,a)+\gamma_m(g)m\frac{\partial}{\partial m}\bigg|_{g_c}\right.$$
$$\left.+\delta(g,a)\frac{\partial}{\partial a}\bigg|_{g_c}\right]\cdot G(p_1,\cdots,p_N;g;\mu;m;a)=0 \tag{10.20}$$

自 (10.12) 又有（μ_c 固定）

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}=\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{g_c},$$

所以 (10.20) 又可写成

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{g_c}+\beta(t)\frac{\partial}{\partial g}\bigg|_{g_c}+(-N)\gamma(t,a)+\gamma_m(t)m\frac{\partial}{\partial m}\bigg|_{g_c}\right.$$
$$\left.+\delta(t,a)\frac{\partial}{\partial a}\bigg|_{g_c}\right]\cdot G(p_1,\cdots,p_N;g(g_c,t);\mu_c e^t;m(t);a(t))=0 \tag{10.21}$$

其中 $$\beta(t)=\beta(g(g_c,t))=\mu\frac{\partial g(g_c,t)}{\partial\mu}\bigg|_{g_c,\mu_c}=\frac{\partial g(g_c,t)}{\partial t}\bigg|_{g_c}$$

$$\gamma(t;a)=\gamma(g(g_c,t),a)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{g_c}\ln Z_3(g(g_c,t),a)$$

$$\gamma_m(t)=\gamma_m(g(g_c,t))=\frac{1}{m(t)}\frac{\partial m(t)}{\partial t}\bigg|_{g_c}$$

$$m(t)=\frac{Z_m(g(g_c,0))}{Z_m(g(g_c,t))}m(0) \tag{10.22}$$

$a(t)$ 是 $\frac{\partial a}{\partial t}\Big|_{g_c}=-2a\gamma(g(g_c,t),a)$ 的解

可以看到，各个参量对 t 的依赖都通过有效耦合常数 $g(g_c,t)$。

顺便提一下，自 $\beta(g(g_c,t))=\frac{\partial g(g_c,t)}{\partial t}\Big|_{g_c}$ 有

$$\int_0^t dt=t=\int_{g_c}^{g(g_c,t)}\frac{dg}{\beta(g)}\quad(\text{见}(10.12)_1\text{定义});$$

自 $\beta(g(g_c+\Delta g_c,t))=\frac{\partial g(g_c+\Delta g_c,t)}{\partial t}\Big|_{g_c+\Delta g_c}$（$g_c$ 换成 $g_c+\Delta g_c$，相应地 g 换成 $g+\Delta g$。$\beta(g)$ 仍是原来的函数）又有（看一看 t 不变，$g_c\to g_c+\Delta g_c$ 时 $g+\Delta g$ 如何变化，Δg 与 Δg_c 应有什么关系）：

$$\int_0^t dt=t=\int_{g_c+\Delta g_c}^{g(g_c,t)+\Delta g}\frac{dg}{\beta(g)}$$

两式相减，令 $\Delta g_c\to 0$，得到（t 固定）：

$$0=\frac{\Delta g}{\beta(g)}-\frac{\Delta g_c}{\beta(g_c)}\to\beta(g)=\beta(g_c)\frac{\partial g}{\partial g_c}\bigg|_t \tag{10.23}$$

所以，任意一个函数

$$f(g)=f(g(g_c,t))$$

（f 不再另外含有 g_c 和 t，而是只通过 $g(g_c,t)$ 含有 g_c 和 t）都满足如下重正化群方程

$$\frac{\partial}{\partial t}f(g)=\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}f(g)=\beta(g_c)\frac{\partial}{\partial g_c}f(g)$$

$$\longrightarrow\left(-\frac{\partial}{\partial t}+\beta(g_c)\frac{\partial}{\partial g_c}\right)f(g(g_c,t))=0 \tag{10.24}$$

$$\beta(g_c)=\frac{\partial g(g_c,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}$$

自（10.23）看到，$\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}$ 在这里可以换成 $\beta(g_c)\frac{\partial}{\partial g_c}$。

反常量纲 γ 和渐近行为

按量纲分析的（10.19）式，对于图 10.3 的 1PI 格林函数有

$$Z_3(t=0)^{-\frac{N}{2}}G(\lambda p_1,\cdots,\lambda p_N;g(g_c,0);\mu_c e^0;m(0);a(0))$$

$$=\lambda^{4-N}Z_3(t=0)^{-\frac{N}{2}}G\left(p_1,\cdots,p_N;g(g_c,0);\frac{\mu_c e^0}{\lambda};\frac{m(0)}{\lambda};a(0)\right)$$

又由于重正化群方程（10.21）保证了右方从 $t=0$ 换成 $t=t$ 时不变，可取 $\lambda=e^t$，则有

$$Z_3\ (t=0)^{-\frac{N}{2}}G\ (\lambda p_1,\ \cdots,\ \lambda p_N;\ g\ (g_c,\ 0);\ \mu_c e^0;\ m\ (0);\ a\ (0))$$

$$=e^{(4-N)t}Z_3\ (t)^{-\frac{N}{2}}G\ (p_1,\ \cdots,\ p_N;\ g\ (g_c,\ t);\ \frac{\mu_c e^t}{e^t};\ \frac{m\ (t)}{e^t};\ a\ (t))$$

$$\therefore\quad G\ (\lambda p_1,\ \cdots,\ \lambda p_N;\ g\ (g_c,\ 0);\ \mu_c e^0;\ m\ (0);\ a\ (0))$$

$$=e^{(4-N)t}Z_3\ (t)\ \left(\frac{Z_3\ (t)}{Z_3\ (t=0)}\right)^{-\frac{N}{2}}G\ (p_1,\ \cdots,\ p_N;\ g\ (g_c,\ t);\ \mu_c;\ \frac{m\ (t)}{e^t}a\ (t))$$

(10.25)

求 $\left(\frac{Z_3(t)}{Z_3(t=0)}\right)^{-\frac{N}{2}}$ 因子，自 $\gamma(t)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln Z_3$：

$$\int_0^t 2\gamma(t')\mathrm{d}t' = \ln\frac{Z_3(t)}{Z_3(0)} \tag{10.26}$$

代入（10.25）得到

$$G(\lambda p_1,\cdots,\lambda p_N;g(g_c,0);\mu_c;m(0);a(0))$$

$$= e^{(4-N)t-N\int_0^t\gamma(t')dt'}G(p_1,\cdots,p_N;g(g_c,t);\mu_c;\frac{m(t)}{e^t};a(t))$$

$$= e^{-N\int_0^t\gamma(t')dt'}G(\lambda p_1,\cdots,\lambda p_N;g(g_c,t);\lambda\mu_c;m(t);a(t)) \tag{10.27}$$

这里看到，可以通过重正化群方程，把很大动量 λ（$\lambda\to\infty$）的格林函数，同动量不大（$\lambda=1$）的格林函数联系起来。从而可以考察动量很大时的行为。可分以下几点来说明：

1. 如果 $t\to\infty$ 时有渐近自由，则

$$\lim_{t\to\infty}\quad g(g_c,t)\to 0$$

这时右方的 G 就接近于是一种自由粒子的格林函数，例如在 QCD 中，就是层子之间没有强相互作用的格林函数（这和 QCD 的标度无关性有关）。

2. 但实际上和完全自由还有区别，因为还有因子

$$e^{(4-N)t-N\int_0^t\gamma(t')dt'}。$$

$e^{(4-N)t}$ 只反映正常量纲，它不给出任何新的东西。但 $e^{-N\int_0^t\gamma(t')dt'}$ 则不一样，它给出额外的与 t（也就是与 λ）有关的修正（这和 QCD 的标度无关性的破坏有关）。

在这里，$4-N$ 是 G 的正常量纲，$N\gamma$ 相当于 G 的额外的量纲，叫做 G 的反常量纲，γ 则是属于单个 A 的反常量纲。

3. 自 $\gamma_m=-\frac{\partial}{\partial t}\ln Z_m$，有 $Z_m(t)=Z_m(0)e^{-\int_0^t\gamma_m dt}$

和

$$m(t)=\frac{Z_m(0)}{Z_m(t)}m(0)=m(0)e^{\int_0^t\gamma_m dt} \tag{10.28}$$

如果 t 很大时，γ_m（g）<1（见（10.49）和（10.51）的具体讨论），则（10.25）中 m 增加的倍数与 P 增加的倍数 λ 之比为

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)m(0)}{e^{t}}\to 0$$

4. 关于$\lim\limits_{t\to\infty}a$（$t$）的各种情况，见 § 10－6 最后一节的讨论。

定点和它的意义

关于g（g_c，t）在$t\to\pm\infty$时的渐近行为，还可作如下的讨论：

根据β（g）$=\frac{\partial g}{\partial t}$　（g（g_c，t）简写为g），设β（g）在$g=g_0$处有简单零点。

1. 如果在g_0附近$\frac{\partial\beta}{\partial g}<0$。

在g_0左边，$\beta=\frac{\partial g}{\partial t}>0$　t增加，g也增加（箭头→）$t\to\infty$，g增加到$g=g_0$，$\beta=0$。所以$g\to g_0$后就不再增加。在g_0右边，$\beta=\frac{\partial g}{\partial t}<0$　t增加，g减少（箭头←）$t\to\infty$，g减少到$g=g_0$，$\beta=0$。

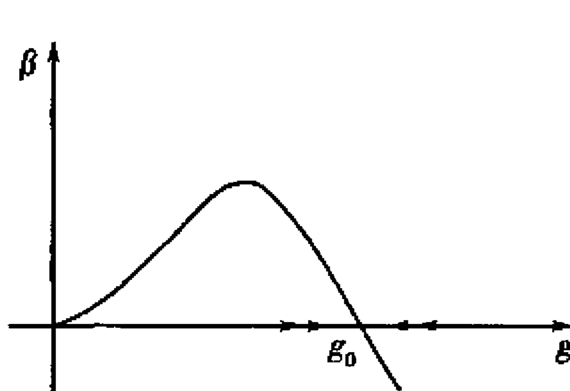


图　10.4

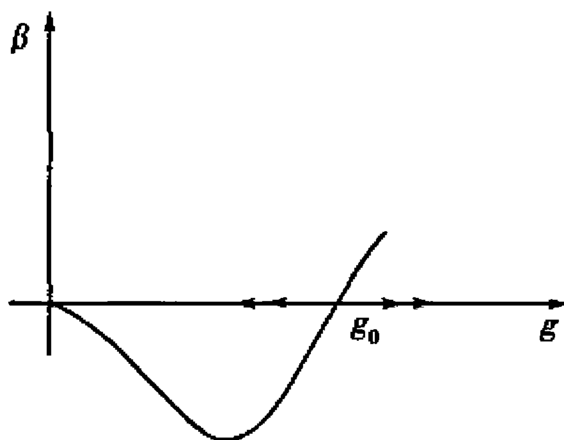


图　10.5

所以$g\to g_0$后就不再减少。
可见当$t\to\infty$，g_0左右附近的g都有

$$\lim_{t\to\infty}g(g_c,t)=g_0$$

的性质，这时g_0叫做紫外定点（见图 10.4）。

2. 如果在g_0附近$\frac{\partial\beta}{\partial g}>0$。

在g_0左右附近，经过同样的讨论，可知当$t\to-\infty$时，都有如下的性质：

$$\lim_{t\to-\infty}g(g_c,t)=g_0$$

这时g_0叫做红外定点（见图 10.5）。

对于微扰计算有意义的主要是$g=g_0=0$处的定点。若在$g=0$处，β有零点，而且$\frac{\partial\beta}{\partial g}<0$，则$g=0$就是紫外定点，就会出现渐近自由的行为。QCD 的β有这个性质，QED 就没有这个性质。

§10-4 β、γ与重正化因子 Z 之间的关系

β与 Z_g 的关系

前已知 $n\neq4$ 时，g 的外加量纲是$\frac{4-n}{2}$。重正化的 g 与裸的 g_0 之间的关系是（这里取最小重正化，只减除极点项）：

$$g_0 = \mu^{\frac{4-n}{2}}\left(g + \frac{\alpha_{11}g^3}{n-4} + \frac{\alpha_{21}g^5}{n-4} + \frac{\alpha_{22}g^5}{(n-4)^2} + \cdots\right) \tag{10.29}$$

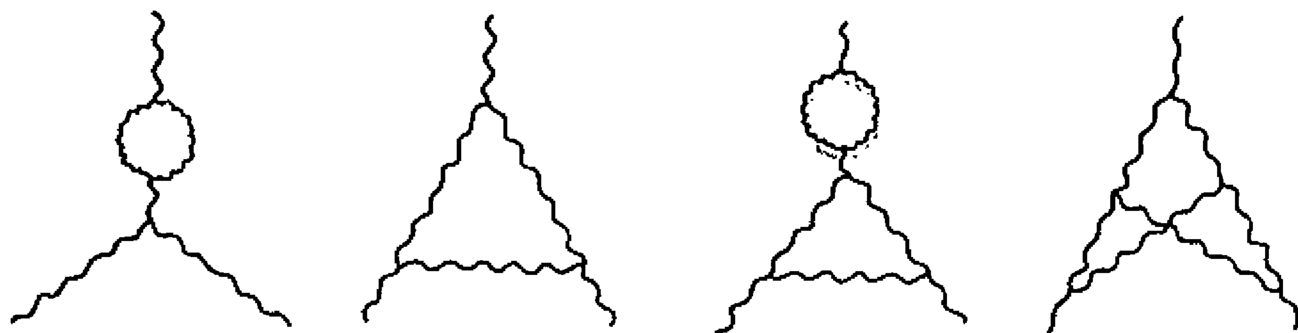


图 10.6

图 10.6 的前两图与 g^3 项相对应，后两图与 g^5 项相对应，…。一般来说，(10.29)可写成

$$g_0 = \mu^{\frac{4-n}{2}}g\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Z_g^\nu(g)}{(n-4)^\nu}\right) = \mu^{\frac{4-n}{2}}gZ_g$$

$$Z_g = \left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Z_g^\nu(g)}{(n-4)^\nu}\right) \tag{10.30}$$

$n\neq4$ 时，β 是 g，$n-4$ 的函数，按 β 的定义，并考虑到 g_0 与 μ 无关：

$$\beta(g,n-4) = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}g = g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln g = g\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left(-\frac{4-n}{2}\ln\mu - \ln Z_g\right)$$

$$= -\frac{4-n}{2}g - g\beta\frac{\partial}{\partial g}\ln Z_g$$

由此得到

$$\beta(g,n-4)Z_g + \beta(g,n-4)g\frac{\partial}{\partial g}Z_g + \frac{4-n}{2}gZ_g = 0$$

$$\therefore \qquad \beta(g,n-4)\frac{\partial}{\partial g}(gZ_g) + \frac{4-n}{2}gZ_g = 0 \tag{10.31}$$

第二项含有 $(n-4)^1$，$(n-4)^0$，$(n-4)^{-1}$，…等项；第一项中的$\frac{\partial}{\partial g}$ (gZ_g) 含有 $(n-4)^0$，$(n-4)^{-1}$，$(n-4)^{-2}$，…等项。可见 β $(g, n-4)$ 只有两项，一项 ~ $(n-4)^1$，另一项 ~ $(n-4)^0$。它不含$\frac{1}{(n-4)^i}$极点项，因它不发散；它不含 $(n-4)^2$，$(n-4)^3$，…，因否则第一项中要出现第二项所没有的 $(n-4)^2$，$(n-4)^3$，…。因此可把 β $(g, n-4)$ 写成：

$$\beta(g,n-4) = \frac{g}{2}(n-4) + \tilde{\beta}(g) \tag{10.32}$$

把它和（10.30）代入（10.31）：

$$\left(\frac{g}{2}(n-4) + \tilde{\beta}(g)\right)\left(g\frac{\partial}{\partial g}Z_g + Z_g\right) + \frac{4-n}{2}gZ_g = 0$$

$$\longrightarrow \tilde{\beta}(g)\frac{\partial}{\partial g}(gZ_g) + \frac{n-4}{2}g^2\frac{\partial}{\partial g}Z_g = 0$$

$$\longrightarrow \tilde{\beta}(g)\left(1 + \frac{\frac{\partial}{\partial g}(gZ_g^1)}{n-4} + \frac{\frac{\partial}{\partial g}(gZ_g^2)}{(n-4)^2} + \cdots\right)$$

$$+\left(\frac{g^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}Z_g^1 + \frac{g^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}Z_g^2\frac{1}{n-4} + \frac{g^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}Z_g^3\frac{1}{(n-4)^2} + \cdots\right) = 0 \tag{10.33}$$

由于 $\tilde{\beta}(g)$ 不发散，不含 $\frac{1}{n-4}$ 极点，所以立刻看到：

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\beta}(g) &= -\frac{g^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}Z_g^1 \\ \tilde{\beta}(g)\frac{\partial}{\partial g}(gZ_g^i) &= -\frac{g^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}Z_g^{i+1} \end{aligned}\right\} \tag{10.34}$$

（10.34）说明：

1. $n=4$ 时，$\beta(g) = \tilde{\beta}(g) = -\frac{g^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}Z_g^1$，完全由一个 Z_g^1 决定。例如自（10.29）就有（不过当然 Z_g' 包括各种多圈图的贡献）

$$Z_g^1 = \alpha_{11}g^2 + \alpha_{21}g^4 + \cdots$$

$$\beta(g) = -\frac{g^2}{2}(2\alpha_{11}g + 4\alpha_{21}g^3 + \cdots) = -\alpha_{11}g^3 - 2\alpha_{21}g^5 + \cdots \tag{10.35}$$

由此可见，$g\to 0$ 时，$\beta(g)$ 和 $\frac{\partial\beta(g)}{\partial g}$ 都 $\to 0$。所以 $g=0$ 是一个定点。

2. $Z_g^2, Z_g^3, \cdots, Z_g^n$ 都由 Z_g^1 决定，这是重正化群方程的一个重要性质。

3. 用（10.35），固定 g_c，取到 g^6：

$$\left.\frac{\partial g^2}{\partial t}\right|_{g_c} = 2g\left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{g_c} = 2g\beta(g) = -2\alpha_{11}g^4 - 4\alpha_{21}g^6 = -b_0g^4 + b_1g^6 \tag{10.36}$$

此地 $\begin{cases} b_0 = 2\alpha_{11}, \\ b_1 = -4\alpha_{21} \end{cases}$ 有时又写成 $\begin{cases} \alpha_{11} = \frac{b_0}{2} = \frac{\beta_0}{16\pi^2} \\ -2\alpha_{21} = \frac{b_1}{2} = -\frac{\beta_1}{(16\pi^2)^2} \end{cases}$

若 $\alpha_{11}>0$（后面将看到，只有非 Abel 规范场才有 $\alpha_{11}>0$），则在 g 为一个小正数时，$\frac{\partial\beta}{\partial g}<0$，即 $g=0$ 是一个紫外定点。$t\to\infty$ 时，$g\to 0$，有渐近自由性质。

（10.36）又可如下严格解出

$$\int_0^t dt = t = \int_{g_c}^{g}\frac{dg^2}{-b_0g^4 + b_1g^6}$$

$$= \frac{-1}{b_0}\int_{g_c}^{g} dg^2\left(\frac{1}{g^4} + \frac{b_1^2}{b_0^2}\frac{1}{\left(1 - \frac{b_1}{b_0}g^2\right)} + \frac{b_1}{b_0}\frac{1}{g^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{b_0}\left(-\frac{1}{g^2} + \frac{1}{g_c^2} + \frac{b_1}{b_0}\ln\frac{g^2}{g_c^2} - \frac{b_1}{b_2}\ln\frac{\left(1 - \frac{b_1}{b_0}g^2\right)}{\left(1 - \frac{b_1}{b_0}g_c^2\right)}\right) \tag{10.37}$$

当$g \to 0$，只留下大项，则t写成：

$$t \doteq \frac{1}{b_0}\left(\frac{1}{g^2} - \frac{1}{g_c^2}\right) - \frac{b_1}{b_0^2}\ln\frac{g^2}{g_c^2} \tag{10.38}$$

$$\longrightarrow g^2 = \frac{g_c^2}{1 + b_0 g_c^2 t + \frac{b_1}{b_0}g_c^2 \ln\frac{g^2}{g_c^2}}$$

所以t大时，$g \to 0$，在（10.38）中，可近似地取

$$g^2 \doteq \frac{1}{b_0 t}$$

代入得

$$g^2 \doteq \frac{g_c^2}{1 + b_0 g_c^2 t + \frac{b_1}{b_0}g_c^2 \ln\frac{1}{b_0 t}} \doteq \frac{g_c^2}{1 + b_0 g_c^2 t - \frac{b_1}{b_0}g_c^2 \ln t}$$

$$\doteq \frac{g_c^2}{1 + b_0 g_c^2 t}\left(1 + \frac{g_c^2}{1 + b_0 g_c^2 t}\frac{b_1}{b^0}\ln t\right)$$

所以$t \to \infty$（$g \to 0$）时，g^2的渐近表示式是

$$g^2 = \frac{g_c^2}{1 + b_0 g_c^2 t} + \frac{g_c^4}{(1 + b_0 g_c^2 t)^2}\frac{b_1}{b_0}\ln t + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \tag{10.39}$$

Λ—QCD 的一个"基本参量"

在（10.39）中，还需要给t一个确定的值，否则无法同实验做比较。为此，我们用深度非弹性散射中的q来定义$Q^2 = q^2$（类空，$Q^2 > 0$）。同时，为了把Q^2和μ^2联系起来，不妨取$\mu^2 = Q^2$。然后就可以转回来看μ_c是什么，从而t也得到确定。

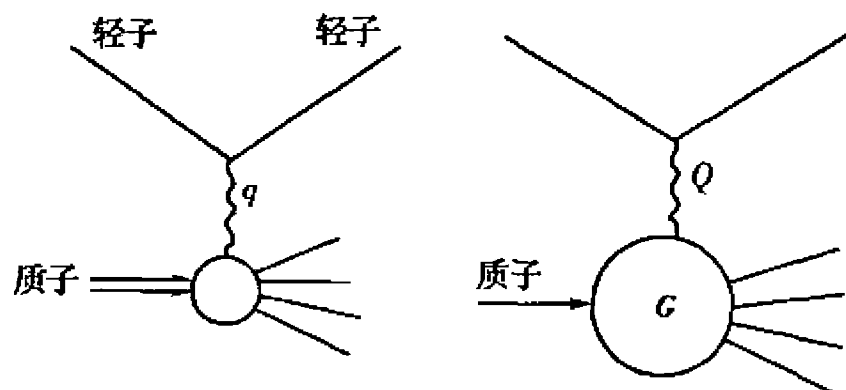


图 10.7

由于（10.39）中的g^2原是μ^2的函数，就写成

$$t = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{Q^2}{\mu_c^2}\right)。$$

又由于 Q^2 大时，

$$1 + b_0 g_c^2 t \backsimeq b_0 g_c^2 t$$

于是（10.39）就写成：

$$g^2(Q^2) = \frac{1}{b_0 \frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\mu_c^2}} + \frac{b_1}{b_0^3}\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\mu_c^2}\right)}{\frac{1}{4}\ln^2\frac{Q^2}{\mu_c^2}} + O\left(\frac{1}{\ln^2\frac{Q^2}{\mu_c^2}}\right) \qquad (10.39)_1$$

略去 $\frac{1}{\frac{1}{4}\ln^2\frac{Q^2}{\mu_c^2}} = \frac{1}{t^2}$ 的微小部分，解出

$$\ln\frac{Q^2}{\mu_c^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}b_0 g^2(Q^2)} + \frac{b_1}{b_0^3}\cdot\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\mu_c^2}\right)}{\frac{1}{4}g^2(Q^2)\ln\frac{Q^2}{\mu_c^2}}$$

右方第二项≪第一项，再叠代一次，叠代时略去第二项：

$$\ln\frac{Q^2}{\mu_c^2} \doteq \frac{1}{\frac{1}{2}b_0 g^2(Q^2)} + \frac{b_1}{\frac{1}{2}b_0^2}\ln\left(\frac{1}{b_0 g^2(Q^2)}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{b_0 g^2(Q^2)} - \frac{b_1}{b_0^2}\ln(b_0 g^2(Q^2))\right) \qquad (10.40)$$

于是，可以取 Λ：

$$\Lambda^2 = \mu_c^2 = Q^2\cdot\exp\left[-\frac{2}{b_0 g^2(Q^2)} + \frac{2b_1}{b_0^2}\ln(b_0 g^2(Q^2))\right] \qquad (10.40')$$

原则上可以期望，根据不同能量（大 Q^2 值）的实验中定出的 Q^2 值和 g^2（Q^2）值，都能求得相同的 $\mu_c^2 = \Lambda^2$。但由于（10.39），（10.40）都是近似$\left(\text{在 } t = \frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\mu_c^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} \gg 1 \text{ 时，才是对的}\right)$，在 t 不够大时，会引来较大误差；另外，由于 Q^2 不够大时，微扰展开只取头一两项并不够准确，也会引来误差。所以目前 Λ 值只能定在 $0.5GeV$ 左右，不同的实验定出来的 Λ 并不相同。不过一般来说，仍可以把 Λ 看作是 QCD 在高能大 Q^2 值时的一个“基本参量”。

γ 与 Z_3 的关系 自（10.13）

$$\gamma(g,a,n-4) = \frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln Z_3 = \frac{1}{2}\beta(g,n-4)\frac{\partial}{\partial g}\bigg|_{g_c}\ln Z_3$$

$$\therefore \qquad 2\gamma(g,a,n-4)Z_3 = \beta(g,n-4)\frac{\partial}{\partial g}Z_3 \qquad (10.41)$$

最小重正化时，

$$Z_3 = 1 + \sum_{\nu=1}\frac{Z_3^\nu}{(n-4)^\nu}$$

代入（10.41），采用（10.32）的 β（g，$n-4$）：

$$2\gamma(g, a, n-4)\left(1+\frac{Z_3^1}{n-4}+\frac{Z_3^2}{(n-4)^2}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{g}{2}(n-4)+\bar{\beta}(g)\right)\left(\frac{\partial Z_3^1}{\partial g}\frac{1}{n-4}+\frac{\partial Z_3^2}{\partial g}\frac{1}{(n-4)^2}+\cdots\right) \tag{10.42}$$

此式右方含有 $(n-4)^0$，$(n-4)^{-1}$，$(n-4)^{-2}$，…；左方的 Z_3 含有 $(n-4)^0$，$(n-4)^{-1}$，$(n-4)^{-2}$，…。可见 γ（g，a，$n-4$）只有一项。它不含$\frac{1}{(n-4)^i}$极点项，因它不发散；它不含有 $(n-4)^1$，$(n-4)^2$，…，否则左方要出现右方所没有的 $(n-4)^1$，$(n-4)^2$，…。因此可把γ（g，a，$n-4$）写成 γ（g，a）：

∴
$$2\gamma(g,a)\left(1+\frac{Z_3^1}{n-4}+\frac{Z_3^2}{(n-4)^2}+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{g}{2}(n-4)+\bar{\beta}(g)\right)\left(\frac{\partial Z_3^1}{\partial g}\frac{1}{n-4}+\frac{\partial Z_3^2}{\partial g}\frac{1}{(n-4)^2}+\cdots\right) \tag{10.43}$$

两边对比，解出

$$\left.\begin{aligned}\gamma(g,a)&=\frac{g}{4}\frac{\partial Z_3^1}{\partial g}\\ 2\gamma(g,a)Z_3^i-\bar{\beta}(g)\frac{\partial Z_3^i}{\partial g}&=\frac{g}{2}\frac{\partial Z_3^{i+1}}{\partial g}\end{aligned}\right\} \tag{10.44}$$

（10.44）说明：

1. γ（g，a）也完全由 Z_3^1 决定。

2. 当 $n=4$，$\bar{\beta}(g)=\beta(g)=-\frac{g^2}{2}\frac{\partial Z_g^1}{\partial g}$。所以 Z_3^2，Z_3^3，Z_3^4，…都由 Z_g^1，Z_3^1 决定。

γ_m 与 Z_m 的关系　自（10.14）

$$\gamma_m(g,n-4)=-\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\bigg|_{g_c}\ln Z_m=-\beta(g,n-4)\frac{\partial}{\partial g}\ln Z_m$$

∴
$$\gamma_m(g,n-4)Z_m=-\beta(g,n-4)\frac{\partial}{\partial g}Z_m \tag{10.45}$$

最小重正化时：

$$Z_m=1+\sum_{\nu=1}\frac{Z_m^\nu}{(n-4)^\nu}$$

$$\gamma_m(g, n-4)\left(1+\frac{Z_m^1}{n-4}+\frac{Z_m^2}{(n-4)^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(\frac{g}{2}\cdot(n-4)+\bar{\beta}(g)\right)\left(\frac{\partial Z_m^1}{\partial g}\frac{1}{n-4}+\frac{\partial Z_m^2}{\partial g}\frac{1}{(n-4)^2}+\cdots\right) \tag{10.46}$$

在 γ_m 中也不含有$\frac{1}{n-4}$极点，所以对比之下，γ_m 也只能有一项，可写成 γ_m（g）：

$$\gamma_m(g)\left(1+\frac{Z_m^1}{n-4}+\frac{Z_m^2}{(n-4)^2}+\cdots\right)$$

$$= -\left(\frac{g}{2}(n-4) + \tilde{\beta}(g)\right)\left(\frac{\partial Z_m^1}{\partial g}\frac{1}{n-4} + \frac{\partial Z_m^2}{\partial g}\frac{1}{n-4} + \cdots\right) \tag{10.47}$$

两边对比解出：

$$\left.\begin{aligned} \gamma_m(g) &= -\frac{g}{2}\frac{\partial Z_m^1}{\partial g} \\ \gamma_m(g) Z_m^i + \tilde{\beta}(g)\frac{\partial Z_m^i}{\partial g} &= -\frac{g}{2}\frac{\partial Z_m^{i+1}}{\partial g} \end{aligned}\right\} \tag{10.48}$$

可见 γ_m 的情况和 γ 类似，也是 γ_m 完全由 Z_m^1 决定，Z_m^2、Z_m^3、…也完全由 Z_m^1 决定。

再看一看（10.28）提供的$\frac{m(t)}{e^t}$在 $t\to\infty$ 时趋于什么。

因为一般来说，Z_m 与自能图有关，最低次自能图有



图 10.8

所以最小重正化时：

$$Z_m = \left(1 + \frac{c_m g^2}{4-n} + \cdots\right)$$

自（10.48）：

$$\gamma_m = -\frac{g}{2}\frac{\partial(-c_m g^2)}{\partial g} = c_m g^2$$

自（10.39）：

$$\gamma_m = c_m\left(\frac{1}{b_0 t} + \frac{b_1 \ln t}{b_0^3 t^2} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \tag{10.49}$$

此式在 t 小时不是一个好的近似。但我们讨论的是下列情况：

$$t > t_1 \gg 1$$

可把（10.28）改写成

$$m(t) = m(t_1) e^{\int_{t_1}^{t}\gamma_m(t')dt'}$$

略去微小项：

$$m(t) \doteq m(t_1) e^{\int_{t_1}^{t}\frac{c_m}{b_0 t'}dt'} = m(t_1) e^{\frac{c_m}{b_0}\ln\frac{t}{t_1}}$$

$$= m(t_1)\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{c_m}{b_0}} \tag{10.50}$$

$$\therefore \qquad \frac{m(t)}{e^t} = e^{-t}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{c_m}{b_0}} m(t_1) \tag{10.51}$$

所以无论$\frac{c_m}{b_0}$是正是负，（10.25）中的$\frac{m(t)}{e^t}$在 $t\to\infty$ 时趋于零。

§10－5　守恒算子和部分守恒算子的反常量纲为零

一个例子　先举一个量子电动力学的例子。

取一个守恒的流：

$$J_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

把它装在一个 $1PI$ 的图中，作为这个 $1PI$ 的一个顶点，试问它的重正化因子是什么？

前面已经看到，$1PI$ 中的缺少一条 A 线的 g 顶点（在量子电动力学就是 e 顶点。见下图）的重正化因子是 $Z_3^{-1/2}$。

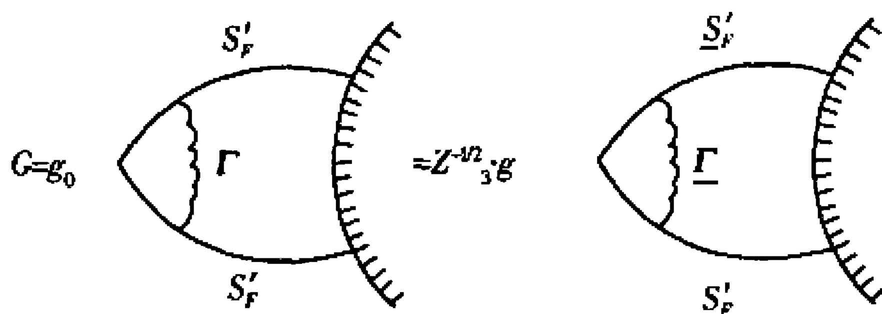


图　10.9

原因是　$g_0 = \dfrac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} g$，两个 S_F' 各提供一个 $Z_2^{1/2}$，而 $\Gamma = \dfrac{1}{Z_1}\underline{\Gamma}$。

相仿，上述的 J_μ 如果装在一个 $1PI$ 中，它就是一个缺少一条 A 线，又缺少一个 g（在量子电动力学就是缺少一个 e。见图 10. 10）的顶角图。

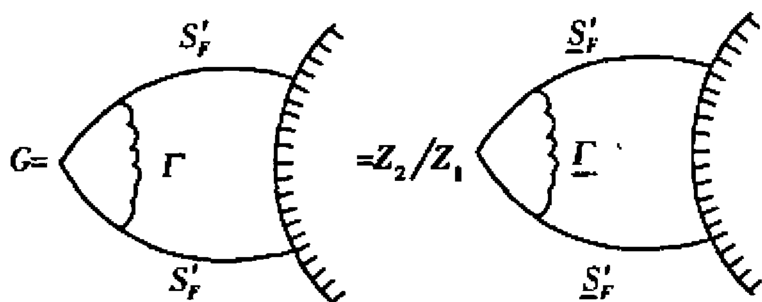


图　10.10

因为两个 S_F' 各提供一个 $Z_2^{1/2}$，$\Gamma - \dfrac{1}{Z}\underline{\Gamma}$，所以 J_μ 的重正化因子就是 $Z_J = \dfrac{Z_2}{Z_1}$，而

$$\gamma_J = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_J。$$

§8－9 曾指出对于 Abel 群有 $Z_1 = Z_2$。现在具体算一下一圈图的 Z_1 和 Z_2。为了后面的方便，我们不限于量子电动力学，而是扩大到包括量子色动力学等（但只限于算一圈图 10. 11），但用 QED 中常用的费曼规范，i, j, l 是群指标（例如在量子色动力学就是色指标）。

$J_\mu^l = i\bar{\psi}_l\gamma_\mu\psi_l$，把 giJ_μ^l 装进 $1PI$（略去费米子质量）：

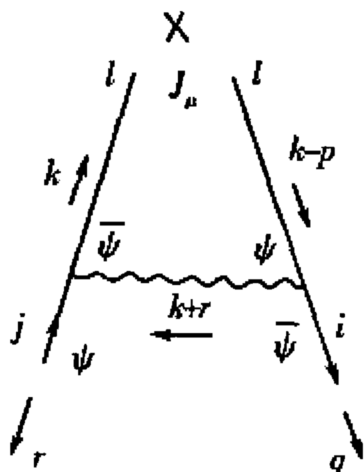


图　10.11

$$g^3\int\frac{d^nk}{(2\pi)^4}\frac{(-\gamma_\alpha)(\hat{k}-\hat{p})(-\gamma_\mu)\hat{k}(\quad\gamma_\alpha)}{(k-p)^2(k)^2}\cdot\frac{-i}{(k+r)^2}T^a_{il}T^a_{lj}$$

只取发散项,不计 $\hat{p}$ 项

$$\Rightarrow -ig^3T^a_{il}T^a_{lj}\int_0^1dx\int_0^1dy\cdot 2y$$

$$\cdot\frac{d^nk}{(2\pi)^4}\frac{2\hat{k}\gamma_\mu\hat{k}}{[k^2+2(r(1-y)-pxy)\cdot k+p^2xy+r^2(1-y)]^3}$$

$$\begin{cases} T^a_{il}T^a_{lj}=C_2(R)\delta_{ij} \\ \hat{k}\gamma_\mu\hat{k}=-k^2\gamma_\mu+2\hat{k}k_\mu \end{cases}$$

取出发散项（根据第六章的公式）:

$$\Rightarrow -ig^3C_2(R)\delta_{ij}\frac{1}{16\pi^4}\int_0^1dx\int_0^1dy\cdot 2y\cdot\frac{i\pi^2}{\Gamma(3)}\Gamma\left(3-1-\frac{n}{2}\right)$$

$$\cdot 2\cdot\left(-\frac{4}{2}\gamma_\mu+\delta_{\mu\alpha}\gamma_\alpha\right)=\frac{g^3}{16\pi^2}C_2(R)\delta_{ij}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\cdot(-2\gamma_\mu)$$

$$\doteq\frac{g^3}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{n-4}2C_2(R)\delta_{ij}\gamma_\mu \tag{10.52}$$

$$\begin{cases} \text{在 }\Delta\mathscr{L}_I\text{ 中有}(Z_1-1)ig\bar{\psi}_l\gamma_\mu\psi_lA_\mu=(Z_1-1)g\,J^l_\mu A_\mu \\ i\Delta\mathscr{L}_I\text{ 中有 }-(Z_1-1)g\bar{\psi}_l\gamma_\mu\psi_lA_\mu \end{cases}$$

去掉了 A，与图 10.11 对比，要求 $-(Z-1)$ 与 $\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}2C_2(R)$ 相消，

$$\therefore\qquad Z_1=1+\frac{g}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}2C_2(R) \tag{10.53}$$

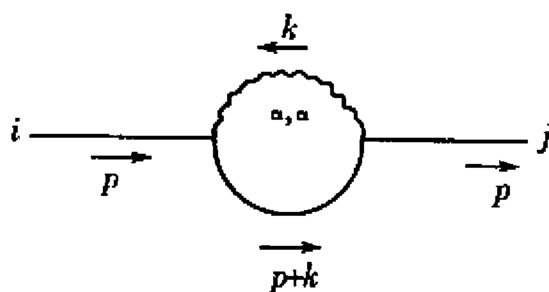


图 10.12

$$g^2\int\frac{d^nk}{(2\pi)^4}\frac{(-\gamma_\alpha)(-\hat{p}-\hat{k})(-\gamma_\alpha)}{(p+k)^2}\left(\frac{-i}{k^2}\right)T^a_{jl}T^a_{li}$$

$$=-iC_2(R)\delta_{ij}g^2\int_0^1dx\frac{d^nk}{(2\pi)^4}\frac{2(\hat{p}-\hat{k})}{(k^2+2pkx+p^2x)^2}$$

取出发散项，

$$\Rightarrow -iC_2(R)\delta_{ij}g^2\int_0^1dx\frac{1}{16\pi^4}\frac{i\pi^2\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)}2(\hat{p}-\hat{p}x)$$

$$\div \frac{g^2}{16\pi^2}C_2(R)\delta_{ij}\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\cdot \not{p} = \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{4-n}C_2(R)\delta_{ij}\cdot 2\not{p} \tag{10.54}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{在 } \Delta\mathscr{L}_I \text{ 中有 } -(Z_2-1)\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu} \\ i\Delta\mathscr{L}_I \text{ 中有 } -(Z_2-1)(-1)\bar{\psi}\not{p}\psi \end{array}\right.$$

对比，要求（Z_2-1）与$\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{4-n}C_2$（$R$）$\delta_{ij}2\not{p}$ 相消，

$$\therefore \qquad Z_2 = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}2C_2(R) \tag{10.55}$$

$$\therefore \qquad Z_J = \frac{Z_2}{Z_1} = 1, \qquad \ln Z_J = 0 \to \gamma_J = 0 \tag{10.56}$$

回到 QED，无非把 C_2（R）换作 1，（10.56）仍成立。

其实，不仅一圈时 $Z_J=1$，$\gamma_J=0$，后面将看到，任意多圈时也都是如此。另外，§8-9 已经证明，在量子电动力学中，任意多圈时都有 Z_1（$=Z_g$）$=Z_2$。

守恒流

守恒流总是和某种变换的不变性相联系的。如果 $\mathscr{L}^0$ 在如下的变换下不变（"0" 代表裸的）：

$$\varphi_i^0 \to \varphi_i^{0'} = \varphi_i^0 + T_{ij}^b\varphi_j\theta^b \tag{10.57}$$

（这是整体变换，θ^b 是常数），则

$$\delta\mathscr{L}^0 = \frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i^0}{\partial x_\mu}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}T_{ij}^b\varphi_j^0\right)\theta^b + \frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial\varphi_i^0}T_{ij}^b\varphi_j^0\theta^b = 0$$

因为有 Euler-Lagrange 方程：

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i^0}{\partial x_\mu}\right)} - \frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial\varphi_i^0} = 0$$

所以

$$\delta\mathscr{L}^0 = \frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i^0}{\partial x_\mu}\right)}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}T_{ij}^b\varphi_j^0\right)\theta^b + \left(\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i^0}{\partial x_\mu}\right)}\right)T_{ij}^b\varphi_j^0\theta^b$$

$$= \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i^0}{\partial x_\mu}\right)}T_{ij}^b\varphi_j^0\right)\theta^b = 0 \tag{10.58}$$

θ^b 是任意常数，所以守恒流就是

$$J_\mu^{b0} = \frac{\partial\mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i^0}{\partial x_\mu}\right)}T_{ij}^b\varphi_j^0 \tag{10.59}$$

它满足：
$$\partial_\mu J_\mu^{b0} = 0$$

根据流守恒，还可得到不随时间而变的不变量 Q^{b0}：

$$Q^{b0} = -i\int J_4^{b0}(x,t)d^3x \tag{10.60}$$

$$\frac{\partial Q^{b0}}{\partial t} = 0$$

通过 $\mathscr{L}^0$的路径积分量子化，又可得到 φ^0 的对易关系。特别是，φ_i^0 的正则共轭量正好就是在（10.47）中出现的$\frac{\partial \mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x}\right)} = -i\frac{\partial \mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial \varphi_i^0}{\partial x_4}\right)}$（见第一章）。从而又得到：

$$[\varphi_i^0(x,t), \theta^b Q^{b0}] = i\theta^b T_{ij}^b \varphi_j^0(x,t) \tag{10.61}$$

现在再看一下规范理论（例如 σ，τ 代表味）：

$$\mathscr{L}^0 = \mathscr{L}[A^0] - \bar{\psi}_\sigma^0\left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\sigma_{\sigma\tau} - ig\gamma_\mu A_\mu^{a0}\tau_{\sigma\tau}^a + m_0\delta_{\sigma\tau}\right)\psi_\tau^0 + \cdots \tag{10.62}$$

整体规范变换是（θ^b 是常数）：

$$\begin{aligned} A_\mu^{a0} &\to A_\mu^{a0\prime} = A_\mu^{a0} + f_{abc}A_\mu^{c0}\theta^b \\ \psi_\sigma^0 &\to \psi_\sigma^{0\prime} = \psi_\sigma^0 - i\tau_{\sigma\tau}^b\psi_\tau^0\theta^b \end{aligned} \tag{10.63}$$

所以自（10.59）有

$$\begin{aligned} J_\mu^{b0} &= \frac{\partial \mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial \psi_\sigma^0}{\partial x_\mu}\right)}(-i\tau_{\sigma\tau}^b\psi_\tau^0) + \frac{\partial \mathscr{L}^0}{\partial\left(\frac{\partial A_\nu^{a0}}{\partial x_\mu}\right)}(f_{abc}A_\nu^{c0}) = \\ &= i\bar{\psi}_\sigma^0\tau_{\sigma\tau}^b\gamma_\mu\psi_\tau^0 + \underbrace{\frac{\partial \mathscr{L}[A^0]}{\partial\left(\frac{\partial A_\nu^{a0}}{\partial x_\mu}\right)}f_{abc}A_\nu^{c0}}_{\text{不含 }\psi^0,\bar{\psi}^0} \end{aligned} \tag{10.64}$$

$$\partial_\mu J_\mu^{b0} = 0$$

对于 ψ^0，$\bar{\psi}^0$ 可立刻通过路径积分量子化，得到 ψ^0，$\bar{\psi}^0$ 的对易关系。于是定义（与（10.60）相当）：

$$\begin{aligned} Q^{b0} &= -i\int J_4^{b0}(x,t)d^3x \\ &= \int \bar{\psi}_\sigma^0\tau_{\sigma\tau}^b\gamma_4\psi_\tau^0 d^3x + Q_1^{b0}(\text{不含 }\psi^0,\bar{\psi}^0\text{ 的部分}) \end{aligned} \tag{10.65}$$

则对易关系给出（与（10.61）相当）：

$$[\psi_\sigma^0(x,t), \theta^b Q^{b0}] = \tau_{\sigma\tau}^b\psi_\tau^0(x,t)\theta^b \tag{10.66}$$

但 $\mathscr{L}^0$是规范不变的，对规范场不能量子化。必须加上规范条件，即取 $\mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^{0\prime} = \mathscr{L}^0 + \frac{\xi}{2}(C^a)^2$ 以后，才能把规范场量子化。加上规范条件后，一般并不影响 ψ^0 和 $\bar{\psi}^0$ 的量子化及其对易关系，不改变 Q^{b0}的$_0$ 合 ψ^0，$\bar{\psi}^0$ 部分，即不改变（10.65）的第一项。所以，在加上规范条件后，（10.66）仍成立。（附录 3 将用到这个结果）。

J_μ 的反常量纲 γ_J 和 $T_{\mu\nu}$的反常量纲 γ_T

我们再回到（10.61），把它的右方装入 $1PI$，则得到

$G^0 = \psi^0(\bar{x},t)$ [diagram] $= Z_\psi^{\frac{1}{2}}\ \psi(\bar{x},t)$ [diagram] $Z_{G'}$

把它的左方装入原先那个 $1PI$，则又得到：

$$G^0 = \psi^0(\bar{x},t)\ [\text{diagram with } Q^{b0}] = Z_\psi^{\frac{1}{2}}\ \psi(\bar{x},t)\ [\text{diagram with } Z_J Q^b]\ Z_{G'} \qquad (10.67)$$

因为 $Z_{G'}$ 和 $\gamma_{G'}$ 只和原先的（装入算子之前的）$1PI$ 的不完全顶点（缺一条线或缺一个耦合常数，等等）有关，这种顶点在（10.66）和（10.67）中是相同的，所以有共同的 $Z_{G'}$ 和 γ_G。另外，由于（10.61），插入的既然是相等的东西，则（10.66）的 G^0 和（10.67）的 G^0 应该是相等的 G^0，有共同的 Z_G 和 γ_G。所以，自（10.66）得到：

$$\gamma_G = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln(Z_\psi^{1/2}\cdot Z_{G'}) = \gamma_\psi + \gamma_{G'}$$

自（10.67）得到：

$$\gamma_G = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln(Z_\psi^{1/2}\cdot Z_J\cdot Z_{G'}) = \gamma_\psi + \gamma_J + \gamma_{G'}$$

$$(\gamma_G = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_G, \gamma_\psi = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_\psi^{1/2}, \gamma_{G'} = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_{G'}, \gamma_J = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_J)$$

$$\therefore Z_G = Z_\psi^{1/2}\cdot Z_G' = Z_\psi^{1/2}\cdot Z_J\cdot Z_G'),$$

$$\gamma_J = 0, (Z_J = 1)。 \qquad (10.68)$$

又自（10.60）看到，Q^b 和 J_μ^b 应有相同的 Z 和 γ，所以 J_μ^b 的 Z 也是 $Z_J=1$，J_μ^b 的反常量纲也是 $\gamma_J=0$。自（10.61），Q^b 的正常量纲为 0，J_μ^b 的正常量纲为 3。

相仿，对于守恒的能量、动量也有如下对易关系：

$$[\varphi_A(\mathbf{x},t),\mathbf{p}] = -i\nabla\varphi_A(\mathbf{x},t), \qquad p_i = \int T_{0i}(\mathbf{x},t)d^3x$$

$$[\varphi_A(\mathbf{x},t),p_0] = i\frac{\partial}{\partial t}\varphi_A(\mathbf{x},t), \qquad p_0 = \int T_{00}(\mathbf{x},t)d^3x \qquad (10.69)$$

$\mathbf{p}$ 和 p_0 是与时间无关的动量和能量。可以同样看到，能量、动量 p_μ 和能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 有相同的反常量纲：

$$\gamma_T = 0 \quad (Z_T = 1) \qquad (10.70)$$

自（10.69）还看到，p_μ 的正常量纲为 1，$T_{\mu\nu}$ 的正常量纲为 4。

部分守恒流的反常量纲 γ_J'

设有部分守恒流 J'，它总是满足如下方程：

$$\frac{\partial J_\mu'}{\partial x_\mu} = 质量乘上某种场函数$$

例如：
$$\frac{\partial J'_\mu}{\partial x_\mu} = m\bar{\psi}\Gamma\psi(\text{量纲为}4),$$
J'_μ 是矢量流时，$\Gamma = 1$；
J'_μ 是膺矢流时，$\Gamma = \gamma_5$。 (10.71)

由于我们取的是质量无关的重正化（质量也当作耦合常数来处理，例如最小重正化的 Z 就是质量无关的），所以所有的质量都不进入 Z，从而所有的 γ 都与质量（例如 (10.71) 的 m）无关。也就是 γ'_J 应该和没有质量（$m=0$）时的 γ_J 一样，所以
$$\gamma'_J = 0 \tag{10.72}$$

§10-6 重正化参量 β，γ 的计算（单圈近似）

计算 Z_3 有关的图是：

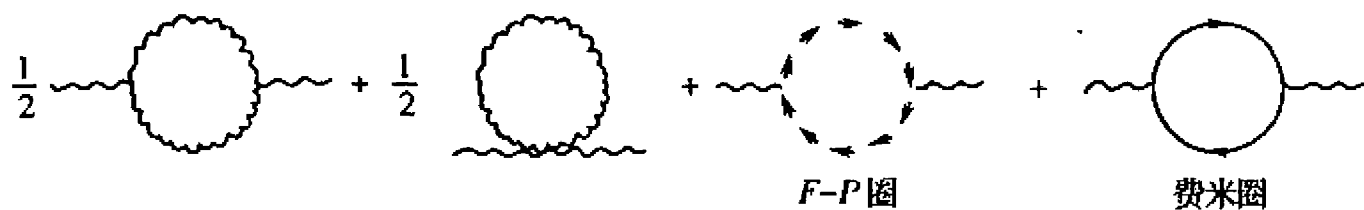


图 10.13

第一个图的$\frac{1}{2}$是这样来的：因为我们用的是第五章所写的费曼规则，对应的图是：

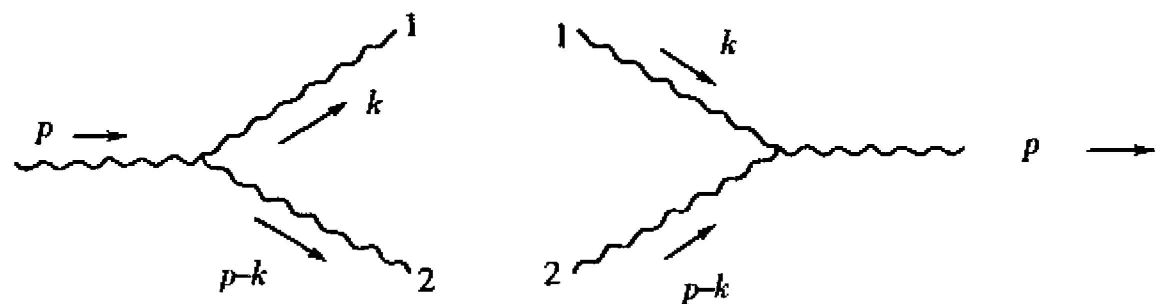


图 10.14

按照这个规则，图 10.14 中的 1，2 是作为两个不同的粒子（动量以及其他指标不同）来对待的。对 1 的各种状态（动量及其他指标）及对 2 的各种状态分别求和之后，同一组中间态会在求和中出现两次（1 和 2 交换动量和其他指标，仍是原来的中间态）。但根据规则，每一组中间态在求和中只能出现一次，所以 1，2 分别求和后应该再乘以$\frac{1}{2}$。

第二个图也有类似的问题，因为动量积分和指标的求和包括了顺时针（左侧放出，右侧吸收）和逆时针（右侧放出，左侧吸收）两种情况，但事实上应该是只取一次放出和吸收，不区分顺时针和逆时针，所以求和后也应该乘以$\frac{1}{2}$。

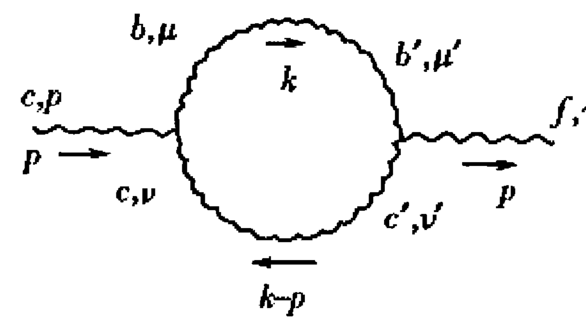


图 10.15

以下的计算只是为了说明计算方法，所以，为了简便，我们可取费曼规范（$\xi=1$）。图 10.15 的贡献是：

$$g^2 f_{abc}\left[(-p-k)_\nu\delta_{\rho\nu}+(k+k-p)_\rho\delta_{\mu\nu}+(-k+2p)_\mu\delta_{\nu\rho}\right]$$
$$\times(-i)^2\delta_{bb'}\delta_{cc'}\frac{\delta_{\mu\mu'}}{k^2}\frac{\delta_{\nu\nu'}}{(k-p)^2}$$
$$\times f_{fb'c'}\left[(p+k)_{\nu'}\delta_{\tau\mu'}+(-2k+p)_\tau\delta_{\mu'\nu'}+(k-2p)_{\mu'}\delta_{\nu'\tau}\right]$$
$$=g^2\frac{f_{ebc}f_{fbc}}{k^2(k-p)^2}\left[(5p^2-2k\cdot p+2k^2)\delta_{\rho\tau}+10k_\rho k_\tau-2p_\rho p_\tau-5p_\rho k_\tau-5k_\rho p_\tau\right]$$
$$=g^2\frac{\delta_{ef}c_2(G)}{k^2(k-p)^2}\left[(5p^2-2k\cdot p+2k^2)\delta_{\rho\tau}+10k_\rho k_\tau-2p_\rho p_\tau-5p_\rho k_\tau-5k_\rho p_\tau\right]$$
$$(10.73)_1$$

此地采用了如下定义：

$$f_{ebc}f_{fbc}=\delta_{ef}C_2(G)\qquad G\text{代表规范群}\qquad(10.74)_1$$

另外有用的定义还有：

$$\left.\begin{aligned}\sum_{a,k}T^a_{ik}T^a_{kj}&=\delta_{ij}C_2(R)\\ Tr(T^eT^f)&=T^e_{ij}T^f_{ji}=\delta_{ef}T(R)\end{aligned}\right\}\quad R\text{代表群表示}\qquad(10.74)_2$$

图 10.16 的贡献是：

$$-ig^2\left[f_{efk}f_{cdk}(\delta_{\rho\nu}\delta_{\tau\sigma}-\delta_{\rho\sigma}\delta_{\tau\nu})+f_{eck}f_{dfk}(\delta_{\rho\sigma}\delta_{\tau\nu}-\delta_{\rho\tau}\delta_{\sigma\nu})+f_{edk}f_{fck}(\delta_{\rho\tau}\delta_{\sigma\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\tau\sigma})\right]\frac{-i\delta_{dc}\delta_{\sigma\nu}}{k^2}$$
$$=-g^2\left[-f_{eck}f_{fck}(\delta_{\rho\tau}-4\delta_{\rho\tau})+f_{eck}f_{fck}(4\delta_{\rho\tau}-\delta_{\rho\tau})\right]\frac{1}{k^2}=-6g^2f_{eck}f_{fck}\frac{\delta_{\rho\tau}}{k^2}$$
$$=-g^2\delta_{ef}\delta_{\rho\tau}C_2(G)\frac{(6k^2-12pk+6p^2)}{k^2(k-p)^2}\text{①}\qquad(10.73)_2$$

图 10.17 的贡献是：

$$(-)g^2f_{bec}k_\rho f_{c'fb'}(k-p)_\tau\frac{(-i)(-i)}{k^2(k-p)^2}\delta_{bb'}\delta_{cc'}$$
$$=-g^2f_{ebc}f_{fbc}(k_\rho k_\tau-k_\rho p_\tau)\frac{1}{k^2(k-p)^2}$$
$$=-g^2\delta_{ef}c_2(G)\frac{k_\rho k_\tau-k_\rho p_\tau}{k^2(k-p)^2}\qquad(10.75)$$

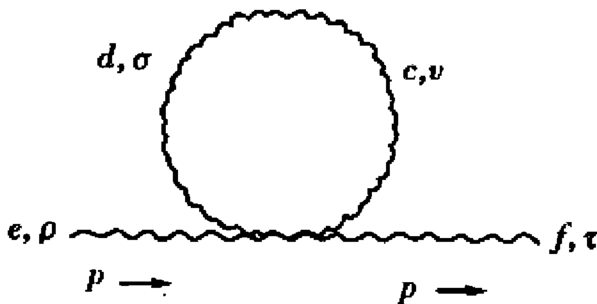


图 10.16

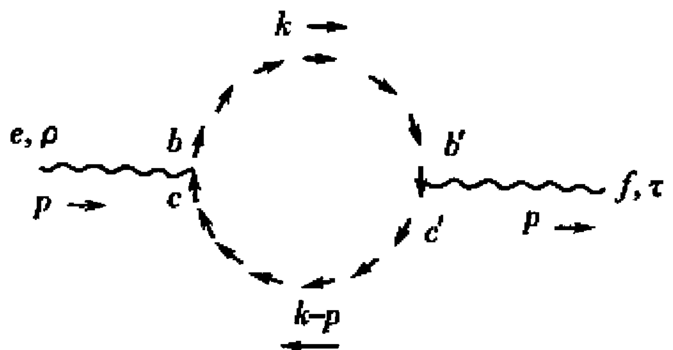


图 10.17

① (10.74) 式积分后发散项贡献为零。

图 10.18 的贡献是：

$$(-)g^2\frac{[\gamma_\rho\hat{k}\gamma_\tau(\hat{k}-\hat{p})]Tr(T^eT^f)}{k^2(k-p)^2}$$

$$=-g^2\frac{4[2k_\rho k_\tau-k_\rho p_\tau-p_\rho k_\tau-\delta_{\rho\tau}(k^2-k\cdot p)]T(R)\delta_{ef}}{k^2(k-p)^2} \tag{10.76}$$

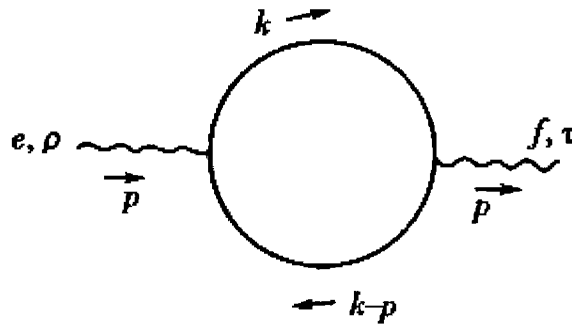


图 10.18

求和并积分：

$$\frac{1}{2}\quad+\frac{1}{2}\quad+\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int g^2\delta_{ef}C_2(G)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\cdot\frac{1}{k^2(k-p)^2}\left[\left(-\frac{1}{2}p^2-5k_p-2k^2\right)\delta_{\rho\tau}+4k_\rho k_\tau-p_\rho p_\tau-\frac{3}{2}k_\rho p_\tau-\frac{5}{2}p_\rho k_\tau\right]$$

把积分从 4 维扩充到 n 维：

$$\int\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^4}\frac{\left(-\frac{1}{2}p^2+5k_p-2k^2\right)\delta_{\rho\tau}+4k_\rho k_\tau-p_\rho p_\tau-\frac{3}{2}k_\rho p_\tau-\frac{5}{2}p_\rho k_\tau}{k^2(k-p)^2}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}^nk}{(2\pi)^4}\frac{\left(-\frac{1}{2}p^2+5k_p-2k^2\right)\delta_{\rho\tau}+4k_\rho k_\tau-p_\rho p_\tau-\frac{3}{2}k_\rho p_\tau-\frac{5}{2}p_\rho k_\tau}{(k^2-2k_px+p^2x)^2}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\frac{1}{16\pi^4}\cdot\frac{i\pi^2}{\Gamma(2)}\cdot\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(p^2x(1-x))^{2-\frac{n}{2}}}\left[-\frac{1}{2}p^2\delta_{\rho\tau}+5p^2x\delta_{\rho\tau}\right.$$

$$-2p^2x^2\delta_{\rho\tau}-2\cdot\frac{n}{2}\frac{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}p^2x(1-x)\delta_{\rho\tau}+4p_\rho p_\tau x^2$$

$$\left.+2\delta_{\rho\tau}\frac{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}p^2x(1-x)-p_\rho p_\tau-\frac{3}{2}p_\rho p_\tau x-\frac{5}{2}p_\rho p_\tau x\right]$$

$$\left(n\to4\text{ 时},\frac{\Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}\to-1\right)$$

取出发散部分

$$\Rightarrow \frac{1}{16\pi^4} i\pi^2 \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\left[-\frac{1}{2}p^2\delta_{\rho\tau}+\frac{5}{2}p^2\delta_{\rho\tau}-\frac{2}{3}p^2\delta_{\rho\tau}+2\delta_{\rho\tau}p^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{4}{3}p_\rho p_\tau - p_\rho p_\tau - 2p_\rho p_\tau\right]$$

$$=\frac{i}{16\pi^2}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\cdot\frac{5}{3}\ (p^2\delta_{\rho\tau}-p_\rho p_\tau)$$

取出极点项

$$\Rightarrow \frac{i}{16\pi^2}\cdot\frac{2}{4-n}\cdot\frac{5}{3}(p^2\delta_{\rho\tau}-p_\rho p_\tau) \tag{10.77}$$

费米圈贡献的（10.76）的积分，可利用（6.14）的结果，其中取 $k\to -k$，$m\to 0$：

$$\int_0^1 dx \frac{d^n k}{(2\pi)^4}\frac{(2k_\rho k_\tau - k_\rho p_\tau - p_\rho k_\tau - \delta_{\rho\tau}(k^2-k\cdot p))}{(k^2-2k\cdot px+p^2x)^2}$$

$$=\int_0^1 dx \frac{1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{(p^2x(1-x))^{2-\frac{n}{2}}}\cdot(p_\sigma p_\tau-\delta_{\sigma\tau}p^2)2x(x-1)$$

取出发散部分的极点项

$$\Rightarrow \frac{i}{16\pi^2}\cdot\frac{2}{4-n}\cdot\frac{1}{3}(p^2\delta_{\rho\tau}-p_\rho p_\tau) \tag{10.78}$$

四个图合在一起，极点项之和是：

$$-\frac{i}{16\pi^2}\cdot\frac{g^2\delta_{ef}}{n-4}\left(\frac{10}{3}C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)\right)(P^2\delta_{\rho\tau}-p_\rho p_\tau) \tag{10.79}$$

$i\Delta\mathscr{L}_I$ 提供的是

$$-i(Z_3-1)\frac{1}{2}(\delta_{\sigma\tau}p^2-p_\sigma p_\tau)\delta_{ef}\times 2 \tag{10.80}$$

（参考（5.66）。乘 2 是因为有两种连接法。关于 $\delta_{\sigma\tau}p^2-p_\rho p_\tau$ 的 ± 号的选取是考虑了一个 A 是 p 进入 x，一个 A 是 p 离开 x，从而（$-ip$）（ip）$=p^2$，（$-ip_\rho$）（ip_τ）$=p_\rho p_\tau$）。所以要求（Z_3-1）与

$$\frac{1}{16\pi^2}\cdot\frac{g^2}{n-4}\left(\frac{10}{3}C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)\right)$$

抵消，从而

$$Z_3=1-\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left(\frac{10}{3}C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)\right) \tag{10.81}$$

如果取任意的规范参数 $a=1/\xi$，则（10.81）应写成：

$$Z_3=1-\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left(\left(\frac{13}{3}-a\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)\right) \tag{10.81'}$$

计算 Z_1 有关的图是：

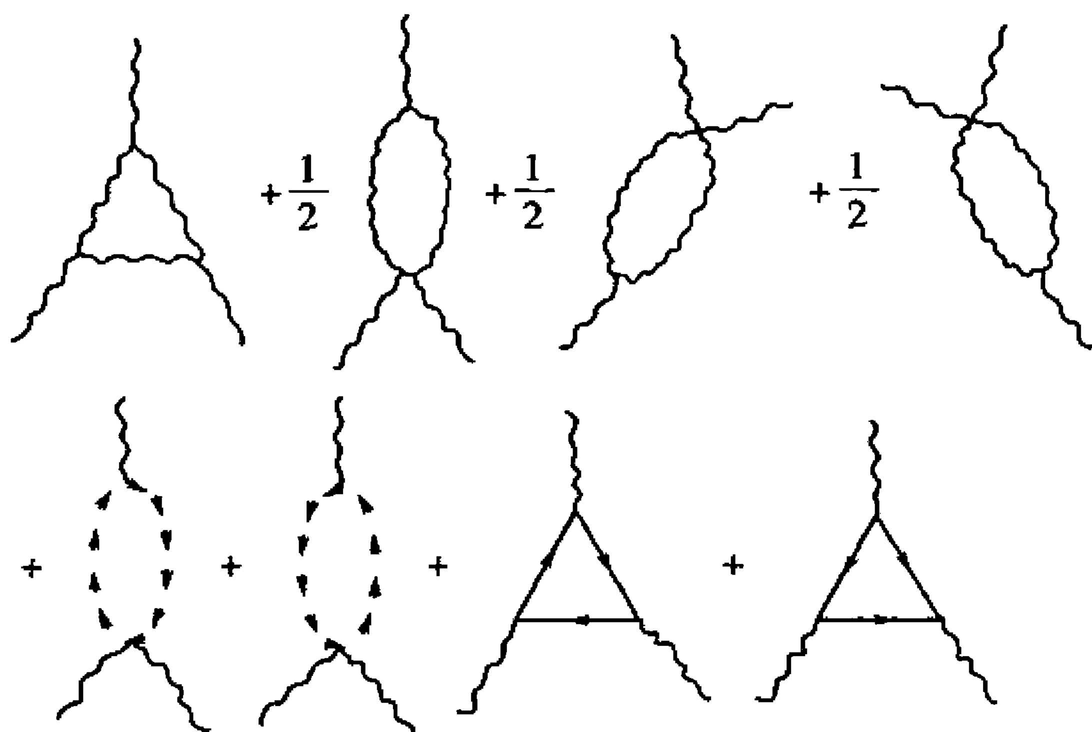


图 10.19

这里$\frac{1}{2}$的来源和前面相仿，也是因为有一对作用点连接着两条虚的玻色子线，动量积分和指标求和时，也出现了重复。

也取 $a=1/\xi=1$，计算中为了方便，我们取非物理的对称的外动量如下：

$$
\begin{aligned}
p &= (\mu, -\mu, 0, 0) \quad (1, -1, 0, 0) \\
q &= (0, \mu, -\mu, 0) \quad (0, 1, -1, 0) \\
r &= (-\mu, 0, \mu, 0) \quad (-1, 0, 1, 0)
\end{aligned}
$$

$$
p^2 = q^2 = r^2 = 2\mu^2, \quad p+q+r=0, \quad p\cdot q = q\cdot r = r\cdot p = -\mu^2 \tag{10.82}
$$

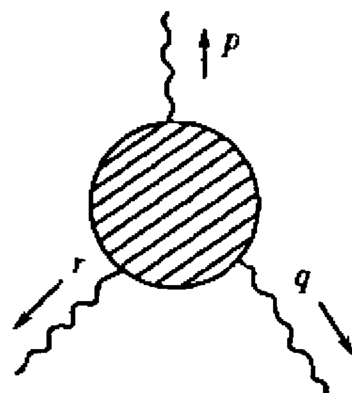


图 10.20

取别种非物理的（或物理的）外动量，只要保证能量动量守恒，例如

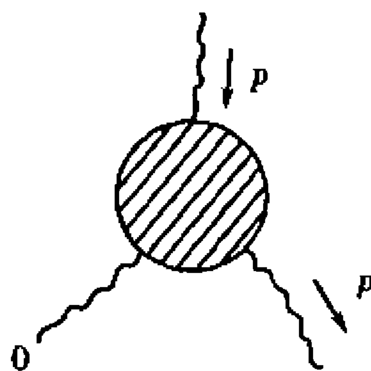


图 10.21

等等，仍会得到相同的 Z_3，因为 Z_3 与所取外动量值无关。

图 10.22 的贡献是：

$$g^3 f_{ade}\left[(p+p-k)_\rho\delta_{\lambda\sigma}+(2k-p)_\lambda\delta_{\sigma\rho}+(-k-p)_\sigma\delta_{\rho\lambda}\right]\cdot f_{bfd}\left[(q-r-k)_\sigma\delta_{\mu\tau}+(r-p+2k)_\mu\delta_{\tau\sigma}+(-k+p-q)_\tau\delta_{\sigma\mu}\right]\cdot f_{cef}\left[(r-k)_\tau\delta_{\nu\rho}+(k+k+r)_\nu\delta_{\rho\tau}+(-k-2r)_\rho\delta_{\tau\nu}\right]\cdot\frac{-i}{k^2}\cdot\frac{-i}{(k-p)^2}\cdot\frac{-i}{(k+r)^2}$$

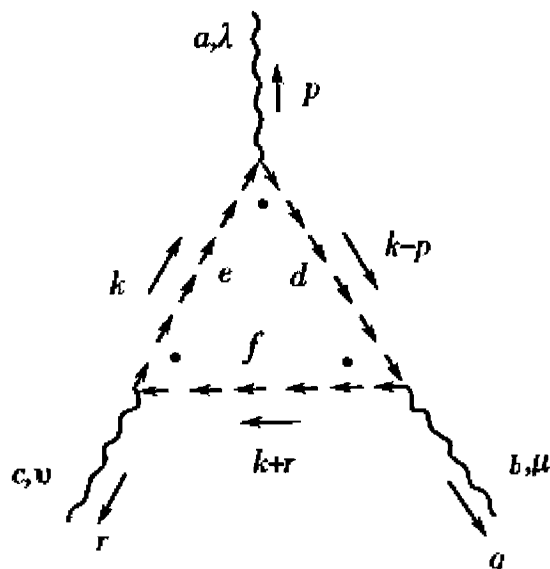


图 10.22

只写发散项，此地只写 k 的二次，三次项（k 一次项不发散）：

$$\Rightarrow -ig^3\frac{C(G)}{2}f_{abc}\left[18k_\lambda k_\mu k_\nu-9p_\lambda k_\mu k_\nu+9k_\lambda\gamma_\mu k_\nu-9k_\lambda p_\mu k_\nu+9k_\lambda k_\mu\gamma_\nu+\delta_{\lambda\mu}(2k_\nu k^2+2k_\nu k\cdot r+3p_\nu k^2-q_\nu k^2+2r_\nu k^2)+\delta_{\mu\nu}(2k_\lambda k^2-2k_\lambda k\cdot r-3r_\lambda k^2+q_\lambda k^2-2p_\lambda k^2)+\delta_{\nu\lambda}(2k_\mu k^2-2k_\mu k\cdot(p-r)-3p_\mu k^2+3r_\mu k^2)\right]\cdot\frac{1}{k^2(k-p)^2(k+r)^2}\tag{10.83}$$

此地利用了关系式

$$f_{ada}f_{bfd}f_{cef}=-\frac{1}{2}C_2(G)f_{abc}\tag{10.84}$$

证明：Jacobi 恒等式是

$$f_{iaf}f_{fbc}+f_{ibf}f_{fca}+f_{icf}f_{fab}=0$$

所以
$$f_{ada}f_{bfd}f_{cef}=-f_{ada}f_{bdf}f_{fce}=f_{ade}(f_{bcf}f_{fed}+f_{bef}f_{fdc})$$
$$=-\delta_{af}C_2(G)f_{fbc}+f_{ada}f_{bef}f_{cfd}$$
$$=-\delta_{af}C_2(G)f_{fbc}-f_{aed}f_{bfe}f_{cdf}$$

$\therefore$ $$2f_{ada}f_{bfd}f_{cef}=-C_2(G)f_{abc}$$ 证毕

图 10.23 的贡献是：

$$-g^3\cdot f_{dea}(k-p)_\lambda\cdot f_{fdb}(k+r)_\mu\cdot f_{efc}k_\nu\cdot\frac{-i}{(k-p)^2}\cdot\frac{-i}{(k+r)^2}\cdot\frac{-i}{k^2}$$
$$=-ig^3f_{ada}f_{bfd}f_{cef}\frac{(k_\lambda k_\mu k_\nu-p_\lambda k_\mu k_\nu+k_\lambda r_\mu k_\nu-p_\lambda r_\mu k_\nu)}{(k-p)^2(k+r)^2k^2}\tag{10 85}$$

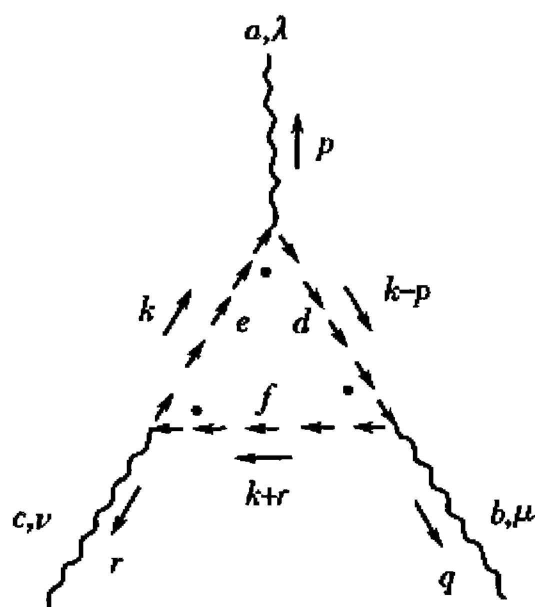


图 10.23

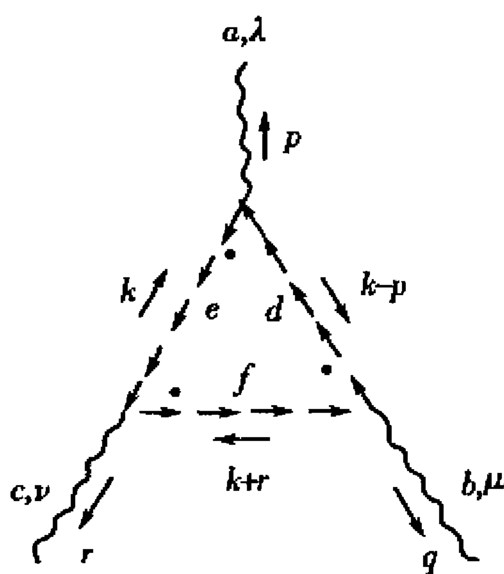


图 10.24

图 10.24 的贡献是：

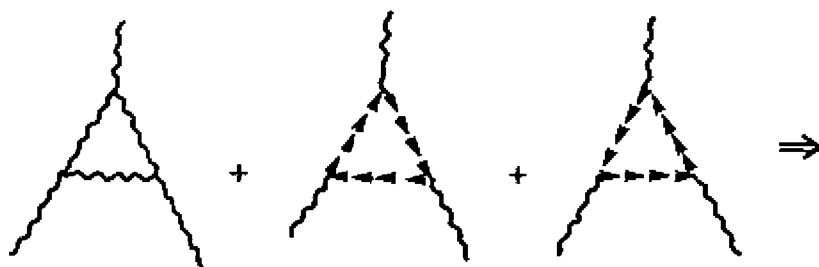
$$-g^3\cdot f_{eda}(-k)_\lambda\cdot f_{dfb}(-k+p)_\mu\cdot f_{fec}(-k-r)_\nu\cdot\frac{-i}{(k-p)^2}\cdot\frac{-i}{(k+r)^2}\cdot\frac{-i}{k^2}$$

$$=-ig^3f_{ade}f_{bfd}f_{cef}\frac{(k_\lambda k_\mu k_\nu-k_\lambda p_\mu k_\nu+k_\lambda k_\mu r_\nu-k_\lambda p_\mu r_\nu)}{(k-p)^2(k+r)^2k^2}\tag{10.86}$$

(10.85) 与 (10.86) 求和：(略去分子上 k 一次项，即不发散项)

$$\Rightarrow\frac{ig^3}{2}f_{abc}C_2(G)\frac{[2k_\lambda k_\mu k_\nu-k_\lambda p_\mu k_\nu+k_\lambda k_\mu r_\nu+k_\lambda r_\mu k_\nu-p_\lambda k_\mu k_\nu]}{(k-p)^2(k+r)^2k^2}\tag{10.87}$$

再与 (10.83) 相加：(也是取发散部分)



$$\Rightarrow-\frac{i}{2}g^3f_{abc}c_2(G)[16k_\lambda k_\mu k_\nu-8p_\lambda k_\mu k_\nu+8k_\lambda r_\mu k_\nu-8k_\lambda p_\mu k_\nu+8k_\lambda k_\mu r_\nu$$
$$+\delta_{\lambda\mu}(2k_\nu k^2+2k_\nu k\cdot r+3p_\nu k^2-q_\nu k^2+2r_\nu k^2)+\delta_{\mu\nu}(2k_\lambda k^2-2k_\lambda k\cdot r-3r_\lambda k^2$$
$$+q_\lambda k^2-2p_\lambda k^2)+\delta_{\nu\lambda}(2k_\mu k^2-2k_\mu k\cdot(p-r)-3p_\mu k^2+3r_\mu k^2)]$$
$$\cdot\frac{1}{k^2(k-p)^2(k+r)^2}\tag{10.88}$$

积分时利用

$$\int\frac{d^nk}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2(k-p)^2(k+r)^2}=\int_0^1dx\int_0^1dy\cdot2y\frac{d^nk}{(2\pi)^4}$$
$$\cdot\frac{1}{[k^2+2(r(1-y)-pxy)\cdot k+p^2xy+r^2(1-y)]^3}\tag{10.89}$$

积分方法如前（用第六章的方法），取出的极点项（考虑到 $p+q+r=0$）是：

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\cdot\frac{-i}{2}g^3f_{abc}C_2(G)\cdot i\pi^{\frac{n}{2}}\frac{1}{4-n}\cdot\frac{19}{6}[(p-q)_\nu\delta_{\lambda\mu}+(q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu}$$

$$+ (r-p)_\mu \delta_{\nu\lambda}] = \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{C_2(G)}{4-n}f_{abc}$$

$$\cdot \frac{19}{6}[(p-q)_\nu \delta_{\lambda\mu} + (q-r)_\lambda \delta_{\mu\nu} + (r-p)_\mu \delta_{\nu\lambda}] \tag{10.90}$$

图 10.25 的贡献是：

$$-ig^3 f_{abe}[(2p-k)_\rho \delta_{\lambda\sigma} + (2k-p)_\lambda \delta_{\sigma\rho} + (-k-p)_\sigma \delta_{\rho\lambda}]$$

$$\cdot \frac{-i}{k^2}\cdot\frac{-i}{(k-p)^2}\cdot [f_{ecf}f_{bdf}(\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\nu})$$

$$+ f_{ebf}f_{dcf}(\delta_{\rho\sigma}\delta_{\mu\nu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\mu\sigma}) + f_{edf}f_{cbf}(\delta_{\rho\nu}\delta_{\mu\sigma} - \delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu})]$$

$$= \frac{3}{2}ig^3 f_{abc}C_2(G)\cdot[3p_\nu\delta_{\lambda\mu} - 3p_\mu\delta_{\nu\lambda}]\frac{1}{k^2(k-p)^2} \tag{10.91}$$

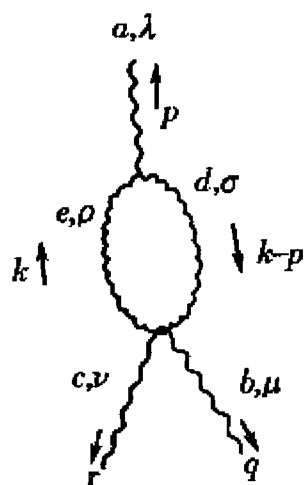


图 10.25

由于对称，可以此类推：

图 10.26 的贡献是：

$$\frac{3}{2}ig^3 f_{cab}C_2\ (G)\ [3r_\mu\delta_{\nu\lambda} - 3r_\lambda\delta_{\mu\nu}]\ \frac{1}{k^2\ (k-r)^2} \tag{10.92}$$

图 10.27 的贡献是：

$$\frac{3}{2}ig^3 f_{bca}C_2\ (G)\ [3q_\lambda\delta_{\mu\nu} - 3q_\nu\delta_{\lambda\mu}]\ \frac{1}{k^2\ (k-q)^2} \tag{10.93}$$

求积分：

$$\int\frac{d^n k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{k^2(k-p)^2} \xrightarrow{\text{取出发散部分}} \frac{1}{(2\pi)^4}\frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(2)}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{取出极点项}} \frac{i}{16\pi^2}\cdot\frac{2}{4-n}$$

同样：

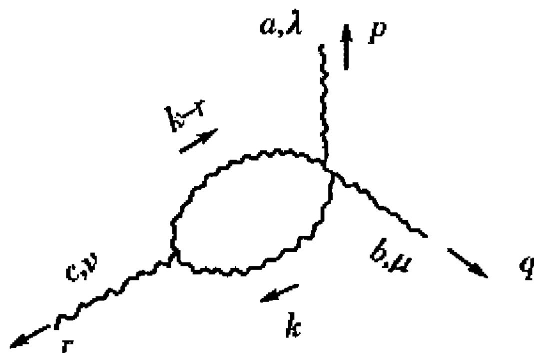


图 10.26

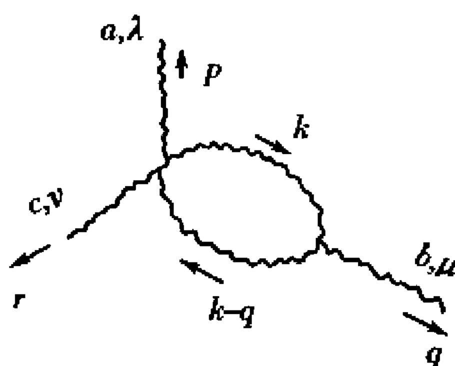


图 10.27

$$\int\frac{d^n k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{k^2(k-r)^2} \xrightarrow{\text{极点项}} \frac{i}{16\pi^2}\cdot\frac{2}{4-n}$$

$$\int\frac{d^n k}{(2\pi)^4}\cdot\frac{1}{k^2(k-q)^2} \xrightarrow{\text{极点项}} \frac{i}{16\pi^2}\cdot\frac{2}{4-n}$$

所以这三个图贡献的极点项之和是

$$\frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{C_2(G)}{4-n}f_{abc}\frac{g}{2}[(p-q)_\nu\delta_{\lambda\mu}+(q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu}+(r-p)_\mu\delta_{\nu\lambda}] \tag{10.94}$$

图 10.28 的贡献是：

$$-g^3T^b_{ji}T^a_{ik}T^c_{kj}(-1)^6\frac{Tr(\gamma_\lambda\hat{k}\gamma_\nu(\hat{k}+\hat{r})\gamma_\mu(\hat{k}-\hat{p}))}{k^2(k+r)^2(k-p)^2}$$

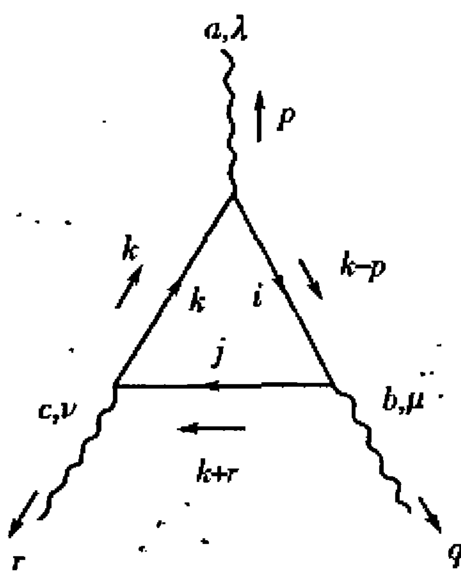


图　10.28

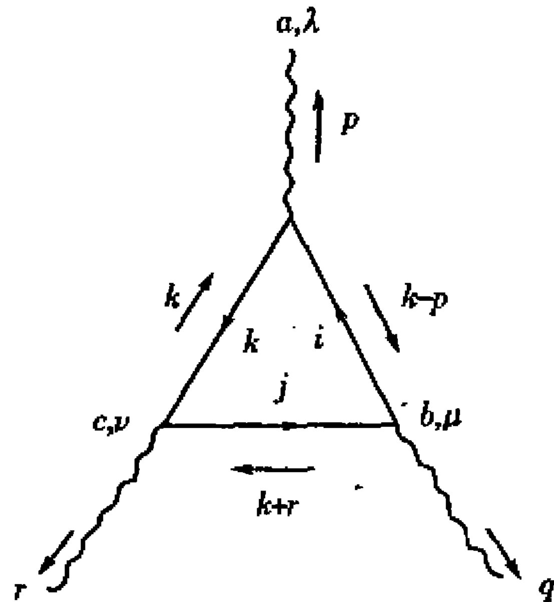


图　10.29

图 10.29 的贡献是：

$$-g^3T^b_{ij}T^c_{jk}T^a_{ki}(-1)^6\frac{Tr(\gamma_\lambda(-\hat{k}+\hat{p})\gamma_\mu(-\hat{k}-\hat{r})\gamma_\nu(-\hat{k}))}{k^2(k+r)^2(k-p)^2} \qquad \text{对应 10.29 图}$$

$$Tr(T^bT^aT^c)=Tr(T^bT^cT^a)+if_{acd}Tr(T^bT^d)=Tr(T^bT^cT^a)+if_{acd}\delta_{bd}T(R)$$

两图相加得：

$$-g^3Tr(T^aT^bT^c)\frac{Tr(\gamma_\lambda\hat{k}\gamma_\nu(\hat{k}+\hat{r})\gamma_\mu(\hat{k}-\hat{p}))+Tr(\gamma_\lambda(-\hat{k}+\hat{r})\gamma_\mu(-\hat{k}-\hat{r})\gamma_\nu(-\hat{k}))}{k^2(k+r)^2(k-p)^2}$$

$$-ig^3f_{acb}T(R)\frac{Tr(\gamma_\lambda\hat{k}\gamma_\nu(\hat{k}+\hat{r})\gamma_\mu(\hat{k}-\hat{p}))}{k^2(k+r)^2(k-p)^2} \tag{10.95}$$

和 Furry 定理一样，插入 CC^{-1}，利用 $C^{-1}\gamma_\mu C=\tilde{\gamma}_\mu$，$C^{-1}\hat{p}C=-\tilde{\hat{p}}$，则（10.95）第一项消去，但第二项≠0（由此看到，在非 Abel 规范，由于 $f_{abc}\neq 0$，Furry 定理不足以排除三条 A 外线的顶角）。再利用

$$\begin{aligned}Tr(\gamma_\lambda\hat{a}\gamma_\mu\hat{b}\gamma_\nu\hat{c}) &= c_\lambda 4(a_\mu b_\nu-(a\cdot b)\delta_{\mu\nu}+a_\nu b_\mu)\\ &\quad -(c\cdot a)4(\delta_{\lambda\mu}b_\nu-b_\lambda\delta_{\mu\nu}+\delta_{\nu\lambda}b_\mu)\\ &\quad +c_\mu 4(a_\lambda b_\nu-b_\lambda a_\nu+\delta_{\lambda\nu}(a\cdot b))\\ &\quad -(c\cdot b)4(\delta_{\mu\nu}a_\lambda-a_\nu\delta_{\lambda\mu}+\delta_{\nu\lambda}a_\mu)\end{aligned}$$

$$+ c_\nu 4(a_\lambda b_\mu - (a\cdot b)\delta_{\lambda\mu} + a_\mu b_\lambda) \tag{10.96}$$

$$(10.95) = -ig^3 f_{acb} T(R) \frac{Tr[\gamma_\lambda \hat{k}\gamma_\nu(\hat{k}+\hat{r})\gamma_\mu(\hat{k}-\hat{p})]}{k^2(k+r)^2(k-p)^2}$$

$$\begin{aligned}
= ig^3 f_{abc} T(R)\cdot 4\cdot [&(k-p)_\lambda(k_\mu(k+r)_\nu - k\cdot(k+r)\delta_{\mu\nu} + (k+r)_\mu k_\nu) \\
&- k\cdot(k-p)(\delta_{\lambda\mu}(k+r)_\nu - (k+r)_\lambda\delta_{\mu\nu} + \delta_{\nu\lambda}(k+r)_\mu) \\
&+ (k-p)_\mu(k_\lambda(k+r)_\nu - k\cdot(k+r)\delta_{\lambda\nu} + (k+r)_\lambda k_\nu) \\
&- (k+r)\cdot(k-p)(k_\lambda\delta_{\mu\nu} + k_\nu\delta_{\mu\lambda} - \delta_{\nu\lambda}k_\mu) \\
&+ (k-p)_\nu(k_\lambda(k+r)_\mu + \delta_{\lambda\mu}k\cdot(k+r) - (k+r)_\lambda k_\mu)] \\
&\cdot\frac{1}{k^2(k+r)^2(k-p)^2}
\end{aligned}$$

取出 k 的二次三次项（发散项）

$$\begin{aligned}
\Rightarrow ig^3 f_{abc} T(R)\cdot 4\cdot [&4k_\lambda k_\mu k_\nu + 2k_\lambda k_\mu r_\nu - 2p_\lambda k_\mu k_\nu + 2k_\lambda(r_\mu - p_\mu)k_\nu \\
&+ \delta_{\mu\nu}(-k^2 k_\lambda - 2k_\lambda(r\cdot k) + (p_\lambda + r_\lambda)k^2) \\
&+ \delta_{\nu\lambda}(-k^2 k_\mu + (p_\mu - r_\mu)k^2) \\
&+ \delta_{\lambda\mu}(-k^2 k_\nu + 2k_\nu(k\cdot p) - (p_\nu + r_\nu)k^2)] \\
&\cdot\frac{1}{k^2(k+r)^2(k-p)^2}
\end{aligned}$$

乘$\frac{d^n k}{(2\pi)^4}$积分，取出极点项（也注意到 $p+q+r=0$）：

$$\Rightarrow \frac{g^3}{16\pi^2} f_{abc}\frac{T(R)}{4-n}\cdot\frac{8}{3}[(p-q)_\nu\delta_{\lambda\mu} + (q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu} + (r-p)_\mu\delta_{\nu\lambda}] \tag{10.97}$$

(10.90) + (10.94) + (10.97)，得到

$$\frac{g^3}{16\pi^2} f_{abc}\frac{1}{n-4}\left(\frac{4}{3}C(G) - \frac{8}{3}T(R)\right)$$
$$\cdot[(p-q)_\nu\delta_{\lambda\mu} + (q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu} + (r-p)_\mu\delta_{\nu\lambda}] \tag{10.98}$$

$i\Delta\mathscr{L}_I$ 中的 (Z_1-1) 项提供的是

$$(Z_1-1)gf_{abc}\cdot[(p-q)_\nu\delta_{\lambda\mu} + (q-r)_\lambda\delta_{\mu\nu} + (r-p)_\mu\delta_{\nu\lambda}]$$

它要与 (10.98) 相消，所以

$$Z_1 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left(\frac{4}{3}C_2(G) - \frac{8}{3}T(R)\right) \tag{10.99}$$

如果是取任意的 a，则 (10.99) 应写成

$$Z_1 = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left(\left(\frac{17}{6} - \frac{3}{2}a\right)C_2(G) - \frac{8}{3}T(R)\right) \tag{10.100}$$

γ 和 β

$$Z_g = \frac{Z_1}{Z_3^{3/2}} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left[\left(\frac{17}{6} - \frac{3}{2}a\right)C_2(G) - \frac{8}{3}T(R)\right]$$
$$+ \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\cdot\frac{3}{2}\left[\left(\frac{13}{3} - a\right)C_2(G) - \frac{8}{3}T(R)\right]$$

$$= 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}T(R)\right] \tag{10.101}$$

可见 Z_g 中确是不含 a。

自（10.34），（10.101），$n=4$ 时有：

$$\beta(g) = -\frac{g^2}{2}\frac{\partial}{\partial g}Z_g^1 = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}T(R)\right] \tag{10.102}$$

若包括双圈贡献，则 β（g）要再加一项

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}T(R)\right]$$

$$-\frac{g^5}{(16\pi^2)^2}\left[\frac{34}{3}C_2^2(G) - \frac{20}{3}C_2(G)T(R) - 4C_2(R)T(R)\right] \tag{10.102'}$$

自（10.44），（10.81′），$n=4$ 时：

$$\gamma(g,a) = \frac{g}{4}\frac{\partial z_3^1}{\partial g} = -\frac{g^2}{16\pi^2}\left[\left(\frac{13}{6} - \frac{a}{2}\right)C_2(G) - \frac{4}{3}T(R)\right] \tag{10.103}$$

可见 γ（g，a）中确是含有 a。

a（t）的渐近行为

自（10.15），（10.103），

$$\frac{\partial a(t)}{\partial t} = \delta(g,a) = -2a(t)\gamma(g,a)$$

$$-\frac{g^2}{16\pi^2}\cdot a\cdot\left[\left(\frac{13}{3} - a\right)C_2(G) - \frac{8}{3}T(R)\right] \tag{10.104}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right) = \frac{g^2}{16\pi^2}\left[\left(\frac{13}{3} - 2a\right)C_2(G) - \frac{8}{3}T(R)\right]$$

$\frac{\partial a}{\partial t}$有两个零点：

一个在 $a=0$

一个在 $a=\bar{a}=\frac{1}{C_2(G)}\left(\frac{13}{3}C_2(G) - \frac{8}{3}T(R)\right)$

a 在 0，$\bar{a}$ 之间时，$\frac{\partial a(t)}{\partial t}>0$

当$\frac{13}{3}C_2(G) - \frac{8}{3}T(G) > 0$　　（见图 10.30 图）

$a=\bar{a}$ 时有紫外定点

$a=0$ 时有红外定点

（类似于 § 10－3 定点一节的讨论）

当$\frac{13}{2}C_2(G) - \frac{8}{3}T(G) < 0$　　（见图 10.31 图）

$a=\bar{a}$ 时有红外定点

$a=0$ 时有紫外定点

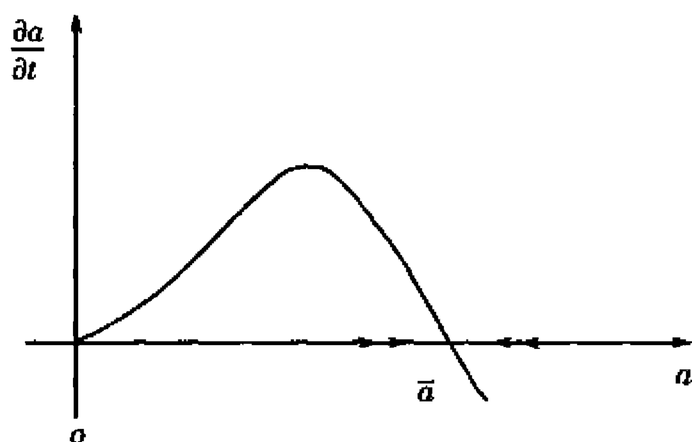


图 10.30

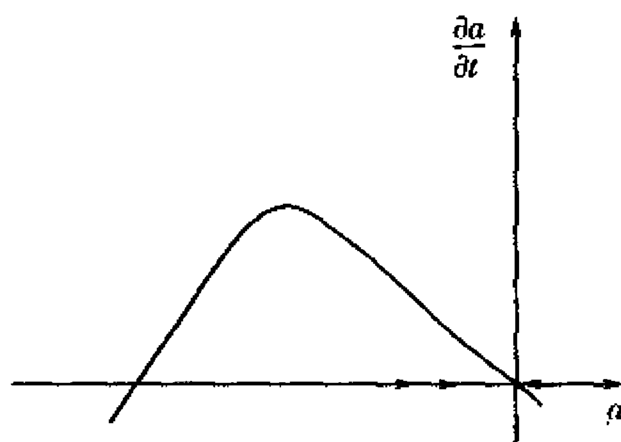


图 10.31

讨论：

1. 若取 $a=\bar{a}$，则重正化群方程中 $\gamma=0$，$\delta=0$，于是（10.16）简化成为

$$\left(\mu\frac{\mu}{\partial\mu}+\beta(g)\left.\frac{\partial}{\partial g}\right|_{gc}+\gamma_m(g)m\left.\frac{\partial}{\partial m}\right|_{gc}\right)$$
$$\cdot G(p_1\cdots,p_N;q;\mu;m;\bar{a})=0 \tag{10.105}$$

最小重正化，$\beta=\beta(g)$，$\gamma_m=\gamma_m(g)$

2. 色规范群是 $SU(3)$ 群，当 G 为 $SU(3)$ 时，$C_2(G)=3$，又 $T^i=\frac{1}{2}\lambda^i$，

$Tr(T^iT^j)=\frac{1}{4}Tr(\lambda^i\lambda^j)=\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\delta^{ij}=T(R)\,\delta^{ij}$

$$\therefore \qquad T(R)=\frac{1}{2}$$

$\left(\text{一般 } SU(N) \text{ 的表示都有 } T(R)=\frac{1}{2}\right)$。但这个 $T(R)$ 是一套带色层子的 $T(R)$。如果有 6 套带色层子（d，u，s，c，b，t），则式中 $T(R)=6\cdot\frac{1}{2}$；如果有 M 套带色层子，则式中 $T(R)=\frac{M}{2}$。所以：

$a=0$ 是紫外定点时（$\bar{a}<0$）：

$$\frac{13}{3}\cdot 3-\frac{8}{3}\cdot\frac{M}{2}<0\rightarrow M>\frac{6\times 13}{8}=9.75$$

$a=\bar{a}$ 是紫外定点时（$\bar{a}>0$）：

$$\frac{13}{3}\cdot 3-\frac{8}{3}\cdot\frac{M}{2}>0\rightarrow M<\frac{6\times 13}{8}=9.75$$

§10－7　另一途径求 β（g），费米场对渐近自由的影响

在第八章已经一般地证明：

$$g_0=\frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3\tilde{Z}_3^{1/2}}g=\frac{Z_1^F}{Z_2^FZ_3^{1/2}}g=\frac{Z_1}{Z_3Z_3^{1/2}}g \tag{10.106}$$

即使对于 AAA，$A\bar{\psi}\psi$，$\bar{u}Au$ 顶点，可以统一地使用

$$g_0 = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3 \tilde{Z}_3^{1/2}} g$$

于是，为了检验上一节的结果，可以用

$$g_0 = \frac{Z_1^F}{Z_2^F Z_3^{1/2}} g$$

来求 Z_g 和 β（g）。（仍用 $a=1$ 规范）

计算 Z_2^F

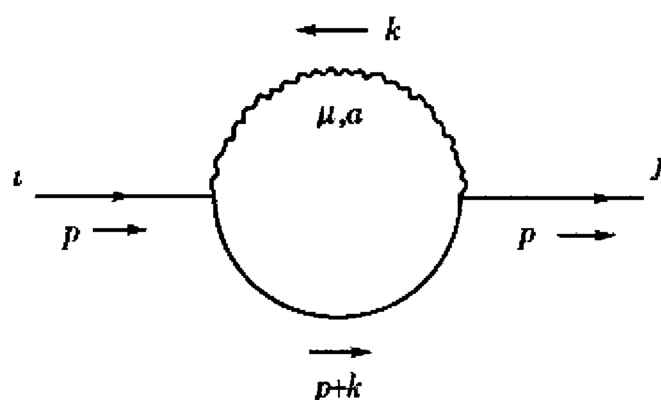


图　10.32

$$g^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{(-\gamma_\mu)(-)(\hat{p}+\hat{k})(-\gamma_\mu)}{(p+k)^2} \cdot \left(\frac{-i}{k^2}\right) T_{jk}^a T_{ki}^a$$

和(10.55)的计算完全一样,得到

$$Z_2^F = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{n-4} \cdot 2C_2(R) \tag{10.107}$$

计算 Z_1^F

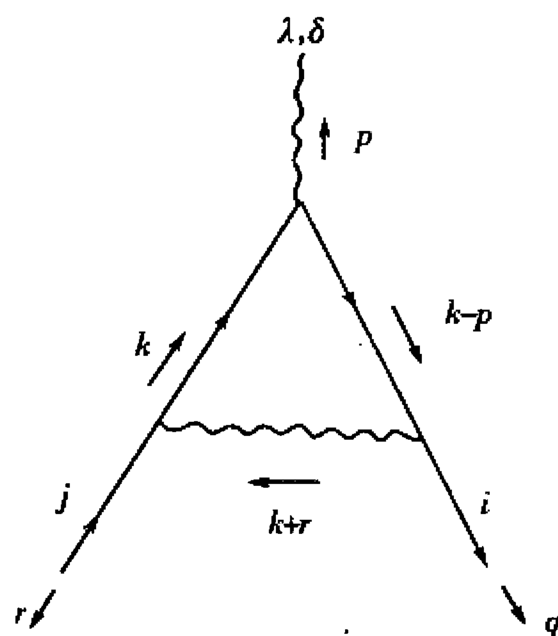


图　10.33

$$g^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{(-\gamma_\alpha)(-\hat{k}+\hat{p})(-\gamma_\delta)(-\hat{k})(-\gamma_\alpha)}{(k-p)^2 k^2} \cdot \frac{-i}{(k+r)^2} \cdot T_{ik}^a T_{kl}^\lambda T_{lj}^a$$

只取发散项，不计 $\hat{p}$ 项，和（10.52）的计算相仿，得到极点项：

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{g^3}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{n-4} \cdot 2T_{ik}^a T_{kl}^\lambda T_{lj}^a \gamma_\delta \\ &= \frac{g^3}{16\pi^2} \cdot \frac{1}{n-4} 2\left(C_2(R) - \frac{1}{2}C_2(G)\right) T_{ij}^\lambda \gamma_\delta \end{aligned} \tag{10.108}$$

此地利用了

$$T_{ik}^a T_{kl}^\lambda T_{lj}^a = C_2(R) T_{ij}^\lambda - \frac{1}{2} C_2(G) T_{ij}^\lambda \tag{10.109}$$

证明：

$$T^aT^\lambda T^a = T^aT^aT^\lambda + if_{\lambda ad}T^aT^d$$

$$T^aT^\lambda T^a = T^\lambda T^aT^a + if_{a\lambda d}T^dT^a$$

$$\therefore \quad 2T^aT^\lambda T^a = T^aT^aT^\lambda + T^\lambda T^aT^a + if_{\lambda ad}(T^aT^d - T^dT^a)$$

$$= T^aT^aT^\lambda + T^\lambda T^aT^a + if_{\lambda ad}if_{adf}T^f$$

$$\therefore \quad T^a_{ik}T^\lambda_{kl}T^a_{lj} = \frac{1}{2}(\delta_{il}C_2(R)T^\lambda_{lj} + T^\lambda_{ik}\delta_{kj}C_2(R) - \delta_{\lambda f}C_2(G)T^f_{ij})$$

$$= C_2(R)T^\lambda_{ij} - \frac{1}{2}C_2(G)T^\lambda_{ij}$$

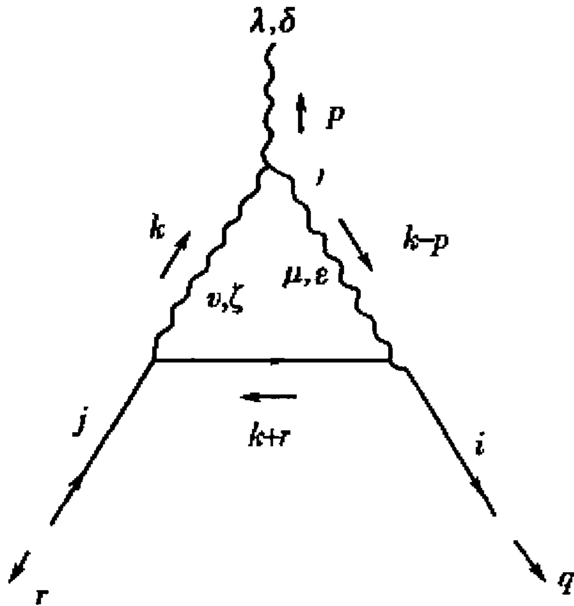


图 10.34

此地比量子电动力学还多了一个图如下：

$$g\cdot\int f_{\lambda\mu\nu}[(2p-k)_\xi\delta_{\delta\epsilon} + (2k-p)_\delta\delta_{\epsilon\xi} + (-k-p)_\epsilon\delta_{\xi\delta}]\cdot\frac{d^nk}{(2\pi)^4}\cdot\frac{-i}{(k-p)^2}\cdot\frac{-i}{k^2}\cdot\frac{(-\gamma_\epsilon)(\hat{k}+\hat{r})(-\gamma_\xi)}{(k+r)^2}\cdot g^2T^\mu_{ik}T^\nu_{kj}$$

$$= g^3\int\frac{d^nk}{(2\pi)^4}f_{\lambda\mu\nu}[(2p-k)_\xi\delta_{\delta\epsilon} + (2k-p)_\delta\delta_{\epsilon\xi} + (-k-p)_\epsilon\delta_{\xi\delta}]\cdot\frac{(-1)\gamma_\epsilon(\hat{k}+\hat{r})\gamma_\xi}{(k-p)^2k^2(k+r)^2}T^\mu_{ik}T^\nu_{kj}$$

只留下发散项（k 二次以上）：

$$\Rightarrow \frac{g^3}{(2\pi)^4}\int d^nkf_{\lambda\mu\nu}T^\mu_{ik}T^\nu_{kj}\frac{[\gamma_\delta\hat{k}\hat{k} - 2k_\delta\gamma_\epsilon\hat{k}\gamma_\epsilon + \hat{k}\hat{k}\gamma_\delta]}{(k-p)^2k^2(k+r)^2} = \frac{g^3}{(2\pi)^4}\int_0^1dx\int_0^1dy\cdot$$

$$2y\cdot d^nkf_{\lambda\mu\nu}T^\mu_{ik}T^\nu_{kj}\frac{2k^2\gamma_\delta + 4k_\delta\hat{k}}{\{k^2 + 2[r(1-y) - pxy)]\cdot k + p^2xy + r^2(1-y))]^3}$$

取出极点项

$$\Rightarrow \qquad \frac{ig^3}{16\pi^2}f_{\lambda\mu\nu}T^\mu_{ik}T^\nu_{kj}\frac{1}{4-n}6\gamma_\delta$$

$$= -\frac{g^3}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{2}C_2(G)T^\lambda_{ij}\frac{1}{4-n}6\gamma_\delta = \frac{g^3}{16\pi^2}C_2(G)T^\lambda_{ij}\frac{1}{n-4}3\gamma_\delta \qquad (10.110)$$

此地用了关系式

$$f_{\lambda\mu\nu}T^\mu_{ik}T^\nu_{kj} = \frac{i}{2}C_2(G)T^\lambda_{ij} \qquad (10.111)$$

证明

$$f_{\lambda\mu\nu}T^{\mu}_{ik}T^{\nu}_{kj}=\frac{1}{2}f_{\lambda\mu\nu}\left(T^{\mu}_{ik}T^{\nu}_{kj}-T^{\nu}_{ik}T^{\mu}_{kj}\right)=\frac{i}{2}f_{\lambda\mu\nu}f_{\mu\nu\rho}T^{\rho}_{ij}$$

$$=\frac{i}{2}\delta_{\lambda\rho}C_2(G)\ T^{\rho}_{ij}=\frac{i}{2}C_2(G)\ T^{\lambda}_{ij}$$

图 10.33 和图 10.34 的贡献合起来，得到（(10.108) + (10.110)）：

$$\frac{g^3}{16\pi^2}\cdot T^{\lambda}_{ij}\gamma_\delta\frac{1}{n-4}[2c_2(R)+2c_2(G)] \tag{10.112}$$

在 $i\mathscr{L}_I$ 中有 $i\left(Z_1^F-1\right)i\bar{\psi}_i\gamma_\delta T^{\lambda}_{ij}\psi_j A^{\lambda}_{\delta}$，提供了

$$i(Z_1^F-1)i\gamma_\delta T^{\lambda}_{ij}=-(Z_1^F-1)\gamma_\delta T^{\lambda}_{ij}$$

它要与（10.112）抵消，所以要求

$$Z_F'=1+\frac{g^2}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{n-4}[2C_2(R)+2C_2(G)] \tag{10.113}$$

根据（10.107）和（10.113），以及（10.81）：

$$Z_g=\frac{Z_1^F}{Z_2^FZ_3^{1/2}}=\frac{1+\frac{g^2}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{n-4}[2C_2(R)+2C_2(G)]}{\left[1+\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\cdot 2C_2(R)\right]\left[1-\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left(\frac{10}{3}C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)\right)\right]^{1/2}}$$

$$=1+\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left[2C_2(G)+\frac{5}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)\right]$$

$$=1+\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)\right] \tag{10.114}$$

和（10.101）一致（Z_g 不含 a）。另外：

$$\beta(g)=-\frac{g^3}{16\pi^2}\left[\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)\right] \tag{10.115}$$

和（10.102）一致。

费米场对渐近自由的影响

上节已知对于色规范群 $SU(3)$，$C_2(G)=3$，$T(R)=\frac{M}{2}$，M 是层子的种类数（味的种类数）。

$$\therefore\qquad \beta(g)=-\frac{g^3}{16\pi^2}\left[11-\frac{2}{3}M\right]$$

若有渐近自由，则 g 为一小正数时，$\beta(g)<0$。因此，渐近自由的条件是

$$11-\frac{2}{3}M>0,\quad M<\frac{33}{2}=16.5 \tag{10.116}$$

又前面已知 $a=0$ 是紫外定点时（见 §10-6），$\bar{a}<0$

$$M>9.75$$

所以，如果 $g=0$，$a=0$ 都是紫外定点，则要求（考虑到 Z_g 和 $\beta(g)$ 都不含 a）

$$16.5>M>9.75 \tag{10.117}$$

§ 10 - 8　Higgs 场与渐近自由

这一节要说明 Higgs 场的存在是不利于渐近自由的。我们取①

$$\mathscr{L}_\varphi = -\varphi^+(\overleftarrow{\partial}_\mu + igA^i_\mu t^i)(\vec{\partial}_\mu - igA^j_\mu t^j)\varphi - \frac{\lambda}{2}(\varphi^+\varphi)^2 \tag{10.118}$$

费曼规则

$\mathscr{L}_{\varphi I}$中的一项：$-g^2\varphi^+_\alpha A^i_\mu t^i_{\alpha\beta} A^j_\mu t^j_{\beta\gamma}\varphi_\gamma$，这一项在 $i\mathscr{L}_{\varphi I}$ 的矩阵之中贡献（见图 10.35）：

$$-ig^2(t^i_{\alpha\beta}t^j_{\beta\gamma} + t^j_{\alpha\beta}t^i_{\beta\gamma}) = -ig^2\{t^i, t^j\}_{\alpha\gamma} \tag{10.119}$$

$\mathscr{L}_{\varphi I}$中的另一项：$i\varphi^+_\alpha\overleftarrow{\partial}_\mu gA^j_\mu t^j_{\alpha\beta}\varphi_\beta - ig\varphi^+_\alpha A^j_\mu t^j_{\alpha\beta}\partial_\mu\varphi_\beta$，这一项在 $i\mathscr{L}_{\varphi I}$的矩阵之中贡献（见图 10.36）：

$$i(i(ip)_\mu gt^j_{\alpha\beta} - i(-iq)_\mu gt^j_{\alpha\beta}) = -igt^j_{\alpha\beta}(p_\mu + q_\mu) \tag{10.120}$$

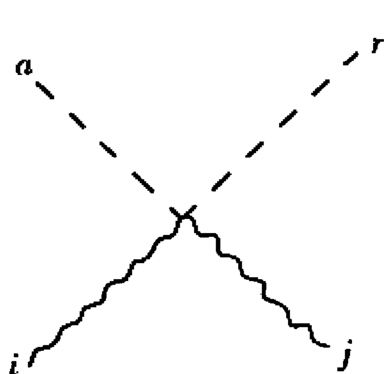


图　10.35

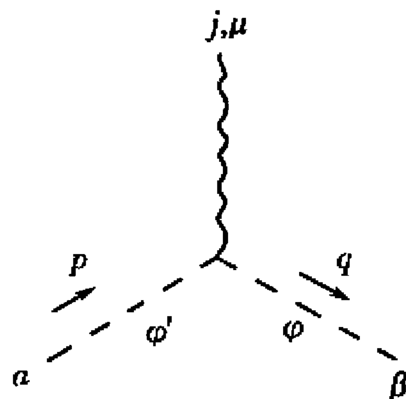


图　10.36

图 10.37 对 Z_3 的贡献：

$$-ig^2Tr(t^it^j + t^jt^i)\delta_{\mu\nu}\frac{-i}{k^2} = -2\frac{g^2}{k^2}T(R')\delta_{ij}\delta_{\mu\nu} \tag{10.121}$$

$$(Tr(t^it^j) = T(R')\delta_{ij})$$

图 10.38 对 Z_3 的贡献：

$$(-i)gt^i_{\alpha\beta}(2k+p)_\mu(-i)gt^j_{\beta\alpha}(2k+p)_\nu\cdot\frac{-i}{(k+p)^2}\cdot\frac{-i}{k^2}$$

$$= g^2T(R')\delta_{ij}\frac{2(k+p)_\mu(2k+p)_\nu}{(k+p)^2k^2} \tag{10.122}$$

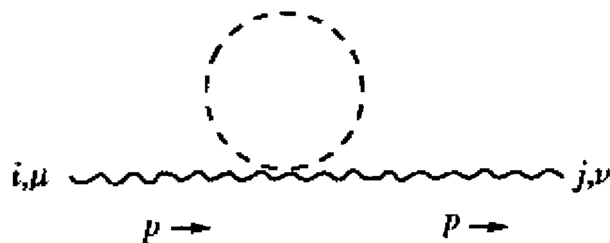


图　10.37

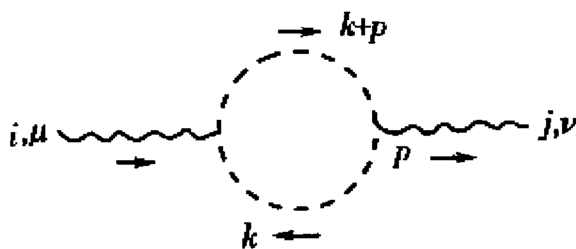


图　10 38

① 前面 § 10 - 2 中曾讨论过，重正化参数 Z 中不含有质量，因此，为了计算的简化，此地 $\mathscr{L}$ 中可以不要 $m^2\varphi^+$ 质量项。

(10.121) + (10.122) 乘上$\frac{d^n k}{(2\pi)^4}$并积分:

$$g^2 T(R')\delta_{ij}\int \frac{d^k k}{(2\pi)^4}\left[\frac{(2k+p)_\mu(2k+p)_\nu}{(k+p)^2k^2}-\frac{2\delta_{\mu\nu}}{k^2}\right]$$

和 (6.10) 的积分一样，直接用其结果，并取出极点项:

$$\Rightarrow g^2 T(R')\delta_{ij}\frac{1}{(2\pi)^4}\cdot i\pi^2\cdot\frac{2}{4-n}(p_\mu p_\nu - p^2\delta_{\mu\nu})\int_0^1(1-2x)^2 dx$$

$$=\frac{ig^2}{16\pi^2}T(R')\delta_{ij}\cdot\frac{2}{n-4}(p^2\delta_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu)\cdot\frac{1}{3} \tag{10.123}$$

与 (10.80) 比较，可见 (Z_3-1) 还要与

$$-\frac{g^2}{16\pi^2}T(R')\cdot\frac{2}{n-4}\cdot\frac{1}{3}$$

抵消，所以 (10.81) 应增加一项，改成

$$Z_3 = 1-\frac{g^2}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{n-4}\left(\frac{10}{2}C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)-\frac{2}{3}T(R')\right) \tag{10.124}$$

若 $a\neq 1$，则 (10.124) 又写成

$$Z_3 = 1-\frac{g^2}{16\pi^2}\cdot\frac{1}{n-4}\left(\left(\frac{13}{3}-a\right)C_2(G)-\frac{8}{3}T(R)-\frac{2}{3}T(R')\right) \tag{10.125}$$

代入

$$Z_g = \frac{Z_1^F}{Z_2^F Z_3^{1/2}}:$$

$$Z_g = 1+\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{1}{n-4}\left(\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)-\frac{1}{3}T(R')\right) \tag{10.126}$$

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)-\frac{1}{3}T(R')\right) \tag{10.127}$$

讨论:

1. 用 $Z_g=\frac{Z_1}{Z_3^{3/2}}$也可得到 (10.126)，但要计算下列各图

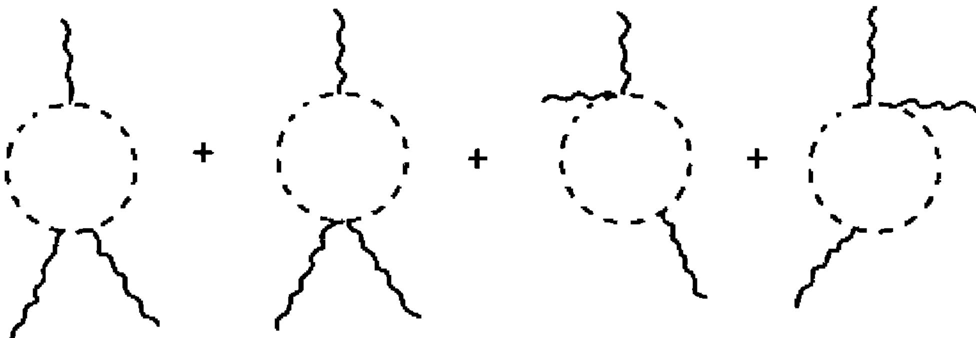


图 10.39

不如用 $Z_g=\frac{Z_1^F}{Z_1^F Z_3^{1/2}}$计算方便

2. Higgs 场要与费米场耦合，在 $\mathscr{L}$ 中组成标量（从而给费米子提供静止质量），所以一般取 Higgs 场的群表示与费米场的群表示相同，$T(R)=T(R')$。在 §10-6 中还提起过，一般 $SU(N)$ 的表示都有 $T(R)=\frac{1}{2}$，但这只是 A 与一套 Higgs 场耦合的情

况。如果 A 与 M 套 Higgs 场耦合，则 $T(R') = \frac{M}{2}$。可见 Higgs 场如果多了，也对 g 的渐近自由不利，甚至完全破坏渐近自由。

λ 的渐近自由

问题不止于 Higgs 场影响了 g 的渐近自由。由于 φ 必定有四次项（有自作用）：

$$\lambda(\varphi^{+}\varphi)^{2}$$

有自耦合常数 λ，所以 λ 也有渐近自由的问题。在一个渐近自由的理论里，必须 g 和 λ 同时有渐近自由性质。

我们考察

$$\lambda_0\frac{Z_4}{Z_\varphi^2}\lambda = Z_\lambda\lambda,\qquad Z_\lambda = \frac{Z_4}{Z_\varphi^2} \tag{10.128}$$

取单圈近似，图 10.40 都是与 Z_4 有关的图：

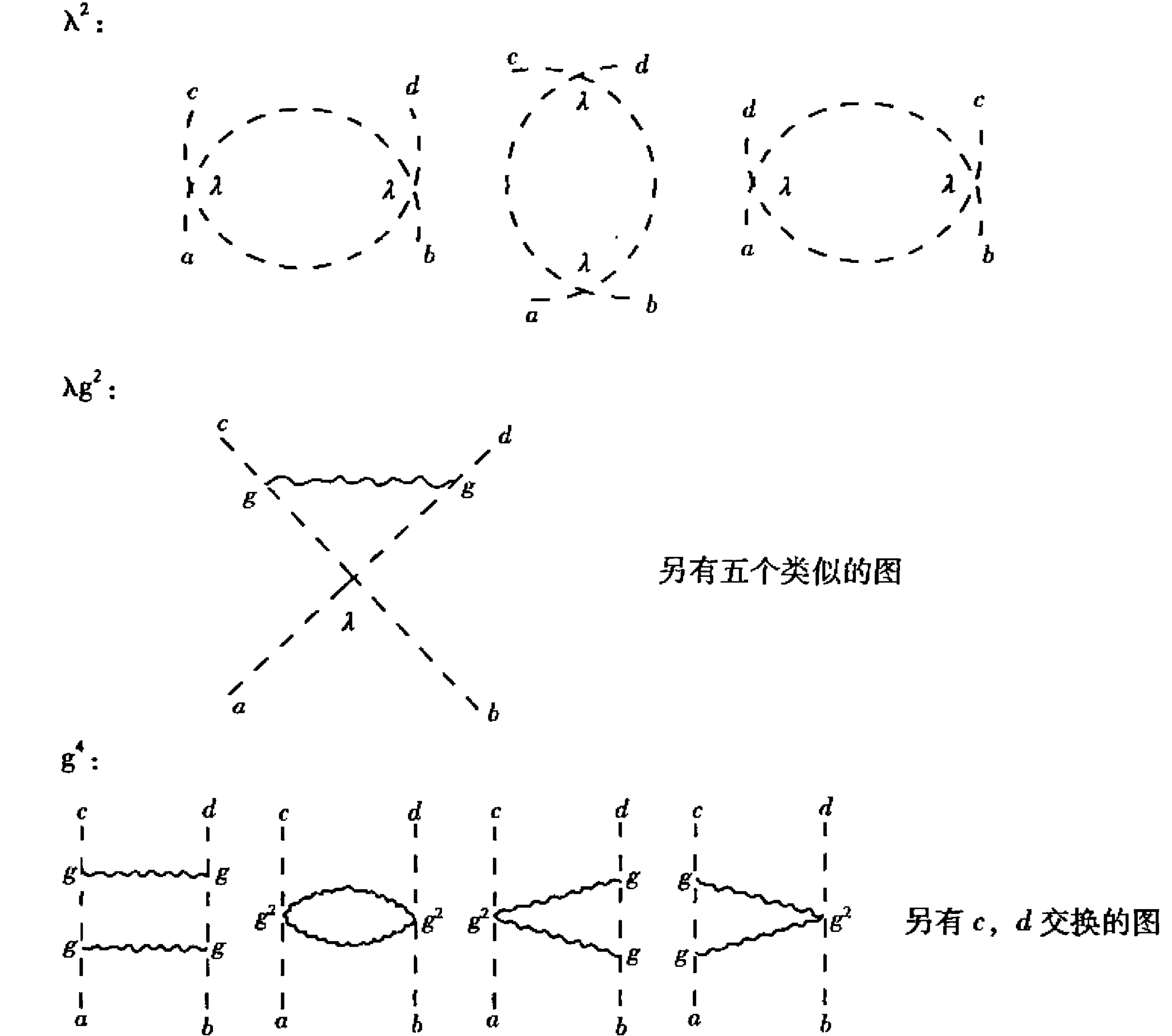


图 10.40

图 10.41 都是与 Z_φ 有关的图：

g^2：



λ：

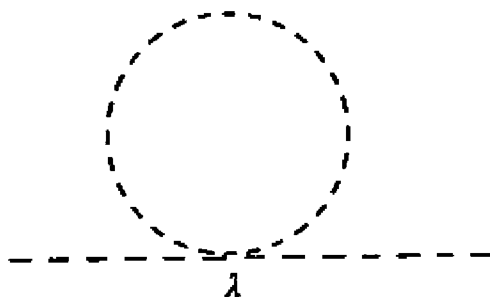


图 10.41

从图中看到，单圈近似下有

$$Z_4 = \left(1 + \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{A\lambda^2 + B\lambda g^2 + Cg^4}{n-4}\right)$$

$$Z_\varphi = \left(1 + \frac{Eg^2 + F\lambda}{n-4}\right)$$

$$\therefore \quad Z_\lambda = \frac{Z_4}{Z_\varphi^2} = \left(1 + \frac{A\lambda + Bg^2 + C\dfrac{g^4}{\lambda}}{n-4} - 2\frac{Eg^2 + F\lambda}{n-4}\right) \tag{10.129}$$

为方便起见，改写成

$$Z_\lambda = \left(\frac{1 - \mathscr{A}\lambda + \mathscr{B}'g^2 + \mathscr{C}\dfrac{g^4}{\lambda}}{n-4}\right) \tag{10.129$'$}$$

为了求 $\beta_\lambda(g, \lambda) = \frac{\partial}{\partial\tau}\lambda = \mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda$，仿前作如下分析。取最小重正化：

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= \mu^{4-n}\lambda\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Z_\lambda^\nu}{(n-4)^\nu}\right) = \mu^{4-n}\lambda Z_\lambda \\ Z_\lambda &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Z_\lambda^\nu}{(n-4)^\nu} \\ \lambda &= \mu^{-(4-n)}Z_\lambda^{-1}\lambda_0 \end{aligned}\right\} \tag{10.130}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\lambda = \beta_\lambda(g,\lambda,n-4) = \lambda\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\lambda = \lambda\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(-(4-n)\ln\mu - \ln Z_\lambda)$$

$$= (n-4)\lambda - \lambda\beta_g\frac{\partial}{\partial g}\ln Z_\lambda - \lambda\beta_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln Z_\lambda$$

$$\therefore \quad Z_\lambda\beta_\lambda = (n-4)\lambda Z_\lambda - \lambda\beta_g\frac{\partial}{\partial g}Z_\lambda - \lambda\beta_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}Z_\lambda \tag{10.131}$$

或

$$\beta_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda Z_\lambda) = (n-4)\lambda Z_\lambda - \lambda\beta_g\frac{\partial}{\partial g}Z_\lambda \tag{10.131$'$}$$

和（10.32）的讨论一样，左方的$\frac{\partial}{\partial\lambda}(\lambda Z_\lambda)$中有 $(n-4)^0$，$(n-4)^{-1}$，$(n-4)^{-2}$，

…；右方有 $(n-4)^1$，$(n-4)^0$，$(n-4)^{-1}$，$(n-4)^{-2}$，…。β_λ 没有发散，不含 $\frac{1}{(n-4)^i}$ 极点项；也不含有 $(n-4)^2$，$(n-4)^3$，…，否则左方会出现右方没有的 $(n-4)^2$，$(n-4)^3$，…。因此 β_λ 只能取如下形式：

$$\beta_\lambda(g,\lambda,n-4) = (n-4)\lambda + \tilde{\beta}_\lambda(g,\lambda) \tag{10.132}$$

代入 (10.131)，得到：

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_\lambda Z_\lambda &= -\lambda\beta_g \frac{\partial}{\partial g} Z_\lambda - \lambda\beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_\lambda \\ &= -\lambda\left((n-4)\frac{g}{2} + \tilde{\beta}_g\right)\frac{\partial}{\partial g} Z_\lambda - \lambda((n-4)\lambda + \tilde{\beta}_\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda} Z_\lambda\end{aligned} \tag{10.133}$$

把 (10.130) 代入 (10.133)：

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_\lambda\left(1 + \frac{Z_\lambda^1}{n-4} + \cdots\right) = &-\lambda\left((n-4)\frac{g}{2} + \tilde{\beta}_g\right)\left(\frac{\frac{\partial Z_\lambda^1}{\partial g}}{n-4} + \frac{\partial\frac{Z_\lambda^2}{\partial g}}{(n-4)^2} + \cdots\right) \\ &- \lambda((n-4)\lambda + \tilde{\beta}_\lambda)\left(\frac{\frac{\partial Z_\lambda^1}{\partial \lambda}}{n-4} + \frac{\frac{\partial Z_\lambda^2}{\partial \lambda}}{(n-4)^2} + \cdots\right)\end{aligned} \tag{10.134}$$

$$\therefore \qquad \begin{aligned}\tilde{\beta}_\lambda &= -\frac{\lambda g}{2}\frac{\partial Z_\lambda^1}{\partial g} - \lambda^2\frac{\partial Z_\lambda^1}{\partial \lambda} \\ \tilde{\beta}_\lambda Z_\lambda^1 &= -\tilde{\beta}_g\lambda\frac{\partial Z_\lambda^1}{\partial g} - \tilde{\beta}_\lambda\lambda\frac{\partial Z_\lambda^1}{\partial \lambda} - \frac{\lambda g}{2}\frac{\partial Z_\lambda^2}{\partial g} - \lambda^2\frac{\partial Z_\lambda^2}{\partial \lambda} \\ &\cdots\cdots\end{aligned} \tag{10.135}$$

在单圈近似下（见 (10.129′)）有

$$Z_\lambda^1 = -\mathscr{A}\lambda - \mathscr{B}'g^2 - \mathscr{C}\frac{g^4}{\lambda}$$

代入 (10.135) 得：($n=4$ 时)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \beta_\lambda = \mathscr{A}\lambda^2 - \mathscr{C}g^4 + \mathscr{B}'\lambda g^2 + 2\mathscr{C}g^4 = \mathscr{A}\lambda^2 + \mathscr{B}'\lambda g^2 + \mathscr{C}g^4 \tag{10.136}$$

换变数：

$$\alpha = \frac{\lambda}{g^2}, \rightarrow \lambda = \alpha g^2$$

$$\therefore \qquad g^2\frac{\partial\alpha}{\partial t} + 2\alpha g\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} = (\mathscr{A}\alpha^2 + \mathscr{B}'\alpha + \mathscr{C})g^4 \tag{10.137}$$

然而自 (10.36)（略去 $O(g^6)$）：

$$2g\frac{\partial g}{\partial t} = -b_0 g^4$$

所以得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{g^2}\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= (\mathscr{A}\alpha^2 + (\mathscr{B}' + b_0)\alpha + \mathscr{C}) \\ &= \mathscr{A}\alpha^2 + \mathscr{B}\alpha + \mathscr{C} = \mathscr{A}(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \\ &(\mathscr{B} = \mathscr{B}' + b_0)\end{aligned} \tag{10.138}$$

一般情况下，$\mathscr{A}>0$。如果α_1，α_2是实的，而且$\alpha_1<\alpha_2$，则在（α_1，α_2）区间，$\frac{\partial\alpha}{\partial t}<0$。所以和§10-4的讨论一样，$t$增加，$\alpha$减少，$t\to\infty$时，$\alpha\to\alpha_1$。就是说，这时$\alpha=\alpha_1$是紫外定点。

讨论：

1. 由于微扰求得的$\mathscr{C}\neq0$，所以α_1，α_2都不为零。若α_1，α_2是实数，则α_1是一个有限的实数（$\neq0$）。$t\to\infty$时，$\alpha=\frac{\lambda}{g^2}\to\alpha_1\neq0$，从而$g^2\to0$时，$\lambda$也同时$\to0$，出现渐近自由。

2. 要求实数$\alpha_1>0$，这样当$t\to\infty$时，$\lambda=g^2\alpha\to g^2\alpha_1>0$，真空自发破缺的势能才是如10.42图形状的。否则，如果$\alpha_1<0$，$\lambda=g^2\alpha\to g^2\alpha_1<0$，则势能会呈如下10.43图形状。真空能级为$-\infty$，这是不合理的。

3. 有真空自发破缺时，从第九章看到χ的静止质量m_χ是与$\alpha=\frac{\lambda}{g^2}$无关，因为$m_\alpha^2$随$t$的变化可参考§10-4一节的讨论。但规范场$A_\mu^\alpha$的静止质量

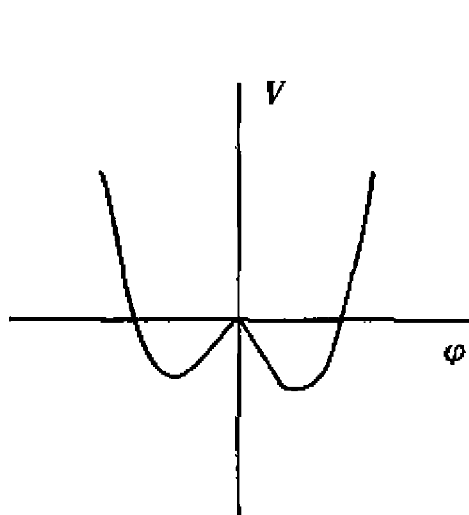


图 10.42

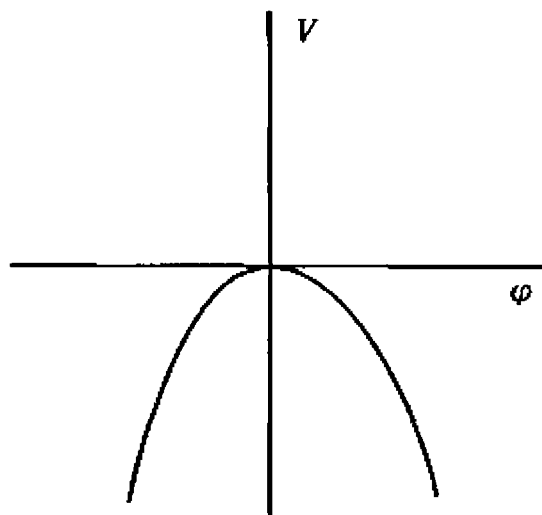


图 10.43

$$m_A=\frac{gv}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{-\mu^2\frac{g^2}{\lambda}}=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{\mu^2}{\alpha}}$$

则是与α有关的。不过，它们都满足

$$\frac{m_\chi}{e^t}\xrightarrow{t\to\infty}0\qquad\frac{m_A}{e^t}\xrightarrow{t\to\infty}0$$

（参考（10.51））

4. 关键问题是$\mathscr{A}\alpha_2+\mathscr{B}\alpha+\mathscr{C}$的根$\alpha_1$，$\alpha_2$的性质：

$$\alpha_2=\frac{-\mathscr{B}+\sqrt{\mathscr{B}^2-4\mathscr{A}\mathscr{C}}}{2\mathscr{A}}$$

$$\alpha_1=\frac{-\mathscr{B}-\sqrt{\mathscr{B}^2-4\mathscr{A}\mathscr{C}}}{2\mathscr{A}}\tag{10.139}$$

渐近自由要求α_1，α_2都是实的，上面讨论2还要求$\alpha_1>0$。把这些要求写出来就是：

$$\mathscr{B}=\mathscr{B}'+b_0<-\sqrt{4\mathscr{A}\mathscr{C}}\tag{10.140}$$

（当然还要求 $\mathscr{A}\mathscr{C}>0$ 以保证 $\alpha_1>0$）。从这个要求看到，$\mathscr{B}$ 必须是负的，而且负得比较厉害，以致 $|\mathscr{B}|>\sqrt{4\mathscr{A}\mathscr{C}}$。已知 $b_0>0$（从（10.36）知道，$b_0>0$ 时，有渐近自由），于是就要求 b_0 尽可能小些。根据（10.127）和 $2g\beta_g \doteq -b_0g^4$，有

$$2g\beta_g=-\frac{2g^4}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)-\frac{1}{3}T(R')\right)=-b_0g^4$$

$$b_0=\frac{1}{8\pi^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G)-\frac{4}{3}T(R)-\frac{1}{3}T(R')\right) \tag{10.141}$$

要 b_0 小，就必须 T（R）大些，即费米子多些。然而 Higgs 粒子又不能太多，否则 $\mathscr{A}$ 就太大，（10.140）仍不能满足。而且 Higgs 粒子太多时，T（R'）太大，b_0 有变负的危险，以致失去渐近自由。可见费米子多了虽然能减少 b_0，但 Higgs 粒子却不能随费米子增多而增多。所以超过一定限度后，增加的费米子就不能通过 Higgs 机制获得必要的静止质量。（10.140）的条件是苛刻的。具体讨论这个问题需要有具体模型。

§10－9　补充说明两点

1. 渐近自由与完全自由的区别。

从（10.27）看到，在 $p\to\lambda p$ 而 λ 很大时，量子色动力学重正化效应所显示出来的渐近自由和完全自由是有区别的。在（10.27）右方，

$$g(g_c,t)\xrightarrow{t\to\infty}0$$

这和完全自由一致；在（10.27）右方

$$a\xrightarrow{t\to\infty}a_1$$

完全自由时也可取 $a=a_1$；另外，在高能时，

$$\frac{m}{e^t}\xrightarrow{t\to\infty}0,$$

完全自由也可忽视静止质量。这些都并不说明渐近自由与完全自由的区别。从（10.27）看到的渐近自由与完全自由的区别主要表现在去掉正常量纲因子 $e^{(4-N)t}$ 后，格林函数写成

$$e^{-N\int_0^t\gamma(t')dt'}G\left(p_1\cdots,p_N;g(g_c,t);\mu_c;\frac{m(t)}{e^t};a(t)\right) \tag{10.142}$$

即多出来一个反常量纲因子 $e_0^{-N\int_0^t\gamma(t')dt'}$，这个因子如果等于 1，则（10.142）在 t 很大时基本上是标度无关的$\left(\text{在 } G \text{ 中随 } t\to\infty \text{ 的变化无非是 } g\to0,\frac{m}{e^t}\to0,a\to a_1\right)$。但有了这个反常量纲因子，（10.142）就不再是标度无关的了。这个因子与 k^2 有一定关系，从而破坏了（10.142）在 t 大时的标度无关性。通过实验上测量 t 大时的标度无关性的破坏，可以检验量子色动力学的渐近自由理论。

这里举两个传播子的例子。传播子的渐近行为并不能直接测量，例子只是为了说明与完全自由的区别。

第一个例子，传播子 $D_F^{横}{}'$。

取 Landau 规范，$a=0$（前面 § 10－6 说过，a 可能是紫外定点，也可能是红外定点。但即使是红外定点，只要 t 不太大时取 $a=0$，则由于$\frac{\partial a}{\partial t}=-2a\gamma=0$，$a$ 也不会离开 0，类似于不稳定平衡）。

因为 $D_F' \sim \langle 0 | TAA | 0\rangle$，$D_F'$（$x$）的正常量纲为 2，其 Fourier 变换 D_F'（k）的正常量纲则是 $2-4=-2$。又

$$Z_3 D_{F_{\mu\nu 2}}^{横ab\,\prime}(k) = D_{F_{\mu\nu 2}}^{横ab\,\prime 0}(k)$$

与（10.25）对照，反常量纲部分应取 $N=-2$。于是（10.27）在这里应写成：

$$\begin{aligned}\underline{D}_{F\mu\nu}^{横ab\,\prime}(e^t k,g,\mu_c) &= e^{正常量纲\times t-N\int_0^t \gamma(t')dt'}\cdot \underline{D}_{F_{\mu\nu}}^{横ab\,\prime}(k,g\Rightarrow 0,\mu_c)\\ &= e^{-2t+2\int_0^t \gamma(t')dt'}\cdot \underline{D}_{F_{\mu\nu}}^{横ab\,\prime}(k,g\Rightarrow 0,\mu_c)\end{aligned} \tag{10.143}$$

由于 $g \xrightarrow{t\to\infty} 0$，圈图贡献→0，从而 μ_c 在右方不出现，于是，在 t 大时，右方的 $D'\to$ 自由传播子：

$$\begin{aligned}\underline{D}_{F_{\mu\nu}}^{横ab\,\prime}(e^t k,g,\mu_c) &= e^{-2t+2\int_0^t \gamma(t')dt'}\frac{-i}{k^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\delta_{ab}\\ &= e^{2\int_0^t \gamma(t')dt'}\frac{-i}{(e^t k)^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{(e^t k)_\mu (e^t k)_\nu}{(e^t k)^2}\right)\delta_{ab}\end{aligned} \tag{10.144}$$

这里显出了与纯粹标度变换的区别。

现在取（见（10.103））　　$\gamma(t)=\gamma(g(t)) \doteq c_0 g^2(t)$

又自（10.39）：　　$g^2(t) \doteq \frac{g_c^2}{1+b_0 g_c^2 t}$

$$\therefore e^{2\int_0^t \gamma(t')dt'} = e^{2c_0\int_0^t \frac{g_c^2}{1+b_0 g_c^2 t}dt} = e^{2\frac{c_0}{b_0}\ln(1+b_0 g_c^2 t)} = (1+b_0 g_c^2 t)^{2\frac{c_0}{b_0}}$$

代入（10.144）：

$$\underline{D}_{F_{\mu\nu}}^{横ab\,\prime}(e^t k,g,\mu_c) = (1+b_0 g_c^2 t)^{2\frac{c_0}{b_0}}\cdot\frac{-i}{(e^t k)^2}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{(e^t k)_\mu (e^t k)_\nu}{(e^t k)^2}\right)\delta_{ab} \tag{10.145}$$

其中　　$t=\frac{1}{2}\ln\frac{k^2}{\mu_c^2}$

第二个例子，传播子 S_F'。

因为 $S_F' \sim \langle 0 | T\psi\bar{\psi} | 0\rangle$，$S_F$（$x$）的正常量纲为 3，其 Fourier 变换 S_F'（p）的正常量纲则是 $3-4=-1$。又

$$Z_2 \bar{S}_F'(p) = S_F'^{0}(p)$$

所以与（10.25）对照，反常量纲部分应取 $N=-2$。只是此地 γ 应换成：

$\gamma_F=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_2=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\ln Z_2$。于是（10.27）在这里应写成

$$\begin{aligned}\underline{S}_F(e^t p,g,\mu_c) &= e^{正常量纲\times t-N\int_0^t \gamma_F(t')dt'}\cdot \underline{S}_F\cdot(p,g\Rightarrow 0,\mu_c)\\ &= e^{-t+2\int_0^t \gamma_F(t')dt'}\cdot \underline{S}_F'(p,g\Rightarrow 0,\mu_c)\end{aligned} \tag{10.146}$$

也是由于 $g\xrightarrow{t\to\infty}0$，和上例一样，右方的$\underline{S}_F'$ 在 t 大时可换成自由传播子：

$$\underline{S}_F'(e^t p, g, \mu_c) = e^{-t+2\int_0^t \gamma_F(t')dt'} \cdot \frac{-1}{\hat{p}} = e^{2\int_0^t \gamma_F(t')dt'} \cdot \frac{-1}{e^t \hat{p}} \tag{10.147}$$

同样显出了与纯粹标度变换的区别。

现在取（参考（10.107）和（10.43）式）

$$\gamma_F(t) = c_{F_0} g^2(t)$$

又自（10.39）

$$g^2(t) \doteq \frac{g_c^2}{1 + b_0 g_c^2 t}$$

$$e^{2\int_0^t \gamma_F(t')dt'} = e^{2C_{F_0}\int_0^t \frac{g_c^2}{1+b_0 g_c^2 t}dt}$$

$$= e^{2\frac{C_{F_0}}{b_0}\ln(1+b_0 g_c^2 t)} = (1 + b_0 g_c^2 t)^{2\frac{C_{F_0}}{b_0}}$$

代入（10.147）：

$$\underline{S}_F'(e^t p, g, \mu_c) = (1 + b_0 g_c^2 t)^{2\frac{C_{F_0}}{b_0}} \frac{-1}{e^t \hat{p}} \tag{10.148}$$

其中 $t = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2}{\mu_c^2}$

2. 没有非 Abel 规范场，能不能有渐近自由。

第一个例子：费米场与 Abel 规范场。$f_{abc} = 0$，Z_1^F 中只

有 [图] 的贡献（都取单圈图），

Z_2^F 中只有 [图] 的贡献，

Z_3 中只有 [图] 的贡献。

和 QCD 一样，没有渐近自由。

零自旋粒子与 Abel 规范场，例如零自旋粒子的量子电动力学，也没有渐近自由。

第二个例子：费米场与标量场。

相互作用是 $g\bar{\psi}\psi\varphi$，自作用项是 $\lambda\ (\varphi\varphi)^2$。

$$g_0 = \frac{Z_1}{Z_2 Z_\varphi^{1/2}} g = Z_g g$$

取单圈近似：

与 Z_1 有关的图 [图：顶点标 g] $Z_1 - 1 \sim g^2$

与 Z_2 有关的图 [图：顶点标 g] $Z_2 - 1 \sim g^2$

与 Z_φ 有关的图 $\quad Z_\varphi - 1 \sim g^2$

如果是取到 λ^2，则与 Z_φ 有关的还有一个双圈图：

它贡献单极点$\frac{1}{n-4}$项和双极点$\frac{1}{(n-4)^2}$项；在 $Z_\varphi - 1$ 中贡献 $\sim \lambda^2$。

于是，取到 g^2，λ^2 为止，并限于单极点项：

$$Z_g = \frac{Z_1}{Z_2 Z_\varphi^{1/2}} = 1 + \frac{Ag^2 + B\lambda^2}{n-4} \tag{10.149}$$

在最小重正化时，仍有

$$g_0 = \mu^{\frac{4-n}{2}} g\left(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Z_g^\nu}{(n-4)^\nu}\right) = \mu^{\frac{4-n}{2}} g Z_g$$

$$Z_g = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{Z_g^\nu}{(n-4)^\nu}$$

其中 $\quad Z_g^1 = Ag^2 + B\lambda^2 \quad$ （取（10.149）的近似）

所以可如下求出 β_g：

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g = \beta_g(g, \lambda, n-4) = g\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln g$$

$$= g\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(\mu^{\frac{n-4}{2}} \cdot Z_g^{-1})$$

$$= \left(\frac{n-4}{2}\right) g - g\frac{1}{Z_g}\beta_g \frac{\partial}{\partial g} Z_g - g\frac{1}{Z_g}\beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_g$$

$$\therefore \quad \beta_g Z_g + g\beta_g \frac{\partial}{\partial g} Z_g = \left(\frac{n-4}{2}\right) g Z_g - g\beta_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_g$$

和以前的讨论一样，β_g，β_λ 都只要 $(n-4)^1$，$(n-4)^0$ 两项，可取

$$\beta_g(g, \lambda, n-4) = \frac{n-4}{2} g + \tilde{\beta}_g$$

$$\beta_\lambda(g, \lambda, n-4) = (n-4)\lambda + \tilde{\beta}_\lambda$$

代入上式得到：

$$\left(\frac{n-4}{2}\right) g Z_g + \tilde{\beta}_g Z_g + g\left(\frac{n-4}{2} g + \tilde{\beta}_g\right) \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_g$$

$$= \left(\frac{n-4}{2}\right) g Z_g - g((n-4)\lambda + \tilde{\beta}_\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_g$$

$(n-4)^1$ 项两边消去：

$(n-4)^0$ 项：

$$\tilde{\beta}_g + \frac{g^2}{2} \frac{\partial}{\partial \lambda} Z_g^1 = -g\lambda \frac{\partial}{\partial g} Z_g^1 \tag{10.150}$$

再把 $Z'_g = Ag^2 + B\lambda^2$ 代入：（$n-4$ 时，$\beta_g = \tilde{\beta}_g$）

$$\beta_g = -Ag^3 - 2Bg\lambda^2 \qquad (n = 4 \text{ 时}) \tag{10.151}$$

具体把圈图算出来，知道 g 在 0 附近并大于 0 时，$\beta_g > 0$，所以 $g = 0$ 不是一个紫外定点，没有渐近自由。

事实上其他的没有规范场的可重正化的理论只有有限的几种，它们都没有渐近自由。

参考文献

1 D. J. Gross, Methods in Field Theory, Edited by R. Balian, J. Zinn-Justin (1976).

2 H. D. Politzer, Phys. Reports, C14 (1974) 129.

3 W. Marciano, H. Pagels, Phys. Reports, C36 (1978) 137.

4 D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. D8 (1973) 3633.

5 H. Georgi, H. D. Politzer, Phys. Rev. D9 (1974) 416.

附录一　经典规范理论简述

介绍经典规范理论的书较多，其中有的书讲得很清楚。写这个附录的目的只是帮助读者回忆一下经典规范理论的基本内容，并不求全。

§ A1－1　规范不变性和规范场的引入

自由 Dirac 方程：

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = 0 \tag{A1.1}$$

相应的拉氏量：

$$\mathscr{L} = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi \tag{A1.2}$$

整体规范变换（即常数相因子变换）：

$$\begin{aligned} \psi &\to \psi' = e^{-i\theta}\psi \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\theta} \\ &\theta \text{ 是常数} \end{aligned} \tag{A1.3}$$

代入（A1.2），得到

$$\mathscr{L}' = -\bar{\psi}'(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi' = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi = \mathscr{L} \tag{A1.4}$$

所以（A1.2）的 $\mathscr{L}$ 在整体规范变换下不变（这个不变性与电流守恒有关）。

定域规范变换（相因子随 x，t 而变）：

$$\begin{aligned} \psi &\to \psi' = e^{-i\theta(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\theta(x)} \end{aligned} \tag{A1.5}$$

代入（A1.2）就不再是不变的了。如果要维持拉氏量不变，就必须引入一种场 $A_\mu(x)$，拉氏量改写成：

$$\mathscr{L}_\psi = -\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) + m]\psi \tag{A1.6}$$

同时，除（A1.5）外，$A_\mu(x)$ 也有如下的规范变换：

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \theta(x) \tag{A1.7}$$

这新引入的场 $A_\mu(x)$ 就叫做规范场。它也有相应的自由拉氏量：

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \tag{A1.8}$$

显然 $\mathscr{L}_\psi$ 和 $\mathscr{L}_A$ 在（A1.5）和（A1.7）的变换下都是不变的。

（A1.5）和（A1.7）合在一起，叫做定域规范变换。

上述定域规范不变性在要求引入规范场的同时，也引入了相互作用项 $ie\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$。它相当于电磁相互作用。其中 A_μ 就是电磁场。ψ 就是带电费米场（例如电子场）。带电粒子之间通过交换电磁场的量子（光子）而发生电磁相互作用，见下图。

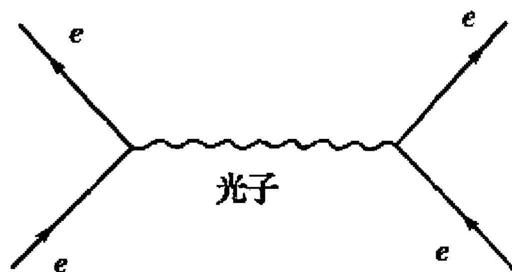


图 A1.1

这里 θ（x）是可对易的，从而指数也是可对易的。

$$e^{-i\theta_1(x)}\cdot e^{-i\theta_2(x)}=e^{-i\theta_2(x)}\cdot e^{-i\theta_1(x)}$$

也是可对易的。这种规范属于 Abel 规范，规范群叫做 U（1）群。

非 Abel 规范场

举一个 SU（3）规范的例子$_\psi$（QCD 取的是 SU（3）规范，见第十章）。ψ 现在是 SU（3）表示的一个矢量：

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi^1\\\psi^2\\\psi^3\end{pmatrix}\tag{A1.9}$$

如果 ψ^1、ψ^2、ψ^3 有相同的质量 m（SU（3）对称），则仍可统一地写出如下的拉氏量：

$$\mathscr{L}=-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi\tag{A1.10}$$

整体规范变换（相因子 θ^i 的个数与 T^i 相同）：

$$\begin{gathered}\psi\to\psi'=e^{-iT^i\theta^i}\psi\\\bar{\psi}\to\bar{\psi}'=\bar{\psi}e^{-iT^i\theta^i}\\\theta^i\text{ 是常数}\end{gathered}\tag{A1.11}$$

代入（A1.10），

$$\mathscr{L}'=-\bar{\psi}'(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi'=-\bar{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+m)\psi=\mathscr{L}\tag{A1.12}$$

所以（A1.10）的 $\mathscr{L}$ 在整体规范变换下不变。

定域规范变换（θ^i（x）随 x，t 而变）：

$$\begin{aligned}\psi\to\psi'&=e^{-iT^i\theta^i(x)}\psi\\\bar{\psi}\to\bar{\psi}'&=\bar{\psi}e^{iT^i\theta^i(x)}\end{aligned}\tag{A1.13}$$

代入（A1.10），$\mathscr{L}$ 就不再是不变的了。如果要维持拉氏量不变，就必须引入规范场 A_μ^i（x）。

现在先把 T^i 的定义和性质写出来。λ^i 是 SU（3）的 Gell－Mann 矩阵

$$\begin{gathered}T^i=\frac{1}{2}\lambda^i(i=1,2,\cdots,8)\\ [T^i,T^j]=if_{ijk}T^k\end{gathered}\tag{A1.14}$$

f_{ijk}是群的结构常数，一般紧致半单李群的表示都可以做到f_{ijk}全反对称。f_{ijk}满足 Jacobi 恒等式：

$$f_{ijk}f_{kmn}+f_{imk}f_{knj}+f_{ink}f_{kjm}=0\tag{A1.15}$$

另外还有（常数 T（R）一般随表示 R 而定）：

$$Tr(T^iT^j) = \delta_{ij}T(R) \tag{A1.16}$$

在 $\mathscr{L}$ 中引入规范场 A_μ^i （x） 的方式类似于（A1.16）：

$$\mathscr{L}_\psi = -\bar{\psi}[\gamma_\mu(\partial_\mu - igT^iA_\mu^i) + m]\psi \tag{A1.17}$$

如果要维持 $\mathscr{L}_\psi$ 在规范变换下不变，则必须 $T^iA_\mu^i$ 满足：

$$-igT^aA_\mu^a = e^{i\theta^iT^i}\partial_\mu(e^{-i\theta^iT^i}) - ige^{i\theta^iT^i}T^aA_\mu^{a\prime}e^{-i\theta^iT^i} \qquad (A1.18)_1$$

也即

$$T^aA_\mu^a \to T^aA_\mu^{a'} = e^{-i\theta^iT^i}[T^aA_\mu^a - \frac{i}{g}e^{i\theta^iT^i}\partial_\mu(e^{-i\theta^iT^i})]e^{i\theta^iT^i} \qquad (A1.18)_2$$

当 θ^i 很小时，展开得到（取 θ^i 一次）：

$$T^aA_\mu^a \to T^aA_\mu^{a'} = T^aA_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^aT^a - i[T^i, T^a]A_\mu^a\theta^i$$

$$= T^a\left(A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a + f_{abc}\theta^bA_\mu^c\right)$$

也即（注意（A1.18）$_3$ 的规范变换与 T^a 无关）：

$$A_\mu^a \to A_\mu^{a'} = A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a + f_{abc}\theta^bA_\mu^c \qquad (A1.18)_3$$

（A1.18）就是 A_μ^a 的规范变换，与（A1.17）相对应。特别请注意 A_μ^a 的规范变换只与 f_{abc} 所代表的群的性质有关，与具体表示的 T^i 无关。这新引入的规范场的拉氏量是：

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ijk}A_\mu^jA_\nu^k)^2 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^iF_{\mu\nu}^i$$

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ijk}A_\mu^jA_\nu^k \tag{A1.19}$$

以下证明 $\mathscr{L}_A$ 是规范不变的。取 θ^i 很小的情况，自（A1.18）$_3$

$$\delta(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i) = f_{ijk}(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k)\theta^j + f_{ijk}[A_\nu^k(\partial_\mu\theta^j) - A_\mu^k\cdot(\partial_\nu\theta^j)]$$

$$\delta gf_{ijk}A_\mu^jA_\nu^k = gf_{ijk}[(\delta A_\mu^j)A_\mu^k - A_\nu^k(\delta A_\nu^j)]$$

$$= f_{ijk}[-A_\nu^k(\partial_\mu\theta^j) + A_\mu^k(\partial_\nu\theta^j)] + g(f_{ijk}f_{jbc} - f_{ijc}f_{jbk})A_\mu^cA_\nu^k\theta^b$$

$$= f_{ijk}[-A_\nu^k(\partial_\mu\theta^j) + A_\mu^k(\partial_\nu\theta^j)] - gf_{ijb}f_{jck}A_\mu^cA_\nu^k\theta^b$$

（第二项是利用 Jacobi 恒等式和 f_{abc} 的全反对称性得来的）

于是合起来有：

$$\delta F_{\mu\nu}^i = \delta(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf_{ijk}A_\mu^jA_\nu^k)$$

$$= f_{ijk}(\partial_\mu A_\nu^k - \partial_\nu A_\mu^k)\theta^j + gf_{ijk}f_{kbc}A_\mu^bA_\nu^c\theta^j = f_{ijk}\theta^jF_{\mu\nu}^k \tag{A1.20}$$

第二项中指标经过换写（$b\to j$，$j\to k$，$k\to c$，$c\to b$）。注意 $\delta F_{\mu\nu}^i$ 中不含有 T^i。

自（A1.20）有：

$$\delta(F_{\mu\nu}^iF_{\mu\nu}^i) = f_{ibc}\theta^bF_{\mu\nu}^cF_{\mu\nu}^i + F_{\mu\nu}^if_{ibc}\theta^bF_{\mu\nu}^c = 0 \tag{A1.21}$$

由于 $F_{\mu\nu}^cF_{\mu\nu}^i = F_{\mu\nu}^iF_{\mu\nu}^c$，所以事实上两项分别等于零。

这样就证明了 $F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu}$ 是规范不变的①。从（A1.20）还看到一个性质，即 θ^i 小时有

$$\delta F^k_{\mu\nu}T^k = -i[T^j, T^k]\theta^j F^k_{\mu\nu} = e^{-i\theta_i T^i}F^k_{\mu\nu}T^k e^{i\theta_i T^i} - F^k_{\mu\nu}T^k$$

所以 $F^k_{\mu\nu}T^k$ 的规范变换又写成（见脚注）：

$$F^{k\prime}_{\mu\nu}T^k = e^{-i\theta_i T^i}(F^k_{\mu\nu}T^k)e^{i\theta^i T^i} \tag{A1.22}$$

在（A1.22）中，θ^i 事实上不限于是微小量，但由于 T^i 互相不可对易，所以 θ^i 也不等于各个 $\Delta\theta^i$ 的简单的求和。见下例：

利用 $$e^{aX}\cdot e^{bY} = e^{aX+bY+\frac{ab}{2}[X,Y]+\cdots}$$

有

$$\begin{aligned}
&e^{-i\Delta\theta^i_2 T^i}\cdot e^{-i\Delta\theta^j_1 T^j}\ (F^k_{\mu\nu}T^k)\ e^{i\Delta\theta^j_1 T^j}\cdot e^{i\Delta\theta^i_2 T^i}\\
&= e^{-i(\Delta\theta^i_1+\Delta\theta^i_2)T^i-\frac{1}{2}\Delta\theta^j_1\Delta\theta^i_2[T^i,T^j]-\cdots}\cdot\ (F^k_{\mu\nu}T^k)\\
&\quad\cdot e^{i(\Delta\theta^i_1+\Delta\theta^i_2)T^i-\frac{1}{2}\Delta\theta^j_1\Delta\theta^i_2[T^j,T^i]+\cdots}\\
&= e^{-i(\Delta\theta^k_1+\Delta\theta^k_2)T^k-\frac{i}{2}\Delta\theta^j_1\Delta\theta^i_2\cdot f_{ijk}T^k-\cdots}\cdot\ (F^k_{\mu\nu}T^k)\\
&\quad\cdot e^{i(\Delta\theta^k_1+\Delta\theta^k_2)T^k+\frac{i}{2}\Delta\theta^j_1\Delta\theta^i_2\cdot f_{ijk}T^k+\cdots}
\end{aligned} \tag{A1.23}$$

可看到两边 T^k 的系数正好是正负相反和（A1.22）一致，但不是 $\Delta\theta^i_1$、$\Delta\theta^i_2$ 的简单相加。

以上证明了（A1.17）中的 $\mathscr{L}_\psi$ 和（A1.19）中的 $\mathscr{L}_A$ 都是在（A1.13）和

---

① （A1.21）可以更直截了当地证明如下，不限于微小规范变换：取 $U = e^{-i\theta^a T^a}$，则有

$$T^a A^a_\mu \xrightarrow{\text{规范变换}} T^a A^{a\prime}_\mu = UT^a A^a_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}\frac{\partial_U}{\partial_{x_\mu}}U^{-1} \tag{i}$$

$$D_\mu = (\partial_\mu - igT^a A^a_\mu) \xrightarrow{\text{规范变换}} D'_\mu = (\partial_\mu - igT^a A^{a\prime}_\mu) \tag{ii}$$

自（i）、（ii），又有（请读者自己检验）

$$D'_\mu U = (\partial_\mu - igT^a A^{a\prime}_\mu)\ U = U\ (\partial_\mu - igT^a A^a_\mu)\ UD_\mu \tag{iii}$$

$$D'_\mu = D'_\mu UU^{-1} = \partial_\mu - igT^a A^a_{\mu'} = UD_\mu U^{-1} \tag{iv}$$

于是

$$\left.\begin{aligned} D'_\mu D'_\nu = UD_\mu U^{-1}UD_\nu U^{-1} = UD_\mu D_\nu U^{-1}\\ D'_\nu D'_\mu = UD_\nu U^{-1}UD_\mu U^{-1} = UD_\nu D_\mu U^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{v}$$

$$\therefore D'_\mu D'_\nu - D'_\nu D'_\mu = U\ (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\ U^{-1} \tag{vi}$$

现在定义

$$D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = -igT^a F^a_{\mu\nu},\quad D'_\mu D'_\nu - D'_\nu D'_\mu = -igT^a F^{a\prime}_{\mu\nu} \tag{vii}$$

则有

$$\left.\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} = \frac{\partial A^a_\nu}{\partial x\mu} - \frac{\partial A^a_\mu}{\partial x\nu} + gf_{abc}A^b_\mu A^c_\nu\\ F^a_{\mu\nu} = \frac{\partial A^{a\prime}_\nu}{\partial x\mu} - \frac{\partial A^{a\prime}_\mu}{\partial x\nu} + gf_{abc}A^b_\mu{}' A^c_\nu{}'\end{aligned}\right\} \tag{viii}$$

而且自（vi）有

$$T^a F^{a\prime}_{\mu\nu} = UT^a F^a_{\mu\nu}U^{-1} \tag{ix}$$

从而

$$\mathrm{T_r}\ (T^a F^{a\prime}_{\mu\nu}T^b F^{b\prime}_{\mu\nu}) = \mathrm{T_r}\ (T^a F^a_{\mu\nu}T^b F^b_{\mu\nu})$$

$$\therefore F^{a\prime}_{\mu\nu}F^{a\prime}_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu} \tag{x}$$

（A1.21）得证。

(A1.18) 变换下不变的。(A1.13) 和 (A1.18) 合在一起，称为上述 SU (3) 规范理论的定域规范变换。这个定域规范变换的不变性在要求引入规范场 A_μ^i 的同时，也引入 (A1.17) 中的相互作用项 $ig\bar{\psi}\gamma_\mu T^i\psi A_\mu^i$。

可以看到，上述 SU (3) 定域规范变换可以立刻推广到任何其他的紧致半单李群的情况，同时引入相应的规范场和相互作用。

协变微商

在规范变换中 ψ 的变换是

$$\psi' = e^{-i\theta^i T^i}\psi$$

而 $(\partial_\mu - igT^iA_\mu^i)$ 满足

$$(\partial_\mu - igT^iA^{i\prime})\psi' = e^{-i\theta^i T^i}(\partial_\mu - igT^iA_\mu^i)\psi$$

可见 ψ 和 $(\partial_\mu - igT^iA_\mu^i)\,\psi$ 有相同的规范变换形式（普通的微商 ∂_μ 做不到这一点）。于是

$$D_\mu = (\partial_\mu - igT^iA_\mu^i) \tag{A1.24}$$

就叫做协变微商。

协变微商还满足

$$(\partial_{\mu_1} - igT^iA_{\mu_{11}}^{i\prime})(\partial_{\mu_2} - igT^iA_{\mu_{22}}^{i\prime})\cdots(\partial_{\mu_n} - igT^iA_{\mu_n}^{i\prime})\psi'$$
$$= e^{-i\theta^i T^i}(\partial_{\mu_1} - igT^iA_{\mu_1}^i)(\partial_{\mu_2} - igT^iA_{\mu_2}^i)\cdots(\partial_{\mu_n} - igT^iA_{\mu_n}^i)\psi$$

从而保证附录三中的 O^ψ 为规范不变算子。

这里再引入一个作用于 $F_{\mu\nu}^i$ 的协变微商 ∇_μ，它的作用是

$$\nabla_\lambda F_{\mu\nu}^a = (\partial_\lambda\delta_{ac} + gf_{abc}A_\lambda^b)F_{\mu\nu}^c \tag{A1.25}$$

自 (A1.21) 已知 $F_{\mu\nu}^iT^i$ 的规范变换是

$$(F_{\mu\nu}^kT^k)' = e^{\ i\theta^i T^i}(F_{\mu\nu}^kT^k)e^{i\theta^i T^i}$$

现在要证明 $\nabla_\mu F_{\nu\lambda}^kT^k$ 的规范变换也是这个形式，即

$$(\nabla_\mu F_{\nu\lambda}^kT^k)' = e^{-i\theta^i T^i}(\nabla_\mu F_{\nu\lambda}^kT^k)e^{i\theta^i T^i}$$

从而说明 ∇_μ 也具有规范变换的协变性质。为此，我们分别求下列两个表达式的规范变换（设 θ^i 很小，取到 θ^i 一次）：

$$\partial_\lambda(F_{\mu\nu}^kT^k)' = \partial_\lambda(e^{-i\theta^i T^i}F_{\mu\nu}^kT^ke^{i\theta^i T^i})$$
$$\doteq e^{-i\theta^i T^i}(\partial_\lambda F_{\mu\nu}^kT^k)e^{i\theta^i T^i} - i(\partial_\lambda\theta^i)[T^i,T^k]F_{\mu\nu}^k$$

$$gf_{kbc}A_\lambda^{b\prime}F_{\mu\nu}^{c\prime}\,T^k = gf_{kbc}\left(A_\lambda^b - \frac{1}{g}(\partial_\lambda\theta^b) + f_{bad}\theta^aA_\lambda^d\right)\cdot(F_{\mu\nu}^c + f_{cef}\theta^eF_{\mu\nu}^f)\cdot T^k$$
$$\doteq gf_{kbc}A_\lambda^{b\prime}F_{\mu\nu}^cT^k - f_{kbc}(\partial_\lambda\theta^b)F_{\mu\nu}^cT^k + gf_{kbc}f_{bad}\theta^aA_\lambda^dF_{\mu\nu}^cT^k + gf_{kbe}A_\lambda^bf_{cde}\theta^dF_{\mu\nu}^eT^k$$
$$= gf_{kbc}A_\lambda^bF_{\mu\nu}^cT^k + i(\partial_\lambda\theta^i)[T^i,T^k]F_{\mu\nu}^k - gf_{kba}f_{bdc}\theta^aA_\lambda^dF_{\mu\nu}^cT^k$$

（利用了 Jacobi 恒等式）

$$\doteq e^{-i\theta^i T^i}gf_{kbc}A_\lambda^bF_{\mu\nu}^cT^ke^{i\theta^i T^i} + i(\partial_\lambda\theta^i)[T^i,T^k]F_{\mu\nu}^k$$

合起来：

$$\nabla_\lambda'F_{\mu\nu}^{k\prime}\,T^k = \partial_\lambda(F_{\mu\nu}^kT^k)' + gf_{kbc}A_\lambda^{b\prime}F_{\mu\nu}^{c\prime}T^k$$
$$= e^{-i\theta^i T^i}(\partial_\lambda F_{\mu\nu}^kT^k + gf_{kbc}A_\lambda^bF_{\mu\nu}^kT^k)e^{i\theta^i T^i}$$

$$= e^{-i\theta^i T^i}(\nabla_\lambda F^k_{\mu\nu}T^k)e^{i\theta^i T^i}$$

$$\doteqdot (\delta_{kj} + f_{kij}\theta^i)\nabla_\lambda F^j_{\mu\nu}T^k \tag{A1.26}$$

从而又有

$$\delta(\nabla_\lambda F^k_{\mu\nu}) = f_{kij}\theta^i(\nabla_\lambda F^j_{\mu\nu}) \tag{A1.27}$$

(A1.27) 与 (A1.20) 的形式相同，(A1.26) 与 (A1.22) 的形式相同，这就证明了 ∇_μ 具有协变性质。

进而用归纳法可以证明：

$$\nabla'_{\mu_1}\nabla'_{\mu_2}\cdots\nabla'_{\mu_n}F'^k_{\nu\lambda}T^k = e^{-i\theta^i T^i}(\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_n})F^j_{\nu\lambda}T^k e^{i\theta^i T^i}$$

$$(\theta\text{ 微小时}) \doteqdot (\delta_{kj} + f_{kij}\theta^i)\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_n}F^j_{\nu\lambda}T^k \tag{A1.28}$$

$$\therefore\quad \delta(\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_n}F^k_{\nu\lambda}) \doteqdot f_{kij}\theta^i\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla\mu_n F^j_{\nu\lambda} \tag{A1.28$'$}$$

所以又有（自 (A1.20) 和 (A1.28)′）：

$$\delta(F^i_{\mu\nu'}\nabla_{\mu_1}\cdots\nabla_{\mu_n}F^i_{\nu\lambda}) = (f_{iab} + f_{bai})\theta^a F^i_{\mu\nu'}\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_n}F^i_{\nu\lambda} = 0$$

保证了附录三中的 θ^A 的规范不变性。

顺便补充说明一下 A^i_μ 的规范变换的群的性质，自 $(\text{A1.18})_2$

$$T^a A^{a'}_\mu = e^{-i\theta^i_1 T^i}\left[T^a A^a_\mu - \frac{i}{g}e^{i\theta^i_1 T^i}\partial_\mu(e^{-i\theta^i_1 T^i})\right]e^{i\theta^i_1 T^i}$$

$$T^a A^{a''}_\mu = e^{-i\theta^i_2 T^i}\left[T^a A^{a'}_\mu - \frac{i}{g}e^{i\theta^i_2 T^i}\partial_\mu(e^{-i\theta^i_2 T^i})\right]e^{i\theta^i_2 T^i}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad T^a A^{a''}_\mu &= e^{-i\theta^i_2 T^i}\cdot e^{-i\theta^i_1 T^i}\left[T^a A^a_\mu - \frac{i}{g}e^{i\theta^i_1 T^i}\partial_\mu(e^{-i\theta^i_1 T^i})\right]e^{i\theta^i_1 T^i}\cdot e^{i\theta^i_2 T^i}\\
&\quad - \frac{i}{g}e^{-i\theta^i_2 T^i}\cdot e^{i\theta^i_2 T^i}\partial_\mu(e^{-i\theta^i_2 T^i})e^{i\theta^i_2 T^i}\\
&= e^{-i\theta^i_2 T^i}\cdot e^{-i\theta^i_1 T^i}\Big[T^a A^a_\mu - \frac{i}{g}e^{i\theta^i_1 T^i}\cdot e^{i\theta^i_2 T^i}\cdot e^{-i\theta^i_2 T^i}\partial_\mu(e^{-i\theta^i_1 T^i})\\
&\quad - \frac{i}{g}e^{i\theta^i_1 T^i}\cdot e^{i\theta^i_2 T^i}\cdot\partial_\mu(e^{-i\theta^i_2 T^i})e^{-i\theta^i_1 T^i}\Big]e^{i\theta^i_1 T^i}\cdot e^{i\theta^i_2 T^i}\\
&= (e^{-i\theta^i_2 T^i}\cdot e^{i\theta^i_1 T^i})\\
&\quad \left[T^a A^a_\mu - \frac{i}{g}(e^{i\theta^i_1 T^i}\cdot e^{i\theta^i_2 T^i})\partial_\mu(e^{-i\theta^i_2 T^i}\cdot e^{-i\theta^i_1 T^i})\right](e^{i\theta^i_1 T^i}\cdot e^{i\theta^i_2 T^i})
\end{aligned}$$

(A1.23) 已经看到：

$$e^{-i\theta^i_2 T^i}\cdot e^{-i\theta^i_1 T^i} = e^{-i\theta^i_3 T^i}$$

右方指数上仍是 T^i 的线性叠加，所以

$$T^a A^{a''}_\mu = e^{-i\theta^i_3 T^i}\left[T^a A^a_\mu - \frac{i}{g}e^{i\theta^i_3 T^i}(\partial e^{-i\theta^i_3 T^i})\right]e^{i\theta^i_3 T^i}$$

仍是 $(\text{A1.18})_2$ 形式的规范变换，从而说明了规范变换的群的性质。((A1.13) 变换的群的性质更明显)。

§ A1－2　对称性的真空自发破缺

对称性的破缺，一种形式是 $\mathscr{L}$ 中含有破坏对称的项；另一种形式是 $\mathscr{L}$ 保持对称，

而物理的真空破坏了这种对称性。后一种形式就叫做对称性的真空自发破缺。

第一个例子

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \vdots \\ \varphi^3 \end{pmatrix} \varphi^i \text{ 都是实标量场}$$

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi^i\partial_\mu\varphi^i) - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^i\varphi^i - \frac{1}{4}\lambda(\varphi^i\varphi^i)^2 \tag{A1.29}$$

把 φ^i（$i=1, 2, \cdots, n$）看做 n 维空间的 n 个分量，则显然 $\mathscr{L}$ 对 n 维正交群 O（n）是不变的。

φ^i 的共轭场 π^i 是

$$\pi^i = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}^i} = \dot{\varphi}^i$$

$$H = \pi^i\dot{\varphi}^i - \mathscr{L} = \frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \frac{1}{2}(\nabla\varphi^i \cdot \nabla\varphi^i) + \frac{1}{2}\mu\varphi^i\varphi^i + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^i\varphi^i)^2 \tag{A1.30}$$

真空是最低能量态，所以要求 H 为极小，此时

$$\pi^i = \dot{\varphi}_i = 0, \nabla\varphi^i = 0$$

从而在真空态中，$\langle\varphi^i\rangle_0$ 是与坐标（x，t）无关的常数。为了确定这个常数，我们要继续找出

$$V = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^i\varphi^i + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^i\varphi^i)^2 \tag{A1.31}$$

的极小。自

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi^i} = 0 = \varphi^i(\mu^2 + \lambda(\varphi^j\varphi^j)), \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^i\partial\varphi^i} > 0 \tag{A1.32}$$

容易看出：

当 $\mu^2>0$，则 $\varphi^i=0$ 时有极小，这是普通无破缺的情况。

当 $\mu^2<0$，则 $\mu^2+\lambda$（$\varphi^j\varphi^j$）$=0$ 时才有极小。在后一种（$\mu^2<0$）情况下，真空时

$$\langle\sqrt{\varphi^i\varphi^i}\rangle_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \neq 0 \tag{A1.33}$$

由于 φ^i 是实场，所以要求 $\lambda>0$。

（A1.33）的真空显然是简并的，例如可以作意取一个 a（a 是 1，2，…，n 中的任意一个），令

$$\langle\varphi^a\rangle_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}, \langle\varphi^i\rangle_0 = 0 (i \neq a) \tag{A1.34}$$

代表真空态。这样就出现了真空的破缺，因为（A1.34）不是 O（n）旋转不变的。

现在，不失一般性，可取定如下：

$$\langle\varphi^1\rangle_0 = \langle\varphi^2\rangle_0 = \cdots = \langle\varphi^{n-1}\rangle_0 = 0 \qquad \langle\varphi^n\rangle_0 = v \tag{A1.35}$$

写成下式：

$$\langle\varphi\rangle_0\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\\nu\end{pmatrix}\qquad \nu=\left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2} \tag{A1.36}$$

然后重新定义 $\varphi^n=\eta+\nu$[①]，显然 $\langle\eta\rangle_0=0$。代入（A1.29）得（由于 φ^n 换成 $\eta+\nu$，$\mathscr{L}$ 就不再对称）：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta\partial_\mu\eta+\partial_\mu\varphi^1\partial_\mu\varphi^1+\cdots+\partial_\mu\varphi^{n-1}\partial_\mu\varphi^{n-1})\\&-\frac{1}{2}(-2\mu^2)\eta^2-\frac{1}{4}\lambda(\eta^2+\varphi^1\varphi^1+\cdots+\varphi^{n-1}\varphi^{n-1})^2\\&-\lambda v\eta(\eta^2+\varphi^1\varphi^1+\cdots+\varphi^{n-1}\varphi^{n-1})+\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda}\end{aligned} \tag{A1.37}$$

由此看到，代替 φ^n 的 η 获得了静止质量 $\sqrt{-2\mu^2}$，而 φ^1，…，φ^{n-1} 都没有静止质量。没有静止质量的场共 $n-1$ 个，它们叫做 Goldstone 粒子（即自旋为 0，无静止质量的粒子）的场。

这个例子说明，真空自发破缺的直接后果就是出现 Goldstone 粒子，这就是 Goldstone 定理。在这里，遭到破缺的群必须是一个连续群。

第二个例子 φ 是复场

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2+i\varphi_1\\\varphi_4-i\varphi_3\end{pmatrix}\qquad \varphi^+=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2-i\varphi_1,\varphi_4+i\varphi_3) \tag{A1.38}$$

其中 φ_1，φ_2，φ_3，φ_4 都是实场。

φ 是 SU（2）的一个表示，这个表示的生成元是 $\frac{\tau_1}{2}$，$\frac{\tau_2}{2}$，$\frac{\tau_3}{2}$：

$$\begin{aligned}&i\tau_1:\quad i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2+i\varphi_1\\\varphi_4-i\varphi_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_3+i\varphi_4\\-\varphi_1+i\varphi_2\end{pmatrix}\\&i\tau_2:\quad i\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2+i\varphi_1\\\varphi_4-i\varphi_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_4-i\varphi_3\\-\varphi_2-i\varphi_1\end{pmatrix}\\&i\tau_3:\quad i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2+i\varphi_1\\\varphi_4-i\varphi_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\varphi_1+i\varphi_2\\-\varphi_3-i\varphi_4\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{A1.39}$$

$$[\tau_i,\tau_j]=2i\varepsilon_{ijk}\tau_k \tag{A1.40}$$

这个复表示可以写成实表示，基矢加倍，即 φ_1，φ_2，φ_3，φ_4。因 $e^{i\tau_i\theta_i}$ 作用在 φ 上是实的，所以 $i\tau_i$ 作用在 φ 上也应该是实的。自（A1.39），$i\tau_i$ 的作用是：

$$i\tau_1:\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\varphi_4\\+\varphi_3\\-\varphi_2\\-\varphi_1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{应取}}\tau_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}$$

① 这样做的目的是为了对 η 也可以使用正常的微扰论方法，不必特别去考虑真空的性质。

$$i\tau_2:\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\varphi_3\\+\varphi_4\\+\varphi_1\\-\varphi_2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{应取}}\tau_2=\begin{pmatrix}0&0&i&0\\0&0&0&-i\\-i&0&0&0\\0&i&0&0\end{pmatrix}\quad(A1.41)$$

$$i\tau_3:\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\\\varphi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\varphi_2\\-\varphi_1\\+\varphi_4\\-\varphi_3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{应取}}\tau_3=\begin{pmatrix}0&-i&0&0\\i&0&0&0\\0&0&0&-i\\0&0&i&0\end{pmatrix}$$

这三个 τ_i 也满足（A1.40）的对易关系。此时，SU（2）不变的拉氏量是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}&=-(\partial_\mu\varphi^+\partial_\mu\varphi)-\mu^2\varphi^+\varphi-\lambda(\varphi^+\varphi)^2\\&=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1+\partial_\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2+\partial_\mu\varphi_3\partial_\mu\varphi_3+\partial_\mu\varphi_4\partial_\mu\varphi_4)\\&\quad-\frac{\mu^2}{2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2)-\frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2)^2\end{aligned}\quad(A1.42)$$

$$V=\frac{\mu^2}{2}(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2)+\frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2)^2\quad(A1.43)$$

V 的极小在

$$\varphi_i(\mu^2+\lambda(\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2))=0\qquad i=1,2,3,4\quad(A1.44)$$

当 $\mu^2>0$，则 $\varphi_i=0$ 时有极小，这是普通的无破缺的情况。

当 $\mu^2<0$，则 $\mu^2+\lambda$（$\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2$）$=0$ 时才有极小。

后一种情况（$\mu^2<0$）下，真空时，

$$\langle\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2+\varphi_4^2}\rangle_0=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}\neq0\quad(A1.45)$$

由于 φ_i 是实场，所以要求 $\lambda>0$。

（A1.45）的真空显然也是简并的。例如可以任意取一个 φ_a，用

$$\langle\varphi_a\rangle_0=\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}\neq0,\qquad\langle\varphi_i\rangle_0=0(i\neq a)\quad(A1.46)$$

来代表真空态。而（A1.46）的真空在 SU（2）变换中已不是不变的了（对称性真空自发破缺）。

不失一般性，可以取定

$$\langle\varphi_1\rangle_0=\langle\varphi_2\rangle_0=\langle\varphi_3\rangle_0=0\qquad\langle\varphi_4\rangle_0=\nu\quad(A1.47)$$

写成下式：

$$\langle\varphi\rangle_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\nu\end{pmatrix},\nu=\left(-\frac{\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2}\quad(A1.48)$$

然后重新定义 $\varphi_4=\bar{\chi}+\nu$，代入（A1.42）得：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}(\partial_\mu\bar{\chi}\partial_\mu\bar{\chi}+\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1+\partial_\mu\varphi_2\partial_\mu\varphi_2+\partial_\mu\varphi_3\partial_\mu\varphi_3)$$

$$-\frac{1}{2}(-2\mu^2)\overline{\chi}^2-\frac{1}{4}\lambda(\overline{\chi}^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)^2$$

$$-\lambda\nu\overline{\chi}(\overline{\chi}^2+\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2)+\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda} \tag{A1.49}$$

由此看到，$\overline{\chi}$ 获得静止质量 $\sqrt{-2\mu^2}$，而 φ_1，φ_2，φ_3 都没有静止质量。这个例子又一次说明 SU（2）自发破缺后，出现了 Goldstone 粒子，验证了 Goldstone 定理。

Goldstone 定理的证明

写出有 n 个实标量场 φ_i（$i=1$，2，…，n）的拉氏函数：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_i\partial_\mu\varphi_i-V(\varphi)。$$

如有真空自发破缺，总可经旋转使矢量 $\langle\varphi\rangle_0=\nu$ 只有 ν_n 分量，故不失一般性可取

$$\nu=\langle\varphi\rangle_0=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \nu_n\end{pmatrix} \tag{A1.50}$$

如果有复场，我们可以把实场的数目加倍，使复表示转变为实表示（参考第二个例子）。$\mathscr{L}$ 中还包括含有其他场的项，但与这里讨论无关，不必写出来。

V（φ）是 φ 的多项式，包括质量项，它在群 G 的变换不是不变的。G 群有 N 个生成 T_α（$\alpha=1$，2，3，…，N），取 L_α 为 T_α 的表示矩阵，则 φ 的规范变换为

$$\varphi\rightarrow\varphi'=e^{-iL_\alpha\theta^\alpha}\varphi,\delta\varphi=-iL_\alpha\theta^\alpha\varphi \qquad (\theta^\alpha\ 微小) \tag{A1.51}$$

由于是实的表示，故 $e^{-iL_\alpha\theta^\alpha}$ 和 $iL_\alpha\theta^\alpha$ 都是实的，L_α 应是纯虚矩阵。L_α 厄米，故 L_α 反对称（参考第二个例子）。

V 在（A1.51）的变换下不变，所以（θ^α 微小）：

$$0=\delta V=\frac{\partial V}{\partial\varphi_i}\delta\varphi_i=-i\frac{\partial V}{\partial\varphi_i}(L_\alpha)_{ij}\varphi_j\theta^\alpha \tag{A1.52}$$

θ^α 是任意取的，所以得到 N 个方程

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_i}(L_\alpha)_{ij}\varphi_j=0 \qquad \alpha=1,2,\cdots,N \tag{A1.53}$$

再对 φ_k 微商一次，得到：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k}(L_\alpha)_{ij}\varphi_j+\frac{\partial V}{\partial\varphi_i}(L_\alpha)_{ik}=0 \tag{A1.54}$$

然而 $\varphi=\nu$ 时，V 为极小，所以

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi_i}\right)_{\varphi=\nu}=0 \tag{A1.55}$$

于是自（A1.54），当 φ 取值为 ν 时，有

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k}\right)_{\varphi=\nu}(L_\alpha)_{ij}\nu_j=0 \tag{A1.56}$$

把 φ 换成（$\varphi-\nu$）$+\nu$（这里（$\varphi-\nu$）相当于前面两个例子中的 η 和 $\overline{\chi}$），则 V（φ）写成（Taylor 展开）：

$$V(\varphi) = V(\nu) + \frac{1}{2}(M^2)_{ij}(\varphi-\nu)_i(\varphi-\nu)_j + (\varphi-\nu) \text{ 的高次项} \quad (A1.57)$$

$(M^2)_{ij}$是 ν 的函数。由于（A1.55），故（A1.57）中没有（$\varphi-\nu$）一次项。于是，自（A1.57）有：

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi_i\partial\varphi_k}\right)_{\varphi=\nu} = (M^2)_{ik} \quad (A1.58)$$

$(M^2)_{ij}$是质量平方矩阵的矩阵元。

把（A1.58）代入（A1.56），得到：

$$(M^2)_{ij}(L_\alpha)_{jk}v_k = 0 \qquad \alpha = 1,2,\cdots,N \quad (A1.59)$$

现在，设 S 是 G 中的一个子群，它在真空破缺的情况下仍保持其对称性。就是说，S 中的任何一个生成元 L_α 都有 $L_\alpha\nu=0$ 的性质。这性质保证了

$$e^{-iL_\alpha\theta^\alpha}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ v_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ v_n\end{pmatrix}$$

即真空在 S 子群的作用不是不变的。再设 S 中（满足 $L_\alpha v=0$）的生成元有 M 个，则 G 中余下的 $N-M$ 个生成元都应是破缺生成元，即都有 $L_\alpha v\neq 0$ 的性质。于是，我们有（$N-M$）个矩阵方程：

$$(M^2)_{ij}(L_\alpha)_{jk}v_k = 0 \qquad \alpha = 1,2,\cdots,N-M \quad (A1.60)$$
$$(\ (L_\alpha)_{jk}v_k\neq 0)$$

（A1.60）式说明，$(M^2)_{ij}$矩阵作用在这 $N-M$ 不等于 0 的（L_α）$_{jk}v_k$ 矢量上，本征值都为 0。这 $N-M$ 个（L_α）$_{jk}v_k$（j，$k=1$，2，…，n；$\alpha=1$，2，…，$N-M$）是在 φ_1，φ_2，…，φ_n 所张开的 n 维空间中的矢量，它们互相独立，从而在这 n 维空间中又张开一个 $N-M$ 维的子空间。M^2 作用在这个子空间中的任何一个矢量上，本征值都为 0。于是，如果把 M^2 矩阵对角化，则 $N-M$ 维的子空间部分的（M^2）的本征值（对角矩阵元）必定都是 0。一共 $N-M$ 个 0。所以说，与这 $N-M$ 维子空间相对应的 $N-M$ 个 φ_i 都是 Goldstone 粒子的场。那么，余下的 $n-$（$N-M$）个 φ_i 有没有静止质量呢？让我们看一看实际遇到的情况：

1. O（n）规范群，$N=\frac{1}{2}n$（$n-1$）。在取 v 为（A1.50）形式时，$M=\frac{1}{2}$（$n-1$）（$n-2$），于是 $N-M=n-1$。

$$n-(N-M)=1$$

2. SU（L）规范群，取复表示，$N=L^2-1$。在取 v 为（A1.50）形式时，$M=(L-1)^2-1$。又 $n=2L$，于是

$$n-(N-M)=1$$

所以在这些应用中只需考虑 $n-$（$N-M$）$=1$ 的情况。就是说，除（$N-M$）个 Goldstone 粒子场之外，只还余下一个标量场。正如前面的例子中看到的，它必定要和 v_n 一起出现。因此，它必定是 φ_n 场，在 V 中以 $\tilde{\varphi}_n+v_n$ 的形式出现，从而获得静止质量。

所以，v 取（A1.50）的形式，而 $n-$（$N-M$）$=1$ 时，Goldstone 粒子场的数目等

于满足 $L_\alpha v \neq 0$ 的 L_α 的数目，也即等于破缺生成元的数目[①]。

在更一般的情况，$(M^2)_{ij}$矩阵对角化后，可能有不止一个不等于零的对角矩阵元。具体可写成如下形式：

$$(M^2)_{\text{对角化后}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \mu_{k+1}^2 & & \\ & 0 & & & & \mu_{k+2}^2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \mu_n^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\right\} k\text{ 行} \\ \\ \left.\right\} n-k\text{ 行} \end{matrix}$$

上面的 k 行，本征值都是 0；下面的 $n-k$ 行，本征值都 $\neq 0$。

于是，从满足（A1.60）的要求出发，可看到 L_α 分成两类：

第一类是 $L_\alpha v \neq 0$

$$L_\alpha v = \begin{pmatrix} X \\ \vdots \\ X \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\right\} k\text{ 个分量不全为 0} \\ \left.\right\} n-k\text{ 个分量全为 0} \end{matrix}$$

第二类是 $L_\alpha v = 0$

$$L_\alpha v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} n\text{ 个分量全为 0}$$

第二类显然全部都应归入 S 子群。

第一类上面的 k 个分量（Goldstone 场）是互相独立的，所以有而且只有 k 个互相独立的 $L_\alpha v \neq 0$。即有 k 个互相独立的（破缺生成元）L_α，具有 $L_\alpha v \neq 0$ 的性质。由此可见，Goldstone 定理的一种较完整的叙述是：破缺生成元的数目应等于 Goldstone 场的数目。

从后面的（A1.79）和（A1.80）又可看到，k 个独立的 $L_\alpha v \neq 0$ 使得 k 个规范场 A_μ^a 获得静止质量。所以，在获得静止质量的 Higgs 场不止一个时，Goldstone 场的数目也等于获得静止质量的规范场 A_μ^a 的数目。

在 §2-3 的例 4 中，我们将看到不止一个 Higgs 场获得静止质量的情况。但在本附录内，我们将仍讨论只有一个 Higgs 场获得静止质量的情况。

回顾一下本节一开头所举的两个例子，可看到它们的 Goldstone 场的数目都是 $N-M$：

第一个例子：$N=\frac{1}{2}n\ (n-1)$；v 取（A1.50）形式时，

$M=\frac{1}{2}\ (n-1)\ (n-2)$。所以 $N-M=n-1$。

第二个例子：$N=3$，$M=0$（没有保持真空不变的生成元）。所以 $N-M=3$。

---

① 这里的讨论限于矢量的 Higgs 场，矢量的 v。但在大统一理论中，要引入张量的 Higgs 场（例如 Higgs 场取伴随表示），张量的 v，是这里的讨论的推广。

都与实际情况相符。

对于上面的讨论，还要补充两点：

第一，满足 $L_\alpha v=0$ 的 L_α 生成一个子群：

证明：取任意两个 L，$L_\alpha v=0$，$L_\beta v=0$。因为

$[L_\alpha, L_\beta] = if_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma + if_{\alpha\beta\gamma'}L_\gamma'$

其中 γ 和 γ' 按 $L_\gamma v=0$，$L_\gamma' v\neq 0$ 来区分，所以

$0=(L_\alpha L_\beta - L_\beta L_\alpha)v = if_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma v + if_{\alpha\beta\gamma'}L_\gamma' v$。

但前面讨论过，k 个 $L_\gamma v\neq 0$ 是互相独立的，所以 $f_{\alpha\beta\gamma'}=0$，从而

$[L_\alpha, L_\beta] = if_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma$，故形成子群。

第二，满足 $L_\alpha v\neq 0$ 的这些 L_α 互相独立和这些 $L_\alpha v$ 的正交化：

先定义 $A^{\alpha\beta}$，

$$A^{\alpha\beta} = (L_\alpha v, L_\beta v) \quad \left((a,b) = \sum_i a_i^* b_i\right) \tag{A1.61}$$

$A^{\alpha\beta}$ 是一个 $(N-M)\times(N-M)$ 的矩阵。

因为 L_α 厄米，所以

$$A^{\alpha\beta} = (L_\alpha)^*_{ik} v_k (L_\beta)_{ij} v_j = v_k (L_\alpha^+)_{ki} (L_\beta)_{ij} v_j = (v, L_\alpha L_\beta v)$$

$$\therefore \quad A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha} = (v, [L_\alpha, L_\beta] v) = if_{\alpha\beta\gamma}(v, L_\gamma v) = if_{\alpha\beta\gamma}(L_\gamma)_{ik} v_i v_k$$

在实表示中，$(L_\gamma)_{ik}$ 纯虚厄米反对称，而 $v_i v_k$ 对 i，k 对称，所以

$$A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha} \tag{A1.62}$$

可见 $A^{\alpha\beta}$ 是实对称矩阵。

实对称矩阵总可以对角化，而使它的对角化的 O（也是 $(N-M)\times(N-M)$ 实矩阵）必定可以做到

$O^{-1}=\tilde{O}$

证明：由 $O_{j\alpha}A^{\alpha\beta}O^{-1}_{\beta k} = \lambda_j \delta_{jk}$ 入手，得到

$$O_{j\alpha}A^{\alpha\beta} = \lambda_j O_{j\beta} \tag{a}$$

$$O_{j\alpha}A^{\alpha\beta} - \lambda_i O_{i\beta} \tag{b}$$

因为 $A^{\alpha\beta}$ 是实对称的，所以是厄米的，从而它的本征值 λ_i、λ_j 都是实的。于是解出的 $O_{j\alpha}$、$O_{i\beta}$ 必定可以做到都是实的。

根据 $A^{\alpha\beta}=A^{\beta\alpha}$，又可自 (a) 得到

$$A^{\beta\alpha}\tilde{O}_{\alpha j} = \lambda_j \tilde{O}_{\beta j} \rightarrow$$

$$\rightarrow O_{i\beta}A^{\beta\alpha}\tilde{O}_{\alpha j} = O_{i\beta}\lambda_j \tilde{O}_{\beta j}$$

自（b）得到

$$O_{i\alpha}A^{\alpha\beta}\tilde{O}_{\beta j} = O_{i\beta}\lambda_i \tilde{O}_{\beta j}$$

两者左方相等，所以

$$(\lambda_i - \lambda_j)\, O_{i\beta}\tilde{O}_{\beta j} = 0$$

$$\therefore O_{i\beta}\tilde{O}_{\beta j} = 0 \qquad (\lambda_i \neq \lambda_j \text{ 时})$$

同时，自 O 的矩阵元都是实数以及（a），（b）看到，每一个矢量 O_j（它的分量为 O_{j1}，O_{j2}，…，$O_{j,N-M}$）都可以分别独立地归一化，使得

$$O_{j\beta}\tilde{O}_{\beta j}=O_{i\beta}\tilde{O}_{\beta i}=1 \qquad (i,\ j\text{不求和})$$

所以得到

$$\tilde{O}=O^{-1}$$

以上是无简并的情况，容易推广到有简并的情况。

对角化的 A 矩阵是：

$$\begin{aligned}A'^{\alpha\beta} &= (OAO^{-1})^{\alpha\beta} = O_{\alpha\sigma}A^{\sigma\tau}\tilde{O}_{\tau\beta}\\ &= (O_{\alpha\sigma}L_\sigma v, O_{\beta\tau}L_\tau v)\\ &= \delta_{\alpha\beta}A'^{\alpha\alpha}(\text{对}\ \alpha\ \text{不求和})\\ &= \delta_{\alpha\beta}(O_{\alpha\sigma}L_\sigma v, O_{\alpha\tau}L_\tau v)(\alpha\ \text{不求和})\end{aligned} \tag{A1.63}$$

即

$$\left.\begin{aligned}A'^{\alpha\beta} &= 0(\alpha\neq\beta)\\ A'^{\alpha\alpha} &= (O_{\alpha\sigma}L_\sigma v, O_{\alpha\tau}L_\tau v) > 0(\alpha\ \text{不求和})\end{aligned}\right\} \tag{A1.64}$$

这里 $A'^{\alpha\alpha}\neq 0$（α 不求和），否则就要求 $O_{\alpha\sigma}L_\sigma v=0$ 等等，即 $O_{\alpha\sigma}L_\sigma$ 必须属于 S 子群。这是和一开头的假设 L_α 都不属于 S 子群相抵触的。

（A1.64）第一式说明了 $N-M$ 个（$O_{\alpha\sigma}L_\sigma v$）是互相正交的矢量。相应地，$N-M$ 个 L_α（$L_\alpha v\neq 0$）是互相独立的。由于 $N-M$ 个 $L_\alpha v$ 张开的子空间的维数是 $N-M$，而总的维数是 n，所以

$$N-M\leqslant n$$

另外，（A1.64）第二式说明 $A'^{\alpha\alpha}$（α 不求和）>0，这在下一节将有用。

§ A1 −3　Higgs 机制

上一节所讨论的都限于整体规范变换。现在就要看一看在定域规范变换下，Gold-stone 粒子将出现什么情况。

先给定某个规范下真空破缺的标量场 $\varphi(x)$，$\langle\varphi(x)\rangle_0=v$，

$$v=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ v_n\end{pmatrix}$$

φ 是 n 维矢量。规范群共有 N 个生成元 L_α，其中有 $N-M$ 个 $L_\alpha v\neq 0$；M 个 $L_\alpha v=0$。这后者生成子群 S。

定理：总可以找到一个定域规范变换：

$$O_\varphi(x) = e^{-i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha(x)L_\alpha} \tag{A1.65}$$

（其中 $\sum_{\alpha=1}^{N-M}$ 是对 $N-M$ 个 $L_\alpha v\neq 0$ 的 α 求和），使得变换后的

$$\varphi^0(x) = O_\varphi(x)\varphi(x) = e^{-i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha(x)L_\alpha}\varphi(x)$$

满足

$$(L_\alpha v, O_\varphi(x)\varphi(x)) = (L_\alpha v, \varphi^0(x)) = 0$$

也就是说，使得 $\varphi^0(x)$ 在 $N-M$ 个矢量 $L_\alpha v$（$\neq 0$）所张开的 $N-M$ 维空间中没有分量。

证明：也是取实表示，n 行列矩阵 L_α 是纯虚厄米反对称矩阵，而且

$$O^{-1}(x) = e^{i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha(x)L_\alpha} = e^{-i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha(x)L_\alpha^T} = O^T(x) \tag{A1.66}$$

和 $O(x)$ 都是实的，考察如下乘积

$$(v, O(x)\varphi(x)) \tag{A1.67}$$

其中 v 和 $\varphi(x)$ 是实的，所以 $(v, O(x)\varphi(x))$ 也是实的，它随 $O(x)$ 而变。在 G 为紧致李群的情况下，(A1.67) 把这个连续李群投影到实轴上的一个有限线段。因此对于给定的 $\varphi(x)$，必定存在 $O_\varphi(x)$，使得 (A1.67) 为极大或极小（对每一个 x 点）。在此邻近对 $O(x)$ 稍作变动，则由于

$$\delta O(x) = O(x) - e^{-i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\varepsilon_\alpha(x)L_\alpha}O(x) = i\sum_{\alpha=1}^{N}\varepsilon_\alpha(x)L_\alpha O(x)$$

所以

$$0 = \delta(v, O(x)\varphi(x))_{O=O_\varphi} = (v, \delta O\cdot\varphi)_{O=O_\varphi}$$

$$= i\sum_{\alpha=1}^{N}\varepsilon_\alpha(x)(v, L_\alpha O_\varphi(x)\varphi(x))$$

然而 $\varepsilon_\alpha(x)$ 是任意的，所以

$$(v, L_\alpha O_\varphi(x)\varphi(x)) = 0$$

又由于 L 厄米：

$$v_a(L_\alpha)_{ab}(O_\varphi(x))_{bc}\varphi_c(x) = (L_\alpha)^*_{ba}v_a\cdot(O_\varphi(x))_{bc}\varphi_c(x)$$
$$= (L_\alpha v, O_\varphi(x)\varphi(x))$$

所以对于一个实的 $\varphi(x)$，必定存在 $O_\varphi(x)$，满足

$$(L_\alpha v, O_\varphi(x)\varphi) = 0 \quad \text{(对所有 } \alpha \text{ 及所有 } x \text{ 都成立)} \tag{A1.68}$$

子群 S 中的 M 和 L_α 本来就是有 $L_\alpha v=0$ 性质的，所以也可把 (A1.68) 看做的是 $N-M$ 个方程式，正好可确定上述讨论已证明其存在的 $N-M$ 个 ξ_α。而且，(A1.68) 还意味着 $O_\varphi(x)\ \varphi(x)$ 与 $N-M$ 个矢量 $L_\alpha v$（$\neq 0$）所张开的 $N-M$ 维空间正交。

由于 $O_\varphi(x)$ 与 $\xi_\alpha(x)$ 存在，$O_\varphi(x)\ \varphi(x)$ 与 $L_\alpha v$（$\neq 0$）的 $N-M$ 维空间正交，所以可以把 φ 和 $O_\varphi\varphi$ 写成

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_{N-M}\\ \varphi_{N-M+1}\\ \varphi_{N-M+2}\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}, \qquad O_\varphi(x) = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \varphi^0_{N-M+1}\\ \varphi^0_{N-M+2}\\ \vdots\\ \varphi^0_n\end{pmatrix} = \varphi^0 \tag{A1.69}$$

φ^0 中有 $N-M$ 个零分量，表明 φ^0 在 $L_\alpha v$（$\neq 0$）的 $N-M$ 维空间中没有分量。

再考察

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = e^{i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha L_\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \varphi^0_{N-M+1} \\ \varphi^0_{N-M+2} \\ \vdots \\ \varphi^0_n \end{pmatrix} = O_\varphi^{-1}\varphi^0 \tag{A1.70}$$

左边的 φ_1，…，φ_n 有 n 个自由度，右边的 φ^0_{N-M+1}，…，φ^0_n 只有 $n-(N-M)$ 个自由度。显然，另外 $N-M$ 个自由度是由 $N-M$ 个 ξ_α 所体现的。于是看到，φ^0 已不包含 $N-M$ 个 Goldstone 粒子场的自由度，这些自由度已转移到 $O_\varphi(x)$ 中去。

为了可以使用正常的微扰论方法，我们又取

$$\varphi = \eta + v, \qquad \langle\eta\rangle_0 = 0,$$

现在要问，真空的情况 $O_\varphi(x)$ 和 $\xi_\alpha(x)$ 应是什么？按照上面的讨论，真空的情况 $\langle O_\varphi(x)\rangle_0$ 应满足 $(v, \langle O_\varphi\rangle_0 v)$ 等于极大或极小，也即要求满足

$$(L_\alpha v, \langle O_\varphi\rangle_0 v) = 0 \tag{A1.71}$$

这就有两种可能性：一种是 $\langle O_\varphi\rangle_0 v=0$，这就必定要求 $\langle O_\varphi\rangle_0$ 是 S 子群的一个生成元。但按（A1.65），的定义，恰好 $\langle O_\varphi\rangle_0$ 不是 S 子群的生成元，而是由另外 $N-M$ 个生成元 L_α $(L_\alpha v\neq 0)$ 做成的群元。剩下的另一种可能性只能是 $O_\varphi(x)$ 不含 L_α $(L_\alpha v\neq 0)$，从而

$$\langle O_\varphi\rangle_0 = 1 \tag{A1.72}$$

因为（A1.71）对每一个 L_α 都成立。于是要求

$$\langle\xi_\alpha(x)\rangle_0 = 0 \tag{A1.73}$$

另外还有 $\langle\varphi_i\rangle_0=0$ $(i\neq n)$；$\langle\varphi_n\rangle_0=v$，所以

$$\langle\varphi^0_i\rangle_0 = 0 \quad (i\neq n);\langle\varphi^0_n\rangle_0 = v \tag{A1.74}$$

再回到 $V(\varphi)$，它是规范不变的，所以有

$$V(\varphi) = V(\varphi^0)$$

自（A1.69）可见经过上述规范变换后，$V(\varphi^0)$ 中已经全部消去了 Goldstone 粒子场的自由度。现在看一看只有一个 φ_n 分量有真空破缺的例子：

$$\langle\varphi\rangle_0 = v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v_n \end{pmatrix} \qquad \varphi^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi^0_n \end{pmatrix}$$

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 \quad (\mu^2 < 0)$$

$$V(\varphi^0) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^{02} + \frac{1}{4}\lambda\varphi^{04}$$

$$= (-\mu^2)\eta^2 + \lambda v_n\eta^3 + \frac{1}{4}\lambda\eta^4 - \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda} \tag{A1.75}$$

此地取 $\varphi^0_n = \eta + v_n$，$v_n = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$

于是看到，只有 η（$=\varphi_n^0-v$）获得了静止质量，没有破缺的其他分量都没有静止质量（此地我们取的 v_n 值正好把（A1.75）中 η 的一次项消去）。

我们又要问，既然 $N-M$ 个 Goldstone 场的自由度在 $V(\varphi^0)$ 中不出现，那么它们到哪里去了？

答案在于我们这里取的不是整体规范变换，而是定域规范变换，必须引入规范场 A_μ^i。在上述定域规范变换下，A_μ^i 也要作规范变换（见（A1.18)$_2$）：

$$A_\mu^\sigma L_\sigma \to A_\mu^{\sigma 0} L_\sigma = e^{-i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha L_\alpha}\Big[A_\mu^\sigma L_\sigma - \frac{i}{g}e^{i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha L_\alpha}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(e^{-i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha L_\alpha})\Big]e^{i\sum_{\alpha=1}^{N-M}\xi_\alpha L_\alpha} \tag{A1.76}$$

对 φ 采用实表示（L_μ 厄米、纯虚、反对称）：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\sigma F_{\mu\nu}^\sigma - \frac{1}{2}\varphi^T(\overleftarrow{\partial}_\mu + igA_\mu^\sigma L_\sigma)(\vec{\partial}_\mu - igA_\mu^\tau L_\tau)\varphi - V(V)$$

$$(L_\sigma^T = -L_\sigma) \tag{A1.77}$$

定域规范变换后（η^0+v 只有 $\eta_n^0+v_n$ 分量）：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\sigma 0}F_{\mu\nu}^{\sigma 0} - \frac{1}{2}\varphi^{0T}(\overleftarrow{\partial}_\mu + igA_\mu^{\sigma 0}L_\sigma)(\vec{\partial}_\mu - igA_\mu^{\tau 0}L_\tau)\varphi^0 - V(\varphi^0)\\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\sigma 0}F_{\mu\nu}^{\sigma 0} - \frac{1}{2}(\eta^0+v)^T(\overleftarrow{\partial}_\mu + igA_\mu^{\sigma 0}L_\sigma)(\vec{\partial}_\mu - igA_\mu^{\tau 0}L_\tau)(\eta^0+v) - V(\eta^0+v)\\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\sigma 0}F_{\mu\nu}^{\sigma 0} - \frac{1}{2}\{(\partial_\mu\eta_n^0\partial_\mu\eta_n^0\\
&\quad + (\partial_\mu\eta_n^0)(-ig)A_\mu^{\tau 0}(L_\tau)_{nn}(\eta_n^0+v_n) + (\eta_n^0+v_n)(ig)A_\mu^{\sigma 0}(L_\sigma)_{nn}(\partial_\mu\eta_n^0)\\
&\quad + g^2A_\mu^{\sigma 0}A_\mu^{\tau 0}(\eta^0+v)^TL_\sigma L_\tau(\eta^0+v)\} - V(\eta^0+v)\\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\sigma 0}F_{\mu\nu}^{\sigma 0} - \frac{1}{2}\partial_\mu\eta_n^0\partial_\mu\eta_n^0\\
&\quad - \frac{1}{2}g^2A_\mu^{\sigma 0}A_\mu^{\tau 0}(L_\sigma(\eta^0+v), L_\tau(\eta^0+v)\} - V(\eta^0+v)\\
&= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\sigma 0}F_{\mu\nu}^{\sigma 0} - \frac{1}{2}\partial_\mu\eta_n^0\partial_\mu\eta_n^0 - \frac{1}{2}g^2(L_\sigma v, L_\tau v)A_\mu^{\sigma 0}A_\mu^{\tau 0}\\
&\quad - \frac{1}{2}g^2(L_\sigma\eta^0, L_\tau\eta^0)A_\mu^{\sigma 0}A_\mu^{\tau 0}\\
&\quad - g^2(L_\sigma\eta^0, L_\tau v)A_\mu^{\sigma 0}A_\mu^{\tau 0} - v(\eta^0+v)
\end{aligned} \tag{A1.78}$$

（这里利用了反对称性 $(L_\sigma)_{nn}=0$ 和 L_α 的厄米性）。前已知 S 子群的 M 个 L_α 作用在 v 上得零。现在 η^0 和 v 一样，也只有第 n 分量。所以这 M 个 L_α 作用在 η^0 上也得零。于是 σ, τ 的求和只限于与 $N-M$ 维空间（代表 Goldstone 粒子的空间）相对应的那些指标。

因此，

$$-\frac{1}{2}g^2(L_\sigma v, L_\tau v)A_\mu^{\sigma 0}A_\mu^{\tau 0} \tag{A1.79}$$

是 $N-M$ 个 $A_\mu^{\sigma 0}$（σ 指标对应于 $N-M$ 维空间）的质量项，质量矩阵是

$$M_{\sigma\tau}^2 = (L_\sigma v, L_\tau v) \tag{A1.80}$$

与前一节（A1.64）对照，质量项可对角化写成：

$$M_{\sigma}^{2} = A'^{\sigma\sigma} = (O_{\sigma\alpha}L_{\alpha}v, O_{\alpha\beta}L_{\beta}v) > 0 \tag{A1.81}$$

σ 有 $N-M$ 个，所以有 $N-M$ 个相互独立的规范场（它们应是 $A_{\mu}^{\alpha^{0}}$ 的线性叠加 $\sim O_{\sigma\tau}A_{\mu}^{\tau^{0}}$）获得了静止质量。

所以，总的说来，如果有定域规范不变性，则 $N-M$ 个 Goldstone 粒子场就会消失；同时却使 $N-M$ 个规范粒子场获得了静止质量，从而必定出现规范场的纵向分量。于是 Goldstone 粒子的 $N-M$ 个自由度，换成了规范场的纵向分量的 $N-M$ 个自由度。保证了整个物理系统的总自由度的数目不增不减。

这种在定域规范不变的情况下，$N-M$ 个 Goldstone 粒子消失，$N-M$ 个规范场获得静止质量的机制，就叫做 Higgs 机制。

这里讨论的是经典场的情况，在量子场的情况也有这种机制（见第九章）。不妨与第九章关于 R_{ξ} 规范的讨论对照一下：

一般 R_{ξ} 规范取的是

$$C^{\alpha} = \xi^{1/2}\partial_{\mu}A_{\mu}^{\alpha} + i\xi^{1/2}(v, L_{\alpha}\varphi)^{-1/2}$$

第九章（9.114）说明了 $\xi\to 0$ 是么正规范（U 规范），此时不出现 Goldstone 粒子，不出现 $F-P$ 粒子，$N-M$ 个规范场获得静止质量。然而，当 $\xi\to 0$ 时，$C^{\alpha}=0$ 导致下列条件。

$$(V, L_{\alpha}\varphi) = (L_{\alpha}v, \varphi) = 0$$

这正是 $\varphi^{0}=O_{\varphi}\varphi$ 所满足的条件（A1.68），它导致 $\mathscr{L}$ 中消去与 Goldstone 粒子相应的自由度，同时 $N-M$ 个规范场获得静止质量。由此可见，经典的 φ^{0} 在物理上与量子的么正规范的情况一致。所以可把 φ^{0} 称为经典的么正规范的 φ。

顺便补充两点：

1. 因为 $\varphi^{0}=O_{\varphi}\varphi$ 满足（A1.68）条件，所以 φ^{0} 必须与 $L_{\alpha}v$（$\neq 0$）的整个 $N-M$ 维空间正交。在 $n-(M-N)=1$ 时，φ^{0} 只能有第 n 分量，即

$$\varphi^{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi_{n}^{0} \end{pmatrix}$$

从而无论（A1.67）中（v，$O_{\varphi}\varphi$）取的极大也好，极小也好，φ^{0} 的形式是唯一的。

2. M 是子群 S 中 L_{α} 的数目，也就是不获得静止质量的规范场的数目。物理上要求只有一种规范场（电磁场）不获得静止质量，所以考虑物理模型时应取 $M=1$。

§A1-4 W-S 模型，GIM 模型

弱作用与电磁作用统一的尝试，首先是为了解决弱作用理论上的困难，例如费米相互作用不能重正化，费米相互作用理论在高能时给出了破坏么正性的碰撞截面，等等。其次，弱相互作用涉及轻子，轻子还有电磁相互作用，所以在讨论轻子的相互作用时，把弱作用和电磁作用合并考虑是很自然的。目前，理论与实验符合最好的弱作用与电磁作用统一的模型是 W-S 模型（适用于轻子）与 GIM 模型（适用于夸克）。

W－S 模型

引入两个投影算子（其物理意义见一般量子场论的书）：

$$P_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \qquad P_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \tag{A1.82}$$

P_L 是左旋投影算子，P_R 是右旋投影算子。

$$P_L^2 = P_L, P_R^2 = P_R, P_L P_R = P_R P_L - 0, P_L + P_R = 1 \tag{A1.83}$$

先不考虑 μ 子和 τ 子，只取 e 和 ν_e。

我们把 φ_e 简写成 e^-，把 ψ_{ν_e} 简写成 ν_e，并定义：

$$\begin{aligned} \nu_L &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\nu_e \\ e_L^- &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)e^- \\ e_R^- &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)e^- \end{aligned} \tag{A1.84}$$

选取规范群 SU（2）$\times U$（1），SU（2）的量子数是弱同位旋 T 和 T_3，U（1）的量子数是超荷 Y：

$$SU(2)\text{ 双重态}: L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L^- \end{pmatrix} \qquad Y = -1, T = \frac{1}{2}, \quad \begin{matrix} T_3 = \frac{1}{2} \\ T_3 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$SU(2)\text{ 单态}: \qquad R = e_R^- \qquad Y = -2, T = 0, T_3 = 0 \tag{A1.85}$$

电荷是（对于 L 和 R 都成立）：

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \tag{A1.86}$$

拉氏量是

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{规范}} + \mathscr{L}_{\text{轻子}} + \mathscr{L}_{\varphi} + \mathscr{L}_m \tag{A1.87}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{规范}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B_{\mu\nu} \\ F_{\mu\nu}^i &= \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\varepsilon_{ijk}A_\mu^j A_\nu^k \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\mu B_\nu \end{aligned}\right\} \tag{A1.88}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{轻子}} &= -\bar{R}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig'\frac{-2}{2}B_\mu\right)R \qquad \left(\frac{Y}{2} = \frac{-2}{2}\right) \\ &\quad -\bar{L}\gamma_\mu\left(\partial_\mu - ig'\frac{-1}{2}B_\mu - ig\frac{\tau_i}{2}A_\mu^i\right)L \qquad \left(\frac{Y}{2} = \frac{-1}{2}\right) \\ &= -\bar{R}\gamma_\mu(\partial_\mu + ig'B_\mu)R - \bar{L}\gamma_\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu - ig\frac{\tau_i}{2}A_\mu^i\right)L \end{aligned}$$

$$(\tau_1,\tau_2,\tau_3 \text{ 是泡利矩阵}) \tag{A1.89}$$

$$\mathscr{L}_\varphi = -\varphi^+\left(\overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu + ig\frac{\tau_i}{2}A^i_\mu\right) \cdot \left(\overleftarrow{\partial}_\mu - \frac{i}{2}g'B_\mu - ig\frac{\tau_i}{2}A^i_\mu\right)\varphi - V(\varphi^+\varphi) \tag{A1.90}$$

$$\left(\frac{Y}{2} = \frac{1}{2}, T = \frac{1}{2}\right)$$

φ 是 Higgs 场：

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2 + i\varphi_1 \\ \varphi_4 - i\varphi_3\end{pmatrix} \quad Y = 1, T = \frac{1}{2}, \begin{matrix} T_3 = \frac{1}{2} \\ T_3 = -\frac{1}{2}\end{matrix} \tag{A1.91}$$

$$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4 \text{ 是实场}$$

$$\varphi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - i\varphi_1, \varphi_4 + i\varphi_3) \tag{A1.92}$$

$$\begin{aligned} V(\varphi^+\varphi) &= \mu^2\varphi^+\varphi + \lambda(\varphi^+\varphi)^2 \\ &= \frac{\mu^2}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2) + \frac{\lambda}{4}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2)^2 \end{aligned} \tag{A1.93}$$

现在令 $\mu^2 < 0$，则 φ 的一个分量，例如 φ_4，将有 $\neq 0$ 的真空期待值：

$$\left.\begin{aligned} \langle\varphi\rangle_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix} \\ \langle\varphi_4\rangle^0 &= v \qquad v = \left(\frac{-\mu^2}{\lambda}\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{A1.94}$$

显然 $\langle\varphi\rangle_0$ 在 SU（2）和 U（1）的变换下都不是不变的，所以，(A1.94) 的真空既破坏了 SU（2）对称，又破坏了 U（1）对称。但是，φ 的电荷算子

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}Y = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{A1.95}$$

满足

$$Q\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix} = 0 \tag{A1.96}$$

所以破缺的真空不破坏 Q 的规范不变性。与 Q 相应的规范变换是

$$e^{-iQ\theta} = e^{-i(T_3+\frac{1}{2}Y)\theta} \tag{A1.97}$$

拉氏量 $\mathscr{L}$ 在 Q 的规范变换下当然也是不变的，所以，电荷守恒仍能保持最后一项。

$$\mathscr{L}_m = -Ge[\bar{R}\Phi^+ L + \bar{L}\Phi R] \tag{A1.98}$$

通过 Higgs 场和轻子的耦合给出轻子质量（请读者检验 $\mathscr{L}_m$ 的 SU（2）$\times U$（1）不变性和 Lorentz 不变性）。

现在，τ_1，τ_2，τ_3 和 Y 都是破坏真空的生成元，但由于

$$Y\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix} = -\tau_3\begin{pmatrix}0 \\ v\end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

可见 $Y\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ 和 $\tau_3\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$ 是同一个矢量，从而非零的 $L_\alpha v$ 做成的子空间不是四维的，而是三维的。于是根据 § A1 -3 证明的定理，必定存在经典场 ξ_1，ξ_2，ξ_3，使得 φ 变成么正规范的 φ' 参考（A1.70）：

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\varphi_2 + i\varphi_1\\ \varphi_4 - i\varphi_3\end{pmatrix} = e^{i\xi_i\frac{\tau_i}{2v}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \eta + v\end{pmatrix} = e^{i\xi_i\frac{\tau_i}{2v}}\varphi' \tag{A1.99}$$

作规范变换：

$$\left.\begin{aligned}&\varphi \to \varphi' = e^{-i\xi_i\frac{\tau_i}{2v}}\quad\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \eta + v\end{pmatrix}\\ &L \to L' = e^{-i\xi_i\frac{\tau_i}{2v}}L\\ &A^i_\mu \to A^{i'}_\mu(\text{见(A1.18)})\end{aligned}\right\} \tag{A1.100}$$

经过这个规范变换之后，得到么正规范的 $\mathscr{L}_m$：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_m &= -G_e\left[\bar{R}\frac{1}{\sqrt{2}}(0\quad v + \eta)e^{-i\xi_i\frac{\tau_i}{2v}}\quad L + \bar{L}e^{i\xi_i\frac{\tau_i}{2v}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + \eta\end{pmatrix}R\right]\\ &= -\frac{G_e v}{\sqrt{2}}\left[\bar{R}(0\quad 1)L + \bar{L}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}R\right] + \text{三次(三个经典场相乘) 以上的项}\\ &= -\frac{G_e v}{\sqrt{2}}\bar{e}^- e^- + \cdots\end{aligned} \tag{A1.101}$$

所以电子的质量是

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}} \tag{A1.102}$$

又，么正规范的 $\mathscr{L}_\varphi$ 是：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(0\quad v + \eta)\left(\overleftarrow{\partial}_\mu + \frac{i}{2}g'B_\mu + ig\frac{\tau_i}{2}A^{i'}_\mu\right)\\ &\quad\cdot\left(\overrightarrow{\partial}_\mu - \frac{i}{2}g'B_\mu - ig\frac{\tau_i}{2}A^{i'}_\mu\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + \eta\end{pmatrix} - V\left(\frac{(v + \eta)^2}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left[(0,\partial_\mu\eta) + (0,v + \eta)\frac{i}{2}g'B_\mu + (0,v + \eta)ig\frac{\tau_i}{2}A^{i'}_\mu\right]\\ &\quad\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\ \partial_\mu\eta\end{pmatrix} - \frac{i}{2}g'B_\mu\begin{pmatrix}0\\ v + \eta\end{pmatrix} - ig\frac{\tau_i}{2}A^{i'}_\mu\begin{pmatrix}0\\ v + \eta\end{pmatrix}\right] - V\left(\frac{(v + \eta)^2}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\eta\partial_\mu\eta + \frac{(v + \eta)^2}{2}(0\quad 1)\{(g'B_\mu + g\tau_i A^{i'}_\mu)\right.\\ &\quad\left.\cdot(g'B_\mu + g\tau_i A^{i'}_\mu)\}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] - V\left(\frac{(v + \eta)^2}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\eta\partial_\mu\eta + \frac{v^2}{4}\{(g'B_\mu - gA^{3'}_\mu)(g'B\mu - gA^{3'}_\mu)\right.\\ &\quad\left. + g^2A^{1'}_\mu A^{1'}_\mu + g^2A^{2'}_\mu A^{2'}_\mu\}\right] + (\text{三次以上项}) - V\left(\frac{(v + \eta)^2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{v^2}{4}(g^2 + g'^2) Z_\mu^{02} + \frac{v^2}{2} g^2 W_\mu^+ W_\mu^-\right]$$

$$+ (\text{三次以上项}) - V\left(\frac{(v+\eta)^2}{2}\right) \tag{A1.103}$$

这里定义 $W^\pm$，Z^0 如下：

$$\left.\begin{aligned} W_\mu^+ &= (A_\mu^{1'} - iA_\mu^{2'})/\sqrt{2} \\ W_\mu^- &= (A_\mu^{1'} + iA_\mu^{2'})/\sqrt{2} \\ Z_\mu^0 &= \frac{-gA_\mu^{3'} + g'B_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{aligned}\right\} \tag{A1.104}$$

另外再定义与 Z_μ^0 正交的 A_μ：

$$A_\mu = \frac{gB_\mu + g'A_\mu^{3'}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{A1.105}$$

于是取么正规范后：

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{\text{规范}} + \mathscr{L}_\varphi = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_v^{i'} - \partial_v A_\mu^{i'})(\partial_\mu A_v^{i'} - \partial_v A_\mu^{i'}) - \cdots \\ &-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_v - \partial_v B_\mu)(\partial_\mu B_v - \partial_v B_\mu) \\ &-\frac{1}{2}\partial_\mu \eta \partial_\mu \eta - \frac{v^2}{8}(g^2 + g'^2) Z_\mu^{02} - \frac{v^2}{4} g^2 W_\mu^+ W_\mu^- \\ &- V\left(\frac{(v+\eta)^2}{2}\right) + \cdots \\ = &-\frac{1}{2}(\partial_\mu W_v^+ - \partial_v W_\mu^+)(\partial_\mu W_v^- - \partial_v W_\mu^-) - \frac{v^2}{4} g^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \cdots \\ &-\frac{1}{4}(\partial_\mu Z_v^0 - \partial_v Z_\mu^0)(\partial_\mu Z_v^0 - \partial_\mu Z_\mu^0) - \frac{v^2}{8}(g^2 + g'^2) Z_\mu^0 Z_\mu^0 \\ &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_v - \partial_v A_\mu)(\partial_\mu A_v - \partial_v A_\mu) - V\left(\frac{(v+\eta)^2}{2}\right) + \cdots \end{aligned} \tag{A1.106}$$

立刻看到，$W_\mu^\pm$ 获得静止质量：

$$m_W^2 = \frac{v^2}{4} g^2 \rightarrow m_W = \frac{vg}{2} \tag{A1.107}$$

Z_μ^0 获得静止质量：

$$m_z^2 = \frac{v^2}{4}(g^2 + g'^2) \rightarrow m_z = \frac{v}{2}\sqrt{g^2 + g'^2} \tag{A1.108}$$

A_μ 的静止质量为 0

$$m_A^2 = 0 \tag{A1.109}$$

说明 A_μ 是光子。

选取么正规范后的 $\mathscr{L}_{\text{轻子}}$：

$$\mathscr{L}_{\text{轻子}} = -\bar{R}\gamma_\mu\left(\partial_\mu + ig'\frac{g'Z_\mu^0 + gA_\mu}{\sqrt{g^2 + g'^2}}\right)R$$

$$
-[\gamma_\mu\Big(\partial_\mu+\frac{i}{2}g'\frac{g'Z_\mu^0+gA_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}-ig\frac{\tau_3}{2}\frac{g'A_\mu-gZ_\mu^0}{\sqrt{g^2+g'^2}}
$$

$$
-ig\frac{\tau_1'}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^++W_\mu^-)-ig\frac{\tau_2}{2}\frac{i}{\sqrt{2}}(W_\mu^+-W_\mu^-)\Big)L
$$

$$
=-\bar{e}_R\gamma_\mu\partial_\mu e_R^- -\bar{e}_L\gamma_\mu\partial_\mu e_L^- -\bar{\nu}_L\gamma_\mu\partial_\mu\nu_L
$$

$$
-\frac{ig'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu^0\bar{e}_R\gamma_\mu e_R^- -\frac{igg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu\bar{e}_R\gamma_\mu e_R^- -\frac{igg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu\bar{e}_L\gamma_\mu e_L^-
$$

$$
-\frac{ig'^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu^0\Big(\frac{\bar{e}_L\gamma_\mu e_L^-}{2}+\frac{\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L}{2}\Big)
$$

$$
-\frac{ig^2}{\sqrt{g^2+g'^2}}Z_\mu^0\Big(\frac{\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L}{2}-\frac{\bar{e}_L\gamma_\mu e_L^-}{2}\Big)
$$

$$
+ig\frac{1}{2\sqrt{2}}(W_\mu^++W_\mu^-)(\bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L^-+\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L)
$$

$$
+ig\frac{1}{2\sqrt{2}}(W_\mu^+-W_\mu^-)(\bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L^- -\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L)
$$

$$
=-\bar{e}^-\gamma_\mu\partial_\mu e^- -\bar{\nu}_L\gamma_\mu\partial_\mu\nu_L-\frac{igg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}A_\mu\bar{e}^-\gamma_\mu e^-
$$

$$
+ig\frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^+\bar{\nu}_L\gamma_\mu e_L^-+W_\mu^-)\bar{e}_L\gamma_\mu\nu_L)
$$

$$
-i\sqrt{g^2+g'^2}\frac{Z_\mu^0}{2}\{\bar{\nu}\gamma_\mu\frac{1+\gamma_5}{2}\nu+\bar{e}\gamma_\mu\Big[\Big(2\sin^2\theta_W-\frac{1}{2}\Big)-\frac{\gamma_5}{2}\Big]e\} \quad (A1.110)
$$

头两项是 e^- 和 ν_L 的自由拉氏量（不含电子质量项）。A_μ 项是 e^- 的电磁耦合项，而且电荷是

$$
e=\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}=g\sin\theta W,\qquad \tan\theta W=\frac{g'}{g} \quad (A1.111)
$$

Z_μ^0 项是中性流项。$W^\pm$ 项是

$$
\frac{ig}{\sqrt{2}}\Big(W_\mu^+\bar{\nu}\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}e^-+W_\mu^-\bar{e}^-\gamma_\mu\frac{(1+\gamma_5)}{2}\nu\Big) \quad (A1.112)
$$

与普通的普适费米相互作用比较，得到

$$
\frac{G}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8m_W^2}=\frac{1}{2v^2}\qquad G=1.10\times10^{-5}m_p^{-2} \quad (A1.113)
$$

m_p 是质子质量。

实验上得到：

$$
\sin^2\theta W\cong0.24 \quad (A1.114)
$$

$$
m_W^2=\frac{1}{4\sqrt{2}G}g^2=\frac{e^2}{4\sqrt{2}G}\frac{1}{\sin^2\theta W}
$$

实验上得到：

$$
\left.\begin{aligned} m_W&\cong80\text{GeV}\\ m_z&\cong90\text{GeV}\end{aligned}\right\} \quad (A1.115)
$$

理论预言与实验符合符好。$W-S$ 模型同样可用于 μ^-，ν_μ（$\tau^-\nu_\tau$），只是把 e^-，ν_e 换成 μ^-，ν_μ（τ^-，ν_τ），把耦合常数 G_e 换成 G_μ（G_τ）。

GIM 模型

也选取 $SU(2)\times U(1)$ 规范群：

$$L^{(1)}=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}\mu\\ d_c\end{pmatrix}\qquad T=\frac{1}{2}\qquad \frac{Y}{2}=\frac{1}{6}$$

$$L^{(2)}=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix}c\\ s_c\end{pmatrix}\qquad T=\frac{1}{2}\qquad \frac{Y}{2}=\frac{1}{6}\tag{A1.116}$$

$$d_c=d\cos\theta_c+s\sin\theta_c$$

$$s_c=-d\sin\theta_c+s\cos\theta_c\tag{A1.117}$$

θ_c 是 Cabibbo 角。

$$u_R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)u\qquad T=0\qquad \frac{Y}{2}=\frac{2}{3}$$

$$c_R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)c\qquad T=0\qquad \frac{Y}{2}=\frac{2}{3}$$

$$d_{cR}=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)d_c\qquad T=0\qquad \frac{Y}{2}=-\frac{1}{3}$$

$$s_{cR}=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)s_c\qquad T=0\qquad \frac{Y}{2}=-\frac{1}{3}\tag{A1.118}$$

于是按标准写法：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\text{quark}}=&-\bar{L}^{(1)}\gamma_\mu\left(\partial_\mu-ig'\frac{1}{6}B_\mu-ig\frac{\tau i}{2}A^i_\mu\right)L^{(1)}\\&-\bar{L}^{(2)}\gamma_\mu\left(\partial_\mu-ig'\frac{1}{6}B_\mu-ig\frac{\tau i}{2}A^i_\mu\right)L^{(2)}\\&-\bar{u}_R\gamma_\mu\left(\partial_\mu-ig'\frac{2}{3}B_\mu\right)u_R-\bar{c}_R\gamma_\mu\left(\partial_\mu-ig'\frac{2}{3}B_\mu\right)c_R\\&-\bar{d}_{cR}\gamma_\mu\left(\partial_\mu+ig'\frac{1}{3}B_\mu\right)d_{cR}-\bar{s}_{cR}\gamma_\mu\left(\partial_\mu+ig'\frac{1}{3}B_\mu\right)s_{cR}\end{aligned}\tag{A1.119}$$

A^i_μ，B_μ 又可通过下式化成 $W^\pm_W$，Z^0_μ，A_μ（具体形式这里从略）：

$$\begin{pmatrix}A^1_\mu\\ A^2_\mu\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}W^+_\mu+W^-_\mu\\ iW^+_\mu-iW^-_\mu\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A^3_\mu\\ B_\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta W & \sin\theta W\\ -\sin\theta W & \cos\theta W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_\mu\\ A_\mu\end{pmatrix}\tag{A1.120}$$

由于不但 d，s 有静止质量，而且 u，c 也有静止质量，所以必须写出 quark 与 φ 的最一般的耦合形式。为此，除了

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varphi_2 + i\varphi_1 \\ \varphi_4 - i\varphi_3 \end{pmatrix} \qquad T = \frac{1}{2}, Y = 1$$

外，还需要一个二重态，这个二重态可以自 φ 得到：

$$\tilde{\varphi} = i\tau_2\varphi^* = i\tau_2 \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varphi_2 - i\varphi_1 \\ \varphi_4 + i\varphi_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \varphi_4 + i\varphi_3 \\ -\varphi_2 + i\varphi_1 \end{pmatrix} \qquad T = \frac{1}{2}, Y = 1 \qquad (A1.121)$$

在规范变换时：

$$\varphi \to \varphi' = e^{-i\frac{\tau_i}{2}\theta_i - i\frac{1}{2}\theta_Y}\varphi$$

$$\to i\tau_2\varphi^* = i\tau_2 e^{i\frac{\tau_i^*}{2}\theta_i + i\frac{1}{2}\theta_Y}\varphi^* = e^{-i\frac{\tau_i}{2}\theta_i + i\frac{1}{2}\theta_Y} i\tau_2\varphi^*$$

即

$$\tilde{\varphi} \to \tilde{\varphi}' = e^{-i\frac{\tau_i}{2}\theta_i + i\frac{1}{2}\theta_Y}\tilde{\varphi} \qquad (A1.122)$$

这就足以证明 $\tilde{\varphi}$ 的变换性质是 $T=\frac{1}{2}$（即 SU（2）变换性质和 φ 一样），$Y=-1$。在么正规范下：

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \nu + \eta \end{pmatrix}, \tilde{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \nu + \eta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A1.123)$$

现在利用 Higgs 场与 quark 耦合给出 quark 质量，取 $\mathscr{L}_m$ 为：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_m = & -G_u[\bar{L}^{(1)}\tilde{\varphi}u_R + \bar{u}_R\bar{\tilde{\varphi}}L^{(1)}] - G_c[\bar{L}^{(2)}\tilde{\varphi}c_R + \bar{c}_R\bar{\tilde{\varphi}}L^{(2)}] \\ & - G_{d_c}[\bar{L}^{(1)}\varphi d_{cR} + \bar{d}_{cR}\bar{\varphi}L^{(1)}] - G_{s_c}[\bar{L}^{(2)}\varphi s_{cR} + \bar{s}_{cR}\bar{\varphi}L^{(2)}] \\ & - G_{ds}[\bar{L}^{(1)}\varphi s_{cR} + \bar{d}_{cR}\bar{\varphi}L^{(2)}] - G_{sd}[\bar{L}^{(2)}\varphi d_{cR} + \bar{s}_{cR}\bar{\varphi}L^{(1)}] \end{aligned} \qquad (A1.124)$$

在么正规范：

$$\mathscr{L}_m = -\frac{G_u}{\sqrt{2}}(\nu+\eta)\bar{u}u - \frac{G_c}{\sqrt{2}}(\nu+\eta)\bar{c}c$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}[G_{dc}\cos^2\theta_c + G_{sc}\sin^2\theta_c - (G_{ds}G_{sd})\sin\theta_c\cos\theta_c](\nu+\eta)\bar{d}d$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}[G_{dc}\sin^2\theta_c + G_{sc}\cos^2\theta_c + (G_{ds} + G_{sd})\sin\theta_c\cos\theta_c](\nu+\eta)\bar{s}s$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}[G_{ds}\cos^2\theta_c - G_{sd}\sin^2\theta_c + (G_{d_c} - G_{s_c})\sin\theta_c\cos\theta_c](\nu+\eta)\bar{d}s$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}[-G_{ds}\sin^2\theta_c + G_{sd}\cos^2\theta_c + (G_{dc} - G_{s_c})\sin\theta_c\cos\theta_c](\nu+\eta)\bar{s}d$$

u，d，s，c 应是质量本征态，交叉项应为0，所以有：

$$(G_{d_c} - G_{s_c})\ \sin\theta_c\cos\theta_c = -G_{ds}\cos^2\theta_c + G_{sd}\sin^2\theta_c = G_{ds}\sin^2\theta_c - G_{sd}\cos^2\theta_c$$

$$\therefore \qquad G_{ds} = G_{sd} = (G_{sc} - G_{dc})\ \frac{1}{2}\tan 2\theta_c$$

于是

$$G_d = G_{d_c}\cos^2\theta_c + G_{s_c}\sin^2\theta_c - (G_{ds} + G_{sd})\ \sin\theta_c\cos\theta_c$$

$$= \frac{G_{d_c}\cos^2\theta_c - G_{s_c}\sin^2\theta_c}{\cos 2\theta_c}$$

$$G_s = G_{d_c}\sin^2\theta_c + G_{s_c}\cos^2\theta_c + (G_{ds} + G_{sd})\sin\theta_c\cos\theta_c$$

$$= \frac{-G_{d_c}\sin^2\theta_c + G_{s_c}\cos^2\theta_c}{\cos 2\theta_c}$$

$$\therefore \qquad \mathscr{L}_m = -\frac{G_u}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)\,\bar{u}u - \frac{G_c}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)\,\bar{c}c$$

$$-\frac{G_d}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)\,\bar{d}d - \frac{G_s}{\sqrt{2}}(\nu + \eta)\,\bar{s}s$$

$$\therefore \qquad m_u = \frac{G_u}{\sqrt{2}}v,\ m_c = \frac{G_c}{\sqrt{2}}v,\ m_d = \frac{G_d}{\sqrt{2}}v,\ m_s = \frac{G_s}{\sqrt{2}}v \tag{A1.125}$$

与（A1.102）类似。

参考文献

1 S. Abers, B. W. Lee, Phys. Reports, C9 (1973) 1.

附录二 1PI 顶角生成泛函发散部分 $\tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)$ 的一般形式

在这个附录里，我们将证明在规范群为半单群的情况下，没有 Higgs 场的 Slavnov 联立方程组。（见（8.91））

$$\tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n) * \tilde{S} + \tilde{S} * \tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n) = 0 \tag{A2.1}$$

$$-F^a_\alpha \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta K_\alpha} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta \bar{u}_a} = 0$$

的物理的通解取如下形式（见（8.97））：

$$\tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n) = G[A] + \mathscr{G}\mathscr{F}\ [A, u, 0, K_\alpha - F^a_\alpha \bar{u}_a, L]; \tag{A2.2}$$

有 Higgs 场的 Slavnov 联立方程组（见（8.124））。

$$\tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n) * \tilde{S} + \tilde{S} * \tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n) = 0 \tag{A2.3}$$

$$-F^a_\alpha \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta K_\alpha} - c^a_l \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta K^s_l} = 0$$

$$-c^{a+}_l \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta K^{s+}_l} - \frac{\delta \tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)}{\delta \bar{u}_a} = 0$$

的物理的通解取如下形式（见（8.127））：

$$\tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n) = G[A, s, s^+] + \mathscr{G}\mathscr{F}\ [A, s, s^+, u, 0, K^A_\alpha - F^a_\alpha \bar{u}_a, K^s_l - c^a_l \bar{u}_a, K^{s+}_l - c^{a+}_l \bar{u}_a, L] \tag{A2.4}$$

注意（A2.3），（A2.4），比（A2.1）（A2.2）只是多了与 Higgs 场有关的部分①。

这里没有给出有 Fermi 场时的证明，但由于 Fermi 场与 A^l_μ 的耦合项类似于 Higgs 场与 A^l_μ 的耦合项，同时，s，s^+ 换成 ψ，$\bar{\psi}$，K^{s+}_l，K^s_l 换成 $\bar{\mathscr{S}}$，$\mathscr{S}$（见§8-9），形式相像，只是对易关系换成反对易关系而已。所以可以仿照有 Higgs 场的方法来导出§8-9 的通解（8.148）。

在有 Abel 子群的情况，有的解不能写成（A2.4）的开式，§8-10 中已作过讨论，这个附录不讨论这个问题。

现在看一看，在没有插入算子的情况下，对于满足（A2.1），（A2.3）的 $\tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)$ 还有什么要求。

1. 在第五单和第八章都讨论过，一个可重正化的理论中，外线多于四条的顶角都是不发散的。所以 $\tilde{\Gamma}^{div}_{(n+1)}(S^0_n)$ 中的每一个项最多只能是四个场量相乘，不会超出四个。

---

① Joglekar 和 B. W. Lee 用很繁长的推理证明过（A2.2）是（A2.1）的通解。但他们的文章[1]中并没有讨论有 Higgs 场的情况。

2. $\mathscr{L}_I$ 中每一个顶角项的量纲为 4，积分 d^4x 的理纲为 -4，互相抵消。于是，在任意一个复杂的顶角图中，对每个顶点进行积分，则最后量纲必定仍为 4（不计最后 d^4x 积分的量纲）。所以 $\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$ 的量纲应该是 4。

3. (S^0_n) 中每一项的 $F-P$ 荷为 0，所以微扰做出来的 $\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$ 的 $F-P$ 荷必定也是 0。

4. 此外，$\tilde{\Gamma}$ 和 S 一样，应该是标量的定域泛函（抵消项都是定域泛函，见第五章）。

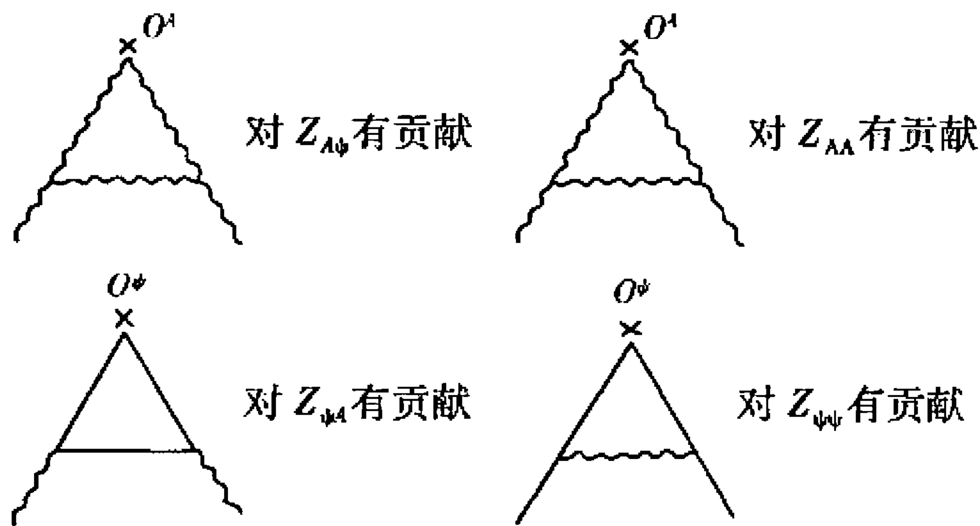
后面的证明将用到这几个要求。

这里我们还要说一下有关插入算子 O_i 的问题。所谓插入算子 O_i 是指附录三的 $O^{\psi}_{\mu_1,\cdots,\mu_N}$（见（A3.45）），$O^{A}_{\mu_1,\cdots,\mu_N}$（见（A3.47））等等。它们都是来自光锥展开。当然原则上也包括来自其他来源的插入算子。我们注意到以下几点：

1. $N>2$ 时，O_i 的量纲就会大于 4。如果把它们看做是原始顶点，则与 O_i 相应的 $\delta_i>0$。我们知道，在费曼图中这种顶点出现的次数若是不受限制，则这个理论就必定是不可重正化的，所以不能把插入算子 O_i 与 S 中的原始顶点同等看待，O_i 在费曼图中出现的次数必须有限。事实上附录三和有关的讨论中，插入算子 O_i 只在费曼图中出现一次，而且还采用了 $x^2\to0$ 这个条件，消去了很多项（如果把 O_i 与原始顶点同等看待，就没有 $x^2\to0$ 的条件）。这就不会由于 $\delta_i>0$ 而发生不可重正化的问题。

2. 在附录三中看到，插入算子在重正化时可能混合，例如附录三中有：

$$
\begin{aligned}
O^{\psi^0} &= Z_{\psi\psi}O^{\psi} + Z_{\psi A}O^{A} \\
O^{A^0} &= Z_{A\psi}O^{\psi} + Z_{AA}O^{A}
\end{aligned}
\tag{A2.5}
$$

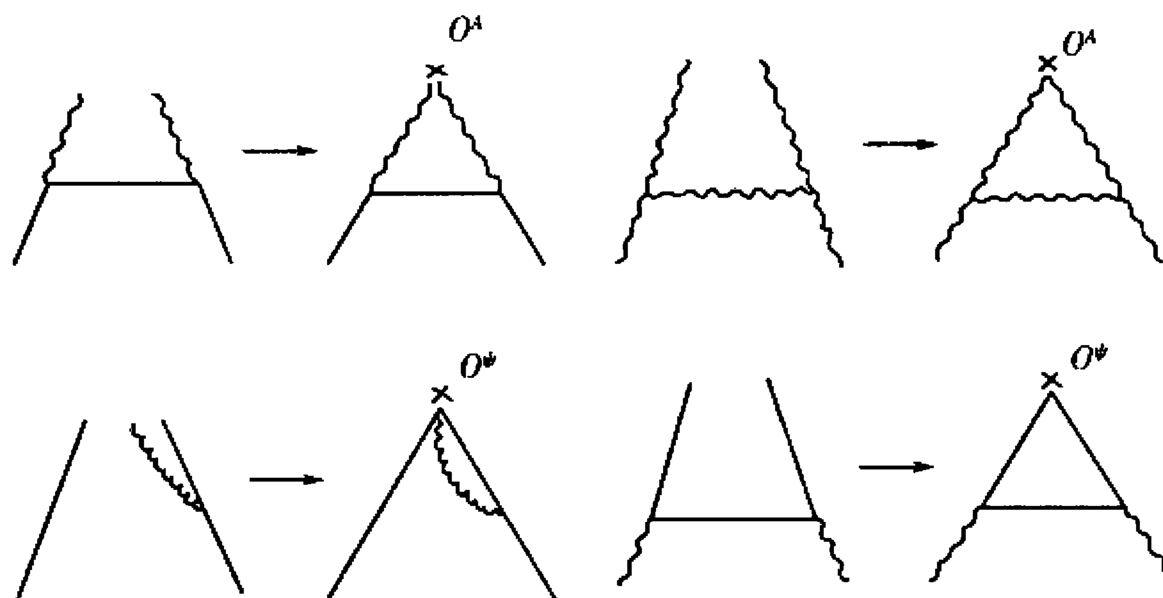


一般情况下则有

$$
O^0_i = \sum_j Z_{ij}O_j \tag{A2.6}
$$

$\sum_j$ 是有限个项求和，因为可以与 O_i 混合的 O_j 总是只有有限个。

现在，设想有一个没有插入算子的理论，而且是已经证明可以重正化的。则这个理论中再插入算子 O_i 时，带有 O_i 的格林函数无非是把已经重正化的图形的有关的腿与 O_i 相连。例如：



等等。

相连以后，就又出现新的封闭圈，出现新的发散。这种新的发散只是在与 O_i 相连成圈之后才出现，因此完全可以通过 O_i 的重正化常数 Z_{ij}来消去这个发散。而且$\sum_j$为有限个项求和，重正化常数 Z_{ij}只有有限个，求出它们并没有困难。

因此看到，在 O_i 只出现有限次的前提下，如果理论原先是可重正化的，则插入 O_i 后仍是可重正化的。O_i 的重正化的具体形式就是（A2.6）。（A2.5）是其特例。于是，含有插入算子 O_i 的格林函数是否可以重正化归结为引入插入算子以前的理论是否可以重正化。这就使问题简化，只须证明引入插入算子以前的理论可重正化就行了。所以在这个附录中，我们只需考虑没有插入算子的情况，即 $\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$的量纲为 4 的情况。

§ A2 －1　$\mathscr{G}\mathscr{F}=0$ 的更一般的证明

（6.93）的证明只涉及一个特殊情况，现在给出一个一般性的证明。

设

$$\mathscr{G}=\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta}{\delta\varphi_i}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta}{\delta K_i}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta u_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}\tag{A2.7}$$

（在有费米场时，K_i 也包括 $\mathscr{L}_i$，$\bar{\mathscr{L}}_i$）则有

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\right)&=\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\left(\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta\varphi_i\delta K_j}\right)+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\left(\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta K_i\delta K_j}\right)\\&\quad+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\left(\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta u_\alpha\delta K_j}\right)+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\left(\frac{\delta^2\tilde{S}}{\delta L_\alpha\delta K_j}\right)\\&=\frac{\delta}{\delta K_j}\left(-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\right)\\&\quad-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\left(\frac{\delta}{\delta K_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\right)-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\right)-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\left(\frac{\tilde{\delta}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\right)\end{aligned}$$

$$-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\left(\frac{\delta}{\delta u_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\right)=-\left(\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\right)$$

（在有费米场，K 包括 $\mathscr{L}_i$，$\bar{\mathscr{L}}_i$ 时，此式也是成立的）。因此

$$\left(\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\right)=0 \tag{A2.8}$$

同样的方法可以证明（请读者自己检验）：

$$\left(\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_j}\right)=0,\quad\left(\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\beta}\right)=0,\quad\left(\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\beta}\right)=0 \tag{A2.8$'$}$$

显然（A2.8），（A2.8）′有普遍性，在有 Higgs 场时（有 s，s^+，K^s，K^{s+}）和有 Fermi 场时（有 ψ，$\bar{\psi}$，$\mathscr{L}$，$\bar{\mathscr{L}}$）都成立的。

以（A2.8），（A2.8）′作为根据，就有（请读者自己检验）：

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}\cdot\mathscr{G}=&\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta}{\delta\varphi_i}+\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta}{\delta K_i}+\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta u_\alpha}+\mathscr{G}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}\\
=&-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\frac{\delta}{\delta\varphi_j}\frac{\delta}{\delta\varphi_i}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_j}\frac{\delta}{\delta K_j}\frac{\delta}{\delta\varphi_i}\\
&-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta\varphi_i}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta\varphi_i}\\
&+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\frac{\delta}{\delta\varphi_j}\frac{\delta}{\delta K_i}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_j}\frac{\delta}{\delta K_j}\frac{\delta}{\delta K_i}\\
&+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta K_i}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta k_i}\\
&+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\frac{\delta}{\delta\varphi_j}\frac{\delta}{\delta u_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_j}\frac{\delta}{\delta K_j}\frac{\delta}{\delta u_\alpha}\\
&+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\beta}\frac{\delta}{\delta u_\beta}\frac{\delta}{\delta u_\alpha}+\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\beta}\frac{\delta}{\delta L_\beta}\frac{\delta}{\delta u_\alpha}\\
&-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_j}\frac{\delta}{\delta\varphi_j}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\varphi_j}\frac{\delta}{\delta K_j}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}\\
&-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\beta}\frac{\delta}{\delta u_\beta}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}-\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\beta}\frac{\delta}{\delta L_\beta}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}=0
\end{aligned} \tag{A2.9}$$

（首末两项和第 6、第 11 项由于 K_i，K_j 反对易，u_α，u_β 反对易，所以等于零。其余各项互相抵消）。证毕。可见（A2.9）是一般地成立的。

§ A2 - 2 $\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$ 的一般形式——没有 Higgs 场时①

取

$$\widetilde{S}[A,u,\bar{u},K,L] = \mathrm{L}_{\text{inv}}[A] + \bar{u}_\alpha M_{\alpha\beta}u_\beta + K_i(\Delta^\alpha_i + gt^\alpha_{ij}A_j)u_\alpha + \frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}L_\alpha u_\beta u_\gamma \tag{A2.10}$$

如果 $\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$满足（A2.1），则（A2.1）的第二个方程可以立刻解出，得到

$$\widetilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n) = \Gamma[A,u,0,K_\alpha - F^a_\alpha\bar{u}_\alpha,L]。\tag{A2.11}$$

既然 $K_\alpha - F^a_\alpha\bar{u}_\alpha$ 是以组合的形式出现的，为了简便，我们可以令 $\bar{u}=0$，于是求 Γ〔A，u，0，$K_\alpha - F^a_\alpha\bar{u}_\alpha$，$L$〕就简化为求 Γ〔A，u，0，K_α，L〕，求得后再把 K_α 还原为 $K_\alpha - F^a_\alpha\bar{u}_\alpha$ 就可以了。

在具体讨论 Γ 的可能形式之前，我们先把有关的各种量，包括场量以及经典源 K，L 等的 $F-P$ 荷和量纲列表如下：

	A_i（以及其他场量）	u	$\bar{u}$	K（以及 $\mathscr{L}$，$\bar{\mathscr{L}}$）	L	F（以及 c）	Δ
$F-P$ 荷	0	1	-1	-1	-2	0	0
量纲	1	1	1	2	2	1	1

于是，根据前一节最后部分所列举的四个要求，定域泛函 Γ 的一般形式是

$$\Gamma[A,u,0,K_\alpha,L] = F[A] + K_iR^\alpha_i[A]u_\alpha + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma L_\alpha \tag{A2.12}$$

此处 F〔A〕是 A 的量纲为 4、$F-P$ 荷为 0 的标量定域泛函；

R^α_i〔A〕是 A 的量纲为 1、$F-P$ 荷为 0 的两阶张量定域泛函；

$$h_{\alpha\beta\gamma} \equiv h_{\alpha\gamma\beta}\delta^4(x_\alpha - x_\beta)\delta^4(x_\alpha - x_\gamma) \tag{A2.13}$$

$h_{\alpha\beta\gamma}$是一个三级数字张量，且对于第二、第三指标（这里是 $\beta\gamma$）是反对称的。把（A2.12）代入 $\mathscr{G}\cdot\Gamma=0$，得到（根据（A2.7））：

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}\Gamma &= \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta F[A]}{\delta A_i} - K_j\frac{\delta\widetilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta R^\alpha_j[A]}{\delta A_i}u_\alpha + \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta A_i}R^\alpha_j[A]u_\alpha \\
&\quad - \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta L_\alpha}K_iR^\alpha_i[A] + \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta L_\beta}h_{\alpha\beta\gamma}u_\gamma L_\alpha + \frac{\delta\widetilde{S}}{\delta u_\alpha}\cdot\frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma \\
&= \left\{(\Delta^\alpha_i + gt^\alpha_{ij}A_j)\frac{\delta F[A]}{\delta A_i} + \frac{\delta\mathrm{L}_{\text{inv}}[A]}{\delta A_i}R^\alpha_j[A]\right\}u_\alpha \\
&\quad + \left\{-(\Delta^\beta_i + gt^\beta_{ik}A_k)\frac{\delta R^\alpha_j[A]}{\delta A_i} - \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}R^\gamma_j[A]\right. \\
&\quad \left. + gt^\beta_{jk}R^\alpha_k[A] - \frac{1}{2}(\Delta^\gamma_j + gt^\gamma_{jk}A_k)h_{\gamma\beta\alpha}\right\}u_\beta u_\alpha K_j
\end{aligned}$$

---

① 在〔2〕中给出一个较简要的严格证明。

$$+\frac{g}{2}\{f_{\beta\sigma\rho}h_{\alpha\beta\gamma}+f_{\alpha\beta\sigma}h_{\beta\rho\gamma}\}u_{\sigma}u_{\rho}u_{\gamma}L_{\alpha}=0 \tag{A2.14}$$

由于u，K，L互相独立，所以得到如下联立方程：

$$\left\{(\Delta_i^{\alpha}+gt_{ij}^{\alpha}A_j)\frac{\delta F[A]}{\delta A_i}+\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]}{\delta A_i}R_i^{\alpha}[A]\right\}u_{\alpha}=0 \tag{A2.15}$$

$$\left\{-(\Delta_i^{\beta}+gt_{ik}^{\beta}A_k)\frac{\delta R_j^{\alpha}[A]}{\delta A_i}-\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}R_j^{\gamma}[A]\right.$$

$$\left.+gt_{jk}^{\beta}R_k^{\alpha}[A]-\frac{1}{2}(\Delta_j^{\gamma}+gt_{jk}^{\gamma}A_k)h_{\gamma\beta\alpha}\right\}u_{\beta}u_{\alpha}K_j=0 \tag{A2.16}$$

$$\{f_{\sigma\alpha\beta}h_{\delta\sigma\gamma}+f_{\delta\sigma\alpha}h_{\sigma\beta\gamma}\}u_{\alpha}u_{\beta}u_{\gamma}L_{\delta}=0 \tag{A2.17}$$

求解 $R_i^{\alpha}[A]$

考察（A2.15），$F[A]$中只含有A_i，所以

$$(\Delta_i^{\alpha}+gt_{ij}^{\alpha}A_i)u_{\alpha}\frac{\delta F[A]}{\delta A_i}=\mathscr{G}F[A]$$

从而自（A2.15）得到

$$\mathscr{G}\left(\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]}{\delta A_i}R_i^{\alpha}[A]u_{\alpha}\right)=0$$

$$\rightarrow\left\{(\Delta_j^{\beta}+gt_{jk}^{\beta}A_k)\frac{\delta}{\delta A_j}\left(\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]}{\delta A_i}R_i^{\gamma}[A]\right)\right.$$

$$\left.+\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]}{\delta A_i}R_i^{\alpha}[A]\right\}u_{\beta}u_{\gamma}=0$$

这里对β，γ求和，由于$u_{\beta}u_{\gamma}$反对易，又由于$u_{\beta}u_{\gamma}$与$u_{\beta'}u_{\gamma'}$互相独立（$\beta\neq\beta'$，$\gamma\neq\gamma'$），所以有：

$$\left\{(\Delta_j^{\beta}+gt_{jk}^{\beta}A_k)\frac{\delta}{\delta A_j}\left(\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]}{\delta A_i}R_i^{\gamma}[A]\right)+\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]}{\delta A_i}R_i^{\alpha}[A]\right\}_{\boxed{\beta\gamma}}=0 \tag{A2.18}$$

$\boxed{\beta\gamma}$表示β，γ反对称化。

再利用$\mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]$的规范不变性（见（4.31））：

$$(\Delta_j^{\beta}+gt_{jk}^{\beta}A_k)\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]}{\delta A_j}=0$$

（A2.18）式又可写成：

$$\left\{(\Delta_j^{\beta}+gt_{jk}^{\beta}A_k)\frac{\delta R_i^{\gamma}[A]}{\delta A_j}-\frac{\delta(\Delta_i^{\beta}+gt_{ik}^{\beta}A_k)}{\delta A_j}R_j^{\gamma}[A]\right.$$

$$\left.+\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}R_i^{\alpha}[A]\right\}_{\boxed{\beta\gamma}}\frac{\delta \mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]}{\delta A_i}=0 \tag{A2.19}$$

由于$\mathrm{L}_{\mathrm{inv}}[A]$只有（4.31）所表达的规范不变性，所以（A2.19）中的括号｛　｝必须取如下形式：

$$\left\{(\Delta_j^{\beta}+gt_{jk}^{\beta}A_k)\frac{\delta R_i^{\gamma}[A]}{\delta A_j}-\frac{\delta(\Delta_i^{\beta}+gt_{ik}^{\beta}A_k)}{\delta A_j}R_j^{\gamma}[A]+\frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}R_i^{\alpha}[A]\right\}_{\boxed{\beta\gamma}}$$

$$= \frac{1}{2}\alpha^{\lambda}_{\beta\gamma}(\Delta^{\lambda}_i + gt^{\lambda}_{im}A_m) \tag{A2.20}$$

其中

$$\alpha^{\lambda}_{\beta\gamma} = \alpha^{\underline{\lambda}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}\delta^4(x_\lambda - x_\beta)\delta^4(x_\lambda - x_\gamma) \tag{A2.21}$$

$\alpha^{\underline{\lambda}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}$是群空间的三级张量，$\underline{\lambda}$，$\underline{\beta}$，$\gamma$都是群参数。而且$\beta$，$\gamma$反对称：

$$\alpha^{\underline{\lambda}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}} = -\alpha^{\underline{\lambda}}_{\underline{\gamma}\underline{\beta}} \tag{A2.22}$$

再进一步分析R^{α}_i〔A〕，它量纲为1，F－P荷为0，所以应取如下形式：

$$R^{\alpha}_i[A] = b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_i + d^{\alpha}_{ik}A_k \tag{A2.23}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} b^{\alpha}_{\lambda} &= b^{\underline{\alpha}}_{\underline{\lambda}}\delta(x_\alpha - x_\lambda) \\ \Delta^{\lambda}_i &= -\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i - x_\lambda)\delta_{\underline{i}\underline{\lambda}} \end{aligned}\right\} \tag{A2.24}$$

所以

$$b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_i = \int b^{\underline{\alpha}}_{\underline{\lambda}}\delta(x_\alpha - x_\lambda)\mathrm{d}^4x_\lambda(-\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i - x_\lambda))\delta_{\underline{i}\underline{\lambda}} = -b^{\underline{\alpha}}_{\underline{i}}\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i - x_\alpha) \tag{A2.25}$$

同时，类似于（4.23）的t^j_{ik}，可定义：

$$d^{\alpha}_{ik} = d^{\underline{\alpha}}_{\underline{i}\underline{k}}\delta^4(x_i - x_\alpha)\delta^4(x_i - x_k)d_{\underline{i}\underline{k}} \tag{A2.26}$$

注意，只有i代表$A^{\underline{i}}_{\underline{i}}$（$x_i$）的指标时，方才有$\Delta^{\lambda}_i$项（即（A2.23）右方的第一项）出现。

现在把（A2.23）代入（A2.20），并使β，γ反对称化，得到：

$$\begin{aligned} &(\Delta^{\beta}_j + gt^{\beta}_{jk}A_k)d^{\gamma}_{ij} - (\Delta^{\gamma}_j + gt^{\gamma}_{ik}A_k)d^{\beta}_{ij} - gt^{\beta}_{jk}(b^{\gamma}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_j + d^{\gamma}_{jk}A_k) \\ &\quad + gt^{\gamma}_{ij}(b^{\beta}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_i + d^{\beta}_{ik}A_k) + gf_{\alpha\beta\gamma}(b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_i + d^{\alpha}_{ik}A_k) \\ &\quad = \alpha^{\lambda}_{\beta\gamma}(\Delta^{\lambda}_i + gt^{\lambda}_{im}A_m) \end{aligned} \tag{A2.27}$$

在（A2.27）中，含A_i的项与不含A_i的项又是互相独立的，所以得到如下联立方程：

$$\begin{aligned} &\Delta^{\beta}_j d^{\gamma}_{ij} - \Delta^{\gamma}_j d^{\beta}_{ij} - gt^{\beta}_{ij}b^{\gamma}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_j + gt^{\gamma}_{ij}b^{\beta}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_j \\ &\quad + gf_{\alpha\beta\gamma}b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_i - a^{\lambda}_{\beta\gamma}\Delta^{\lambda}_i = 0 \end{aligned} \tag{A2.28}$$

$$\begin{aligned} &gt^{\beta}_{jk}d^{\gamma}_{ij} - gt^{\gamma}_{jk}d^{\beta}_{ij} - gt^{\beta}_{ij}d^{\gamma}_{jk} + gt^{\gamma}_{ij}d^{\beta}_{jk} \\ &\quad + gf_{\alpha\beta\gamma}d^{\alpha}_{ik} - ga^{\lambda}_{\beta\gamma}t^{\lambda}_{ik} = 0 \end{aligned} \tag{A2.29}$$

把（A2.25），（A2.26）代入（A2.28），得到：

$$\begin{aligned} &\int \mathrm{d}^4x_j\{-(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_j - x_\beta)\delta_{\underline{j}\underline{\beta}})\cdot(d^{\underline{\gamma}}_{\underline{i}\underline{j}}\delta^4(x_i - x_\gamma)\delta^4(x_i - x_j)\delta_{\underline{i}\underline{j}}) \\ &\quad + (\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_j - x_\gamma)\delta_{\underline{j}\underline{\gamma}})\cdot(d^{\underline{\beta}}_{\underline{i}\underline{j}}\delta^4(x_i - x_\beta)\delta^4(x_i - x_j)\delta_{\underline{i}\underline{j}} \\ &\quad + gf_{\underline{i}\underline{\beta}\underline{j}}\delta^4(x_i - x_\beta)\delta^4(x_i - x_j)\delta_{\underline{i}\underline{j}}\cdot b^{\underline{\gamma}}_{\underline{j}}\partial_{\underline{j}}\delta^4(x_j - x_\gamma) \\ &\quad - gf_{i\gamma\underline{j}}\delta^4(x_i - x_\gamma)\delta^4(x_i - x_j)\delta_{\underline{i}\underline{j}}\cdot b^{\underline{\beta}}_{\underline{j}}\partial_{\underline{j}}\delta^4(x_j - x_\beta)\} \\ &\quad + \int \mathrm{d}^4x_\alpha\{-gf_{\underline{\alpha}\underline{\beta}\underline{\gamma}}\delta^4(x_\alpha - x_\beta)\delta^4(x_\alpha - x_\gamma)\cdot b^{\underline{\alpha}}_{\underline{i}}\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i - x_\alpha)\} \\ &\quad + \int \mathrm{d}^4x_\lambda\{a^{\underline{\lambda}}_{\underline{\beta}\underline{\gamma}}\delta^4(x_\lambda - x_\beta)\delta^4(x_\lambda - x_\gamma)\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i - x_\lambda)\delta_{\underline{i}\underline{\lambda}}\} = 0 \end{aligned}$$

整理后得到：

$$-(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\beta))\delta^4(x_i-x_\gamma)d^{\gamma}_{\underline{i}\beta}d_{i\underline{i}}+(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\gamma))\delta^4(x_i-x_\beta)d^{\beta}_{\underline{i}\gamma}d_{i\underline{i}}$$
$$+gf_{\underline{i}\beta\underline{i}}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\gamma))\delta^4(x_i-x_\beta)\delta_{i\underline{i}}b^{\gamma}_{\underline{i}}-gf_{\underline{i}\gamma\underline{i}}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\beta)\delta^4(x_i-x_\gamma)\delta_{i\underline{i}}b^{\beta}_{\underline{i}}$$
$$-\int d^4x_\alpha gf_{\alpha\beta\gamma}b^{\alpha}_{\underline{i}}[-\partial_{\underline{i}}(\delta^4(x_\alpha-x_i))\delta^4(x_\alpha-x_\beta)\delta^4(x_\alpha-x_\gamma)]\delta_{i\underline{i}}$$
$$+\int d^4x_\lambda a^{i}_{\beta\gamma}[-(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\lambda-x_i))\delta^4(x_\lambda-x_\beta)\delta^4(x_\lambda-x_\gamma)]\delta_{i\underline{i}}=0$$

通过部分积分：

$$\int d^4x_\alpha\cdot\partial_{\underline{i}}(\delta^4(x_\alpha-x_i)\delta^4(x_\alpha-x_\beta)\delta^4(x_\alpha-x_\gamma))$$
$$=\int d^4x_\alpha(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_i))\delta^4(x_\alpha-x_\beta)\delta^4(x_\alpha-x_\gamma)$$
$$+\int d^4x_\alpha\delta^4(x_\alpha-x_i)(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta))\delta^4(x_\alpha-x_\gamma)$$
$$+\int d^4x_\alpha\delta^4(x_\alpha-x_i)\delta^4(x_\alpha-x_\beta)(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\gamma))=0 \qquad (A2.30)$$

进一步整理后得到：

$$-(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\beta))\delta^4(x_i-x_\gamma)d^{\gamma}_{\underline{i}\beta}d_{i\underline{i}}+(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\gamma))\delta^4(x_i-x_\beta)d^{\beta}_{\underline{i}\gamma}d_{i\underline{i}}$$
$$+gf_{\underline{i}\beta\underline{i}}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\gamma))\delta^4(x_i-x_\beta)\delta_{i\underline{i}}b^{\lambda}_{\underline{i}}-gf_{\underline{i}\gamma\underline{i}}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\beta))\delta^4(x_i-x_\gamma)\delta_{i\underline{i}}b^{\beta}_{\underline{i}}$$
$$-gf_{\alpha\beta\gamma}b^{\alpha}_{\underline{i}}[(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\beta))\delta^4(x_i-x_\gamma)+\delta^4(x_i-x_\beta)(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\gamma))]\delta_{i\underline{i}}$$
$$+a^{i}_{\beta\gamma}[(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\beta))\delta^4(x_i-x_\gamma)+\delta^4(x_i-x_\beta)(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\gamma))]\delta_{i\underline{i}}=0$$

其中 $(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\beta))\delta^4(x_i-x_\gamma)$ 项与 $(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_i-x_\gamma))\delta^4(x_i-x_\beta)$ 项互相独立，所以又得到如下的关于张量的联立方程组：

$$\begin{aligned}&-d^{\gamma}_{\underline{i}\beta}d_{i\underline{i}}-gf_{\underline{i}\gamma\underline{i}}\delta_{i\underline{i}}b^{\beta}_{\underline{i}}-gf_{\alpha\beta\gamma}b^{\alpha}_{\underline{i}}\delta_{i\underline{i}}+a^{i}_{\beta\gamma}\delta_{i\underline{i}}=0\\&d^{\beta}_{\underline{i}\gamma}d_{i\underline{i}}+gf_{\underline{i}\beta\underline{i}}\delta_{i\underline{i}}b^{\gamma}_{\underline{i}}-gf_{\alpha\beta\gamma}b^{\alpha}_{\underline{i}}\delta_{i\underline{i}}+a^{i}_{\beta\gamma}\delta_{i\underline{i}}=0\end{aligned} \qquad (A2.31)$$

把 β，γ 交换，就看出（A2.31）的两个方程是同解方程。

自（A2.31）第一式有

$$-d^{\gamma}_{\underline{i}\beta}d_{i\underline{i}}=(gf_{\underline{i}\gamma\underline{i}}b^{\beta}_{\underline{i}}+gf_{\alpha\beta\gamma}b^{\alpha}_{\underline{i}}-a^{i}_{\beta\gamma})\delta_{i\underline{i}} \qquad (A2.32)$$

由于 $d_{i\underline{i}}$，$\delta_{i\underline{i}}$ 与 $d^{\gamma}_{\underline{i}\beta}$，$b^{\beta}_{\underline{i}}$，$f_{\alpha\beta\gamma}$，$a^{i}_{\beta\gamma}$ 的指标类型不同，所以（A2.32）要成立，就必定要求

$$d_{i\underline{i}}=\delta_{i\underline{i}} \qquad (A2.33)$$

当然，（A2.33）中可以有不同的系数，但这种系数可并入未知量 $d^{\gamma}_{\underline{i}\beta}$ 中去。

把（A2.33）代入（A2.26），得到

$$d^{\alpha}_{ik}=d^{\alpha}_{\underline{i}\underline{k}}\delta^4(x_i-x_\alpha)\delta^4(x_i-x_k)\delta_{k\underline{k}} \qquad (A2.34)$$

把（A2.33）代入（A2.32）得到

$$d^{\gamma}_{\underline{i}\beta}=g(-f_{\alpha\beta\gamma}b^{\alpha}_{\underline{i}}+f_{\gamma\underline{i}\underline{i}}b^{\beta}_{\underline{i}})+a^{i}_{\beta\gamma} \qquad (A2.35)$$

再把（4.23）的 t，（A2.21）的 a，（A2.34）的 d 都代入（A2.29），约去公因子 $g\delta^4(x_i-x_\beta)\delta^4(x_\beta-x_\gamma)\delta^4(x_\gamma-x_k)$，得到

$$f_{\underline{i}\beta\underline{k}}d^{\gamma}_{\underline{i}\underline{i}}-f_{\underline{i}\gamma\underline{k}}d^{\beta}_{\underline{i}\underline{i}}-f_{\underline{i}\beta\underline{i}}d^{\gamma}_{\underline{i}\underline{k}}+f_{\underline{i}\gamma\underline{i}}d^{\beta}_{\underline{i}\underline{k}}+f_{\alpha\beta\gamma}d^{\alpha}_{\underline{i}\underline{k}}-a^{i}_{\beta\gamma}f_{\underline{i}\lambda\underline{k}}=0 \qquad (A2.36)$$

又把（A2.35）代入（A2.36），代入后将看到，有10个项含 b，其中4个项直接互相抵消，6个项由于Jacobi恒等式而消去，所以最后写成（只剩下含 a 部分）：

$$f_{\underline{i}\beta\underline{k}}a^{\underline{i}}_{\underline{i}\gamma}-f_{\underline{i}\gamma\underline{k}}a^{\underline{i}}_{\underline{i}\beta}-f_{\underline{i}\beta\underline{i}}a^{\underline{i}}_{\underline{k}\gamma}+f_{\underline{i}\gamma\underline{i}}a^{\underline{i}}_{\underline{k}\beta}+f_{\underline{\alpha}\beta\gamma}a^{\underline{i}}_{\underline{k}\underline{\alpha}}-a^{\lambda}_{\beta\gamma}f_{\underline{i}\lambda\underline{k}}=0$$

或写成

$$(f_{\underline{i}\beta\underline{k}}a^{\underline{i}}_{\underline{i}\gamma}+f_{\underline{i}\underline{k}\gamma}a^{\underline{i}}_{\underline{i}\beta}+f_{\underline{i}\gamma\beta}a^{\underline{i}}_{\underline{i}\underline{k}})+(f_{\underline{i}\underline{i}\beta}a^{\underline{i}}_{\gamma\underline{k}}+f_{\underline{i}\underline{i}\gamma}a^{\underline{i}}_{\underline{k}\beta}+f_{\underline{i}\underline{i}\underline{k}}a^{\underline{i}}_{\beta\gamma})=0 \tag{A2.37}$$

（A2.37）就是（A2.20）中的 a 所满足的方程（或条件）。有了 a，就可以用（A2.35）来确定（A2.23）式的 R^{α}_{i}〔A〕中的 $d^{\gamma}_{\underline{i}\beta}$。

以上是从（A2.15）得到的结果。但是对于 R^{α}_{i} 中的张量 b，从方程（A2.15）一路推导下来，没有看到有任何约束。

求解 $h_{\alpha\beta\gamma}$

根据（A2.17），利用 u_{α}，u_{β}，u_{γ} 的反对易性和 u_{α}，u_{β}，u_{γ}，L_{δ} 的独立性，有

$$\begin{aligned}&f_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}\underline{\beta}}h_{\delta\underline{\sigma}\gamma}+f_{\underline{\sigma}\underline{\beta}\gamma}h_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\underline{\alpha}}+f_{\underline{\sigma}\gamma\underline{\alpha}}h_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\underline{\beta}}-f_{\underline{\sigma}\gamma\underline{\beta}}h_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\underline{\alpha}}-f_{\underline{\sigma}\underline{\beta}\underline{\alpha}}h_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\gamma}-f_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}\gamma}h_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\underline{\beta}}\\&+f_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\underline{\alpha}}h_{\underline{\sigma}\beta\gamma}+f_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\underline{\beta}}h_{\underline{\sigma}\gamma\underline{\alpha}}+f_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\gamma}h_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}\underline{\beta}}-f_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\gamma}h_{\underline{\delta}\underline{\beta}\underline{\alpha}}-f_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\underline{\beta}}h_{\underline{\sigma}\underline{\alpha}\gamma}-f_{\underline{\delta}\underline{\sigma}\underline{\alpha}}h_{\delta\gamma\beta}=0\end{aligned}$$

整理得

$$(f_{\underline{i}\beta\underline{k}}h_{\underline{i}\underline{i}\gamma}+f_{\underline{i}\underline{k}\gamma}h_{\underline{i}\underline{i}\beta}+f_{\underline{i}\gamma\beta}h_{\underline{i}\underline{i}\underline{k}})+(f_{\underline{i}\underline{i}\beta}h_{\underline{i}\gamma\underline{k}}+f_{\underline{i}\underline{i}\gamma}h_{\underline{i}\underline{k}\beta}+f_{\underline{i}\underline{i}\underline{k}}h_{\underline{i}\beta\gamma})=0 \tag{A2.38}$$

所以 $h_{\alpha\beta\gamma}$ 满足的条件（A2.38）和 $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 满足的条件（A2.37）是相同的。但（A2.37）不止有一个解，所以 $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 和 $h_{\alpha\beta\gamma}$ 之间的关系还要进一步由（A2.16）来定。由（A2.16）得到（由于 u_{β}，u_{γ}，K_{j} 的独立性）：

$$\begin{aligned}&\left\{-(\Delta^{\beta}_{i}+gt^{\beta}_{ik}A_{k})\frac{\delta R^{\alpha}_{j}[A]}{\delta A_{i}}-\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}R^{\gamma}_{j}[A]\right.\\&\left.+gt^{\beta}_{jk}R^{\alpha}_{k}[A]-\frac{1}{2}(\Delta^{\gamma}_{j}+gt^{\gamma}_{jk}A_{k})h_{\gamma\beta\alpha}\right\}_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}}=0\end{aligned} \tag{A2.39}$$

把（A2.23）代入（A2.39），

$$\begin{aligned}&\left\{-(\Delta^{\beta}_{i}+gt^{\beta}_{ik}A_{k})d^{\alpha}_{ji}-\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}(b^{\gamma}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_{i}+d^{\gamma}_{jk}A_{k})\right.\\&\left.+gt^{\beta}_{jk}(b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_{k}+d^{\alpha}_{kl}A_{l})-\frac{1}{2}(\Delta^{\gamma}_{j}+gt^{\gamma}_{jk}A_{k})h_{\gamma\beta\alpha}\right\}_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}}=0\end{aligned} \tag{A2.40}$$

从中分别取出 A 的零次项和1次项，得到

$$\left\{-\Delta^{\beta}_{i}d^{\alpha}_{ji}-\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}b^{\gamma}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_{j}+gt^{\beta}_{jk}b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_{k}-\frac{1}{2}\Delta^{\gamma}_{j}h_{\gamma\beta\alpha}\right\}_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}}=0 \tag{A2.41}$$

$$\left\{-gt^{\beta}_{ik}d^{\alpha}_{ji}-\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}d^{\gamma}_{jk}+gt^{\beta}_{jl}d^{\alpha}_{lk}-\frac{1}{2}gt^{\gamma}_{jk}h_{\gamma\beta\alpha}\right\}_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}}=0 \tag{A2.42}$$

根据（A2.13），（A2.25），（A2.35）以及（4.23）′，可把（A2.41）的指标都写出来：

$$\begin{aligned}&\left\{\int d^{4}x_{i}(\partial_{\underline{i}}\delta^{4}(x_{i}-x_{\beta}))\delta_{\underline{i}\beta}[a^{\underline{i}}_{\underline{i}\underline{\alpha}}+g(-f_{\underline{\lambda}\underline{i}\underline{\alpha}}b^{\lambda}_{\underline{i}}+f_{\underline{\alpha}\underline{i}\underline{\lambda}}b^{\underline{i}}_{\underline{\lambda}})]\delta^{4}(x_{i}-x_{\alpha})\delta^{4}(x_{\alpha}-x_{j})\delta_{\underline{i}\underline{i}}\right.\\&-\int d^{4}x_{\gamma}\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\underline{\alpha}}\delta^{4}(x_{\gamma}-x_{\beta})\delta^{4}(x_{\beta}-x_{\alpha})(-)b^{\gamma}_{\underline{i}}(\partial_{\underline{i}}\delta^{4}(x_{j}-x_{\gamma}))\end{aligned}$$

$$+\int d^4x_k g f_{\underline{i}\beta\underline{k}}\delta^4(x_j-x_\beta)\delta^4(x_\beta-x_k)(-)b^{\underline{\alpha}}_{\underline{k}}\partial_{\underline{k}}\delta^4(x_k-x_\alpha)\delta_{\underline{i}\,\underline{k}}$$

$$-\int d^4x_\gamma\frac{1}{2}(-)(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_j-x_\gamma))\delta_{\gamma\underline{i}}h_{\gamma\beta\underline{\alpha}}\delta^4(x_\gamma-x_\beta)\delta^4(x_\gamma-x_\alpha)\Big\}_{\boxed{\beta\atop\alpha}}=0$$

积分后得到：

$$\begin{aligned}
&(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta))\delta^4(x_\alpha-x_j)(a^{\underline{i}}_{\beta\underline{\alpha}}-gb^{\gamma}_{\underline{i}}f_{\gamma\beta\underline{\alpha}}+gf_{\underline{\alpha}\underline{i}\gamma}b^{\underline{\beta}}_{\gamma})\\
&-(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))\delta^4(x_\beta-x_j)(a^{\underline{i}}_{\underline{\alpha}\beta}-gb^{\gamma}_{\underline{i}}f_{\gamma\underline{\alpha}\beta}+gf_{\beta\underline{i}\gamma}b^{\underline{\alpha}}_{\gamma})\\
&+\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\underline{\alpha}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha)\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_j-x_\beta)b^{\gamma}_{\underline{i}}\\
&-\frac{g}{2}f_{\gamma\underline{\alpha}\beta}\delta^4(x_\alpha-x_\beta)\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_j-x_\alpha)b^{\gamma}_{\underline{i}}\\
&+gf_{\beta i\gamma}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))\delta^4(x_\beta-x_j)b^{\underline{\alpha}}_{\gamma}\\
&-gf_{\alpha i\gamma}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta))\delta^4(x_\alpha-x_j)b^{\underline{\beta}}_{\gamma}\\
&+\frac{1}{2}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_j-x_\beta))\delta^4(x_\beta-x_\alpha)h_{\underline{i}\beta\underline{\alpha}}\\
&-\frac{1}{2}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_j-x_\alpha))\delta^4(x_\alpha-x_\beta)h_{\underline{i}\underline{\alpha}\beta}=0
\end{aligned}\tag{A2. 43}$$

利用以下关系：

$$\begin{aligned}
&(\partial_{\underline{\mu}}\delta^4(x_j-x_\beta)\delta^4(x_\beta-x_\alpha)=-(\partial_{\underline{\mu}}\delta^4(x_\beta-x_j)\delta^4(x_\beta-x_\alpha)\\
&\qquad(\text{左边 }\partial_{\underline{\mu}}=\partial_{(x_j)\mu},\text{右边 }\partial_{\underline{\mu}}=\partial_{(x_\beta)\mu}\\
&=-\{\partial_{\underline{\mu}}[\delta^4(x_\beta-x_j)\delta^4(x_\beta-x_\alpha)]\}+\delta^4(x_\beta-x_j)(\partial_{\underline{\mu}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))\\
&=-\{\partial_{\underline{\mu}}[\delta^4(x_\alpha-x_j)\delta^4(x_\beta-x_\alpha)]\}+\delta^4(x_\beta-x_j)(\underline{\partial}_{\mu}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))\\
&\qquad(\text{这里的 }\partial_{\underline{\mu}}\text{ 仍是 }\partial_{(x_\beta)\mu})\\
&=-\delta^4(x_\alpha-x_j)(\partial_{\underline{\mu}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))+\delta^4(x_\beta-x_j)(\partial_{\mu}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))
\end{aligned}\tag{A2. 44}$$

则（A2. 43）又写成：

$$\begin{aligned}
&(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta))\delta^4(x_\alpha-x_j)(a^{\underline{i}}_{\beta\underline{\alpha}}-gb^{\gamma}_{\underline{i}}f_{\gamma\beta\underline{\alpha}}+gf_{\underline{\alpha}\underline{i}\gamma}b^{\underline{\beta}}_{\gamma})\\
&-(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha)\delta^4(x_\beta-x_j)(a^{\underline{i}}_{\underline{\alpha}\beta}-gb^{\gamma}_{\underline{i}}f_{\gamma\underline{\alpha}\beta}+gf_{\beta\underline{i}\gamma}b^{\underline{\alpha}}_{\gamma})\\
&+\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\underline{\alpha}}[(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))\delta^4(x_\beta-x_j)+(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta))\delta^4(x_\alpha-x_j)]b^{\gamma}_{\underline{i}}\\
&-\frac{g}{2}f_{\gamma\underline{\alpha}\beta}[(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta))\delta^4(x_\alpha-x_j)+\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha)\delta^4(x_\beta-x_j)]b^{\gamma}_{\underline{i}}\\
&+gf_{\beta\underline{i}\gamma}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))\delta^4(x_\beta-x_j)b^{\underline{\alpha}}_{\gamma}\\
&-gf_{\underline{\alpha}\underline{i}\gamma}(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta))\delta^4(x_\alpha-x_j)b^{\underline{\beta}}_{\gamma}\\
&+\frac{1}{2}[(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha))\delta^4(x_\beta-x_j)+(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta)\delta^4(x_\alpha-x_j)]h_{\underline{i}\beta\underline{\alpha}}\\
&-\frac{1}{2}[(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\alpha-x_\beta))\delta^4(x_\alpha-x_j)+(\partial_{\underline{i}}\delta^4(x_\beta-x_\alpha)\delta^4(x_\beta-x_j)]h_{\underline{i}\underline{\alpha}\beta}=0
\end{aligned}\tag{A2. 45}$$

在（A2. 45）中，每一项都含有一个广义函数因子。和得出（A2. 32）时一样，也是由

于 $(\partial_i \delta^4(x_\alpha - x_\beta))\delta^4(x_\alpha - x_j)$ 和 $(\partial_i \delta^4(x_\beta - x_\alpha))\delta^4(x_\beta - x_j)$ 互相独立，所以从（A.245）得到两个方程式如下：

$$\begin{aligned} a^{i}_{\beta\alpha} - g b^{\gamma}_{i} f_{\gamma\beta\alpha} + g f_{\alpha i\gamma} b^{\beta}_{\gamma} + g f_{\gamma\beta\alpha} b^{\gamma}_{i} - g f_{\alpha i\gamma} b^{\beta}_{\gamma} + h_{j\beta\alpha} &= 0 \\ a^{i}_{\alpha\beta} - g b^{\gamma}_{i} f_{\gamma\alpha\beta} + g f_{\beta i\gamma} b^{\alpha}_{\gamma} + g f_{\gamma\alpha\beta} b^{\gamma}_{i} - g f_{\beta i\gamma} b^{\alpha}_{\gamma} + h_{j\alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \tag{A2.46}$$

把 α，β 交换，立刻看出（A2.46）的上下两式是同解方程。

由于（A2.46）中含 b 的项都恰好抵消，所以立刻得到：

$$h_{i\beta\alpha} = -a^{i}_{\beta\alpha} \tag{A2.47}$$

到此为止，对 b 仍无任何约束。

以上结论来自方程（A2.41）。再看一看方程（A2.42）。把简化符号所含的指标都写出来，则有的项互相抵消，有的项由于 Jacobi 恒等式而抵消，剩下的项正好就形成（A2.37）并无新的内容。

再把（A2.47）代入（A2.17），也是正好得到（A2.37），是自洽的，但并无新的内容。

这样，我们就得到了满足（A2.15），（A2.16），（A2.17）的 R 和 h（见 A2.12），（A2.23））。（A2.12）可以写成

$$\begin{aligned} \Gamma[A,u,0,K,L] = K[A] &+ K_i b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_{i} u_\alpha \\ &+ K_i[g(-f_{\gamma k\alpha} b^{\gamma}_{i} + f_{\alpha i l} b^{k}_{l}) + a^{i}_{k\alpha}]A_k u_\alpha \\ &+ \frac{1}{2} h_{\alpha\beta\gamma} u_\beta u_\gamma L_\alpha \end{aligned} \tag{A2.48}$$

其中 $b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_{i} + d^{\alpha}_{ik}A_k = R^{\alpha}_{i}[A]$，

$b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_{i}$ 定义见（A2.25），对 b^{α}_{λ} 没有任何约束。

d^{α}_{ik}定义见（A2.26），（A2.33）及（A2.35），它们由 b，a，f 确定。

$a^{i}_{\beta\gamma}$受到（A2.13）的约束。

$h_{\alpha\beta\gamma}$定义见（A2.13），其中 $h_{\alpha\beta\gamma} = -a^{\alpha}_{\beta\gamma}$（见（A2.47））。

这一节的讨论还没有涉及 $F[A]$，$F[A]$ 的问题将留在后面 § A2－4 一节去讨论。

§ A2－3 $\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$的一般形式——有 Higgs 场时

取 $\tilde{S}[A, s, s^+, u, \bar{u}=0, K, L]$ 如下（见 8.116）：

$$\begin{aligned} \tilde{S}[A,s,s^+,u,\bar{u} = 0,K,L] &= \mathrm{L}_{\text{inv}}[A] - |Ds|^2 - \mu^2(s^+_l s_l) - \Lambda(s^+_l s_l)^2 \\ &+ \bar{u}_\alpha M_{\alpha\beta} u_\beta + K_i(\Delta^{\alpha}_{i} + g t^{\alpha}_{ij} A_j) u_\alpha \\ &+ K^{s}_{l}\left(-\frac{1}{2} g \lambda^{\alpha}_{lk} s_k u_k\right) + K^{s+}_{l}\left(\frac{i}{2} g s^+_k \lambda^{\alpha l}_{k} u_\alpha\right) + \frac{g}{2} f_{\alpha\beta\gamma} L_\alpha u_\beta u_\gamma \end{aligned} \tag{A2.49}$$

定义：$\mathrm{L}_{\text{inv}}[A,s,s^+] = \mathrm{L}_{\text{inv}}[A] - |Ds|^2 - \mu^2(s^+_l s_l) - \Lambda(s^+_l s_l)^2$ （A2.50）

根据与（A2.12）相仿的考虑，在有 Higgs 场时，（A2.12）应扩充如下（在求解 slavnov 方程时，也是在 Γ 中置 $\bar{u}=0$）：

$\Gamma[A,s,s^+,u,0,K,L]$

$$= F[A,s,s^+] + K_i R_j^\alpha[A]u_\alpha + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma L_\alpha$$

$$+ K_l^s v_l^\alpha[s]u_\alpha + K_l^{s+} v_l^{\alpha+}[s^+]u_\alpha + W_l H_l + W_l^+ H_l^+ \tag{A2.51}$$

其中

$$v_l^\alpha[s] = e_{lk}^\alpha s_k, v_l^{\alpha+}[s^+] = e_{kl}^{\alpha+} s_k^+ \tag{A2.52}$$

关于（A2.51）要说明几点：

1. s_k，s_k^+ 没有时空指标，于是 v_l^α〔s〕，$v_l^{\alpha+}$〔s^+〕不像 R_i^α〔A〕，没有微商项，和（A2.23）不一样。

2. 由于微扰展开中，$\overline{ss} = \overline{s^+ s^+} = 0$，只是 $\overline{ss^+} \neq 0$，所以（A2.51）中 K_l^s 只与 s_k 相乘，K_l^{s+} 只与 s_k^+ 相乘。

3. H_l，H_l^+ 都不含有场量，它们量纲为 1，$F-P$ 数为 0。l 指标就是 Higgs 场 s_l，s_l^+ 的指标，以后在（A2.78）将看到，H_l 和 H_l^+ 与 s_l 和 s_l^+ 的蝌蚪图贡献相对应。

为了书写方便，我们分别定义 τ，τ^+ 如下：

$$-\frac{i}{2}\lambda_{lk}^b = \tau_{lk}^b$$

$$\frac{i}{2}\lambda_{lk}^b = \tau_{lk}^{b+} \tag{A2.53}$$

再利用（A2.50）的定义，则 $\tilde{S}$ 又写成：

$$\tilde{S}[A,s,s^+,u,\bar{u},K,L] = L'_{\text{inv}}[A,s,s^+]$$

$$+ K_i(\Delta_i^\beta + g t_{ij}^\beta A_j)u_\beta + \bar{u}_\alpha M_{\alpha\beta}u_\beta + K_l^s g \tau_{lk}^\beta s_k u_\beta + K_l^{s+} g \tau_{kl}^{\beta+} s_k^+ u_\beta + \frac{g}{2} f_{\alpha\beta\gamma} L_\alpha u_\beta u_\gamma \tag{A2.54}$$

与（A2.7）相对应，现在 $\mathscr{G}$ 是：

$$\mathscr{G} = \frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta}{\delta A_i} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_i}\frac{\delta}{\delta K_i} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_l^s}\frac{\delta}{\delta s_l} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_l^{s+}}\frac{\delta}{\delta s_l^+}$$

$$+ \frac{\delta\tilde{S}}{\delta s_l}\frac{\delta}{\delta K_l^s} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta s_l^+}\frac{\delta}{\delta K_l^{s+}} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta u_\alpha} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta L_\alpha} \tag{A2.55}$$

与（A2.14）相对照，现在 $\mathscr{G}\Gamma = 0$ 应写成：

$$\mathscr{G}\Gamma = \frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta F}{\delta A_i} - K_j\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta R_j^\alpha[A]}{\delta A_i}u_\alpha + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_i}R_i^\alpha[A]u_\alpha$$

$$- \frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}K_i R_i^\alpha[A] + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\beta}h_{\alpha\beta\gamma}u_\gamma L_\alpha + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma$$

$$+ \frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_l^s}\frac{\delta F}{\delta s_l} - K_l^s\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_m^s}\frac{\delta v_l^\alpha}{\delta s_m}u_\alpha + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta s_k}v_k^\alpha u_\alpha - \frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}K_l^s v_l^\alpha$$

$$+ \frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_l^{s+}}\frac{\delta F}{\delta s_l^+} - K_l^{s+}\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_m^{s+}}\frac{\delta v_l^{\alpha+}}{\delta s_m^+}u_\alpha + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta s_k^+}v_k^{\alpha+}u_\alpha - \frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}K_l^{s+}v_l^{\alpha+}$$

$$+ (\mathscr{G}W_l)H_l + (\mathscr{G}W_l^+)H_l^+ \tag{A2.56}$$

式中 $F=F[A, s, s^+]$，$L'_{inv}=L'_{inv}[A, s, s^+]$（见（A2.50）定义），再展开，则写成：

$$\begin{aligned}
\mathscr{G}\Gamma = & \Big\{(\Delta_i^\alpha + g t_{ij}^\alpha A_j)\frac{\delta F}{\delta A_i} + g\tau_{lk}^\alpha s_k\frac{\delta F}{\delta s_l} + g\tau_{kl}^{\alpha +} s_k^+\frac{\delta F}{\delta s_l^+} \\
& + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}R_i^\alpha[A] + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}v_l^\alpha + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}v_l^{\alpha +}\Big\}u_\alpha \\
& + \Big\{-(\Delta_i^\beta + g t_{ik}^\beta A_k)\frac{\delta R_j^\alpha[A]}{\delta A_i} - \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}R_j^\gamma[A] \\
& + g t_{jk}^\beta R_k^\alpha[A] - \frac{1}{2}(\Delta_j^\gamma + g t_{jk}^\gamma A_k)h_{\gamma\beta\alpha}\Big\}u_\beta u_\alpha K_j \\
& + \frac{g}{2}\{f_{\beta\sigma\rho}h_{\alpha\beta\gamma} + f_{\alpha\beta\sigma}h_{\beta\rho\gamma}\}u_\sigma u_\rho u_\gamma L_\alpha \\
& + \Big(-g\tau_{mk}^\beta s_k\frac{\delta v_l^\alpha}{\delta s_m} - \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}v_l^\gamma + g\tau_{lk}^\beta v_k^\alpha - \frac{g}{2}\tau_{lk}^\gamma s_k h_{\gamma\beta\alpha}\Big)u_\beta u_\alpha K_l' \\
& + \Big(-g\tau_{km}^{\beta +}s_k\frac{\delta v_l^{\alpha +}}{\delta s_m^+} - \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}v_l^{\gamma +} + g\tau_{kl}^{\beta +}v_k^{\alpha +} - \frac{g}{2}\tau_{kl}^{\gamma +}s_k^+ h_{\gamma\beta\alpha}\Big)u_\beta u_\alpha K_l'^+ \\
& + (\mathscr{G}W_l)H_l + (\mathscr{G}W_l^+)H_l^+ = 0
\end{aligned} \tag{A2.57}$$

在（A2.57）中，由于 u_α 互相独立，K 又互相独立，所以和（A2.15），（A2.16），（A2.17）相仿，得到一组联立方程。与（A2.15）相对应的方程是

$$\begin{aligned}
& \Big\{(\Delta_i^\alpha + g t_{ij}^\alpha A_j)\frac{\delta F}{\delta A_i} + g\tau_{lk}^\alpha s_k\frac{\delta F}{\delta s_l} + g\tau_{kl}^\alpha s_k^+\frac{\delta F}{\delta s_l^+} \\
& + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}R_i^\alpha[A] + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}v_l^\alpha + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}v_l^{\alpha +}\Big\}u_\alpha = 0
\end{aligned} \tag{A2.58}$$

由于 $F[A, s, s^+]$ 只含有 A，s，s^+，所以

$$\begin{aligned}
& (\Delta_i^\alpha + g t_{ij}^\alpha A_j)u_\alpha\frac{\delta F}{\delta A_i} + g\tau_{lk}^\alpha s_k u_\alpha + \frac{\delta F}{\delta s_l} + g\tau_{kl}^{\alpha +}s_k^+ u_\alpha\frac{\delta F}{\delta s_l^+} \\
& = \mathscr{G}F[A, s, s^+]
\end{aligned} \tag{A2.59}$$

把（A2.59）代入（A2.58），则和前一节一样，得到

$$\begin{aligned}
& \mathscr{G}\Big\{\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}R_i^\alpha[A] + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}v_l^\alpha + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}v_l^{\alpha +}\Big\}u_\alpha = 0 \\
& \to \Big\{(\Delta_j^\beta + g t_{jk}^\alpha A_k)\frac{\delta}{\delta A_j} + g\tau_{lk}^\beta s_k\frac{\delta}{\delta s_l} + g\tau_{kl}^{\beta +}S_k^+\frac{\delta}{\delta s_l^+}\Big\} \\
& \cdot\Big\{\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}R_i^\alpha + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_m}v_m^\alpha + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_m^+}v_m^{\alpha +}\Big\}u_\beta u_\alpha \\
& + \frac{g}{2}f_{\alpha\beta\gamma}\Big\{\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}R_i^\alpha + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_m}v_m^\alpha + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_m^+}v_m^{\alpha +}\Big\}u_\beta u_\gamma = 0
\end{aligned} \tag{A2.60}$$

利用 L'_{inv} 的规范不变性：

$$(\Delta_j^\beta + g t_{jk}^\beta A_k)\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_j} + g\tau_{lk}^\beta s_k\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l} + g\tau_{kl}^{\beta +}s_k^+\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+} = 0 \tag{A2.61}$$

（A2.60）又可写成：

$$\Big\{(\Delta_i^\beta + gt_{jk}^\beta A_k)\frac{\delta R_i^\alpha}{\delta A_j}\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i} + g\tau_{lk}^\beta s_k\frac{\delta v_m^\alpha}{\delta s_l}\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_m} + g\tau_{kl}^{\beta+} s_k^+\frac{\delta v^{\alpha+}_m}{\delta s_l^+}\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_m^+}$$

$$-\frac{\delta(\Delta_j^\beta + gt_{jk}A_k)}{\delta A_i}R_i^\alpha\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i} - \frac{\delta(g\tau_{lk}^\beta s_k)}{\delta s_m}v_m^\alpha\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l} - \frac{\delta(g\tau_{kl}^{\beta+}s_k^+)}{\delta s_m^+}v_m^{\alpha+}\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}$$

$$+\frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}\Big(\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}R_i^\gamma + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}v_l^\gamma + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}v_l^{\gamma+}\Big)\Big\}_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}} = 0 \qquad (A2.62)$$

把（A2.62）中的$\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}$，$\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}$和$\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}$的系数分别整理出来，并考虑到规范不变性表现为（A2.61）的形式，所以类似于（A2.20），我们得到三个方程（因为A，s，s^+是互相独立的）：

$$\Big\{(\Delta_j^\beta + gt_{jk}^\beta A_k)\frac{\delta R_i^\alpha}{\delta A_j} - \frac{\delta(\Delta_i^\beta + gt_{ik}^\beta A_k)}{\delta A_j}R_j^\alpha + \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}R_i^\gamma\Big\}_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{2}a_{\beta\alpha}^\lambda(\Delta_i^\lambda + gt_{ik}^\lambda A_k) \qquad (A2.63)$$

$$\Big\{g\tau_{lk}^\beta s_k\frac{\delta v_m^\alpha}{\delta s_l} - \frac{\delta(g\tau_{mk}^\beta s_k)}{\delta s_l}v_l^\alpha + \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}v_m^\gamma\Big\}_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}} = \frac{1}{2}a_{\beta\alpha}^\lambda(g\tau_{mk}^\lambda s_k)$$

$$(A2.64)$$

$$\Big\{g\tau_{kl}^{\beta+}s_k^+\frac{\delta v_m^{\alpha+}}{\delta s_l} - \frac{\delta(g\tau_{km}^{\beta+}s_k^+)}{\delta s_l^+}v_l^\alpha + \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}v_m^{\gamma+}\Big\}_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}} = \frac{1}{2}a_{\beta\alpha}^\lambda(g\tau_{km}^{\lambda+}s_k^+)$$

$$(A2.65)$$

除此以外，还得到与（A2.16）和（A2.17）完全相同的方程，而且（A2.63）又和（A2.20）完全相同。因此，自（A2.16），（A2.17）和（A2.20）得到的东西仍旧成立。换句话说，关于R_k^α，$h_{\alpha\beta\gamma}$，$a_{\beta\alpha}^\lambda$，b_λ^α的结论和前一节完全一样。

接下来我们还需要使（A2.64），（A2.65），以及自（A2.57）得到的另外两个方程

$$\Big(-g\tau_{mk}^\beta s_k\frac{\delta v_l^a}{\delta s_m} - \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}v_l^\gamma + g\tau_{lk}^\beta v_k^\alpha - \frac{g}{2}\tau_{lk}^\gamma s_k h_{\gamma\beta\alpha}\Big)u_\beta u_\alpha k_l^s = 0 \qquad (A2.66)$$

$$\Big(-g\tau_{km}^{\beta+}s_k^+\frac{\delta v_l^{a+}}{\delta s_m^+} - \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}v_l^{\gamma+} + g\tau_{kl}^{\beta+}v_k^{\alpha+} - \frac{g}{2}\tau_{kl}^{\gamma+}s_k h_{\gamma\beta\alpha}\Big)u_\beta u_\gamma k_l^{s+} = 0 \qquad (A2.67)$$

联立，并解出v_l^α，$v_l^{\alpha+}$来。

一般可取

$$v_l^\alpha = e_{lm}^\alpha s_m$$
$$v_l^{\alpha+} = e_{ml}^{\alpha+}s_m^+ \qquad (A2.68)$$

代入（A2.64）和（A2.65）得到：

$$\Big(g\tau_{lk}^\beta s_k\cdot e_{ml}^\alpha - g\tau_{ml}^\beta e_{lk}^\alpha s_k + \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}e_{mk}^\gamma s_k\Big)_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}} = \frac{1}{2}a_{\beta\alpha}^\gamma(g\tau_{mk}^\lambda s_k)$$

$$\Big(g\tau_{kl}^{\beta+}s_k^+\cdot e_{lm}^{\alpha+} - g\tau_{ml}^{\beta+}e_{kl}^{\alpha+}s_k^+ + \frac{g}{2}f_{\gamma\beta\alpha}e_{km}^{\gamma+}s_k^+\Big)_{\boxed{\beta}\atop\boxed{\alpha}} = \frac{1}{2}a_{\beta\alpha}^\gamma(g\tau_{mk}^{\lambda+}s_k^+)$$

去掉共同的因子g和共同的δ函数因子，得到

$$\tau^{\beta}_{\bar{l}\bar{k}} e^{\alpha}_{\bar{m}\bar{l}} - \tau^{\alpha}_{\bar{l}\bar{k}} e^{\beta}_{\bar{m}\bar{l}} - \tau^{\beta}_{\bar{m}\bar{l}} e^{\alpha}_{\bar{l}\bar{k}} + \tau^{\alpha}_{\bar{m}\bar{l}} e^{\beta}_{\bar{l}\bar{k}} + f_{\gamma\beta\alpha} e^{\gamma}_{\bar{m}\bar{k}} - a^{\lambda}_{\beta\alpha} \tau^{\lambda}_{\bar{m}\bar{l}} = 0$$

$$\tau^{\beta+}_{\bar{k}\bar{l}} e^{\alpha+}_{\bar{l}\bar{m}} - \tau^{\alpha+}_{\bar{k}\bar{l}} e^{\beta+}_{\bar{l}\bar{m}} - \tau^{\beta+}_{\bar{l}\bar{m}} e^{\alpha+}_{\bar{k}\bar{l}} + \tau^{\alpha+}_{\bar{l}\bar{m}} e^{\beta+}_{\bar{k}\bar{l}} + f_{\gamma\beta\alpha} e^{\gamma+}_{\bar{k}\bar{m}} - a^{\lambda}_{\beta\alpha} \tau^{\lambda+}_{\bar{k}\bar{m}} = 0 \qquad (A2.69)$$

再看（A2.69）与（A2.66），（A2.67）是不是自洽。我们把（A2.68）代入（A2.66），（A2.67）得到：

$$-\tau^{\beta}_{\bar{m}\bar{k}} s_k \cdot e^{\alpha}_{\bar{l}\bar{m}} + \tau^{\alpha}_{\bar{m}\bar{k}} s_k \cdot e^{\beta}_{\bar{l}\bar{m}} + \tau^{\beta}_{\bar{l}\bar{m}} e^{\alpha}_{\bar{m}\bar{k}} s_k - \tau^{\alpha}_{\bar{l}\bar{m}} e^{\beta}_{\bar{m}\bar{k}} s_k - f_{\gamma\beta\alpha} e^{\gamma}_{\bar{l}\bar{k}} s_k - \tau^{\gamma}_{\bar{l}\bar{k}} s_k h_{\gamma\beta\alpha} = 0$$

$$-\tau^{\beta+}_{\bar{k}\bar{m}} s^+_k \cdot e^{\alpha+}_{\bar{m}\bar{l}} + \tau^{\alpha+}_{\bar{k}\bar{m}} s^+_k e^{\beta+}_{\bar{m}\bar{l}} + \tau^{\beta+}_{\bar{m}\bar{l}} e^{\alpha+}_{\bar{k}\bar{m}} s^+_k - \tau^{\alpha+}_{\bar{m}\bar{l}} e^{\beta+}_{\bar{k}\bar{m}} s^+_k - f_{\gamma\beta\alpha} e^{\gamma+}_{\bar{k}\bar{l}} s^+_k - \tau^{\gamma+}_{\bar{k}\bar{l}} s^+_k h_{\gamma\beta\alpha} = 0$$

再把（A2.47）的 $h_{\gamma\beta\alpha} = -a^{\gamma}_{\beta\alpha}$ 代入（前已说过，在有 Higgs 场时，前一节关于 R^{α}_k，$h_{\alpha\beta\gamma}$，$a^{\gamma}_{\beta\alpha}$，b^{α}_{λ} 的结论不变），正好与（A2.69）相同。所以（A2.66），（A2.67）与（A2.64），（A2.65），（A2.69）是同解方程，没有什么新的内容。

总之，（A2.69）是关于 $e^{\alpha}_{\bar{l}m}$ 和 $e^{\alpha+}_{\bar{l}\bar{m}}$ 的约束条件。

最后，（A2.57）还要求

$$\mathscr{G} W_l = 0$$

$$\mathscr{G} W^+_l = 0 \qquad (A2.70)$$

因为（A2.57）的最后两项都含有一个带 l 指标（Higgs 场的指标）的不含有场量的常量 H_l 或 H^+_l，其量纲为 1，$F-P$ 荷为 0，不能与（A2.57）中的其他项抵消，（其他的项中没有量纲为 1、$F-P$ 荷为 0、带有 l 指标的不含有场量的常量）。

由于 Γ 的量纲为 4，$F-P$ 荷为 0，所以 W_l 和 W^+_l 的量纲都是 3，$F-P$ 荷都是 0，满足这两个条件，又满足（A2.70）的带有 l 指标的定域泛函只能是 $\frac{\delta\bar{S}}{\delta s_l}$ 和 $\frac{\delta\bar{S}}{\delta s^+_l}$（见（A2.8）′，取 φ_j 为 s_l 和 s^+_l）。所以

$$W_l = \frac{\delta\bar{S}}{\delta s_l}$$

$$W^+_l = \frac{\delta\bar{S}}{\delta s^+_l} \qquad (A2.71)$$

（我们把常系数放到 H_l，H^+_l 中去）。

到此为止，我们已初步求得了 $\mathscr{G}\Gamma = 0$ 的解如下（把（A2.51）具体化）：

$$\begin{aligned}
&\Gamma[A,s,s^+,u,0,K,L] \\
&= F[A,s,s^+] + K_i(b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_i + d^{\alpha}_{ik}A_k)u_\alpha + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma L_\alpha \\
&\quad + K^s_l e^{\alpha}_{lm} s_m u_\alpha + K^{s+}_l e^{\alpha+}_{ml} s^+_m u_\alpha + W_l H_l + W^+_l H^+_l \\
&= F[A,s,s^+] + K_i(b^{\alpha}_{\lambda}\Delta^{\lambda}_i)u_\alpha + K_i[g(-f_{\gamma k\alpha} b^{\gamma}_{i} + f_{\alpha i l} b^{k}_{l}) + a^{i}_{k\alpha}]A_k u_\alpha \\
&\quad + K^s_l e^{\alpha}_{lm} s_m u_\alpha + K^{s+}_l e^{\alpha+}_{ml} s^+_m u_\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta\gamma}u_\beta u_\gamma L_\alpha + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta s_l}H_l + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta s^+_l}H^+_l
\end{aligned} \qquad (A2.72)$$

其中的 $b^{\alpha}_{\gamma}\Delta^{\lambda}_i$，$d^{\alpha}_{ik}$，$a^{i}_{\beta\gamma}$，$h_{\alpha\beta\gamma}$ 的定义和（A2.48）的一样，另外增加的 e^{α}_{lm} 和 $e^{\alpha+}_{lm}$ 必须满足约束条件（A2.69），W_l，W^+_l 则取（A2.71）的定域泛函。

前一节没有给出 $F[A]$，这一节也没有能定出 $F[A, s, s^+]$。原因是我们在求出

前一节的（A2.48）和这一节的（A2.72）时，虽然也动用了联立方程组，然而在推出（A2.20）式时，以及在推出（A2.63），（A2.64），（A2.65）式时，都利用了 $\mathscr{S}\cdot\mathscr{S}=0$，$\mathscr{S}\mathscr{S}F=0$，从而都把 F 消去了，未能充分利用（A2.14），（A2.15）和（A2.57）（A2.58）中的全部信息。

现在要求出 F〔A〕，可以在求得 R_i^α 后，直接利用（A2.15）（因（A2.14）中 u_α 是互相独立的）：

$$(\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha A_j)\frac{\delta F[A]}{\delta A_i} = -\frac{\delta L_{inv}[A]}{\delta A_i}R_i^\alpha[A] \tag{A2.73}$$

相应的齐次方程组是

$$(\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha A_j)\frac{\delta F[A]}{\delta A_i} = 0 \tag{A2.73$'$}$$

在有 Higgs 场时，如果要求出 F〔A，s，s^+〕，也可以在求得 R_i^α，v_l^α，$v_l^{\alpha+}$ 后，直接利用（A2.58）（因（A2.57）中的 u_α 也是互相独立的）：

$$\begin{aligned}(\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha A_j)\frac{\delta F}{\delta A_i} + g\tau_{lk}^\alpha s_k\frac{\delta F}{\delta s_l} + g\tau_{kl}^{\alpha+}s_k^+\frac{\delta F}{\delta s_l^+} \\ = -\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}R_i^\alpha - \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}v_l^\alpha - \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+}v_l^{\alpha+}\end{aligned} \tag{A2.74}$$

其中 $F=F$〔A，s，s^+〕。相应的齐次方程组是：

$$(\Delta_i^\alpha + gt_{ij}^\alpha A_j)\frac{\delta F}{\delta A_i} + g\tau_{lk}^\alpha s_k\frac{\delta F}{\delta s_l} + g\tau_{kl}^{\alpha+}s_k^+\frac{\delta F}{\delta s_l^+} = 0 \tag{A2.74$'$}$$

此处 F〔A〕和 F〔A，s，s^+〕的通解应是满足非齐次方程的一个特解，加上相应的齐次方程的一个通解。由于 F〔A〕只是 F〔A，s，s^+〕的一个特殊情况，所以下一节只需讨论 F〔A，s，s^+〕。

§A2-4　把 Γ 写成 $\Gamma=G+\mathscr{S}\mathscr{F}$ 形式和 F〔A，s，s^+〕的确定

为了讨论的方便，我们先考察一下 $\tilde{\Gamma}^{\text{div}}_{(n+1)}(S_n^0)$ 中含 K、L 的各项是否可以写成 $\mathscr{S}\mathscr{F}$ 形式。

由于 $\mathscr{S}$ 的量纲是 1，$F-P$ 荷是 1，所以 $\mathscr{F}$ 的量纲应是 3，$F-P$ 荷应是 -1。又 $\mathscr{S}$ 是标量，所以 $\mathscr{F}$ 也应是标量。由此可见：

$\mathscr{F}$ 中最多只能含 L_α 一次，含 L_α 的项也必须含 u 一次；

$\mathscr{F}$ 中最多只能含 K_i 一次，含 K_i 的项也必须含 A 一次；

$\mathscr{F}$ 中最多只能含 K_l^s、K_l^{s+} 一次，含 K_l^s 或 K_l^{s+} 的项也必须分别含 s_l 或 s_l^+ 一次，或者分别含 H_l 或 H_l^+ 一次（H_l 和 H_l^+ 与 s_l 和 s_l^+ 的蝌蚪图贡献相对应，并与规范有关，见（A2.78）。

于是，可把 $\mathscr{F}$ 写成如下形式：

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[A,s,s^+,u,0,K,L] = T_{\alpha\beta}L_\alpha u_\beta + K_\alpha s_{\alpha\beta}A_\beta \\ + K_\alpha^s V_{\alpha\beta}s_\beta + K_\alpha^{s+}V_{\alpha\beta}^+ s_\beta^+\end{aligned}$$

$$+ K^s_\alpha H'_\alpha + K^{s+}_\alpha H^{+\prime}_\alpha \tag{A2.75}$$

其中 $K_\beta = K_{\underline{\beta}\underline{\beta}}$，$A_\alpha = A^{\underline{\alpha}}_{\underline{\alpha}}$ 都含有 Lorentz 指标，为了保持 Lorentz 不变性，应取

$$s_{\alpha\beta} = s_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\delta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\delta^4(x_\alpha - x_\beta) \tag{A2.76}$$

但是

$$T_{\alpha\beta} = T_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\delta^4(x_\alpha - x_\beta) \tag{A2.77}$$

不含有 Lorentz 指标。

用（A2.49）作微扰论计算还看到，s_α 和 s^+_α 与规范有关的蝌蚪图贡献一般可写成

$$H_\alpha = d^b_{\alpha\beta}c^{b+}_\beta$$
$$H^+_\alpha = d^{b+}_{\alpha\beta}c^b_\beta \tag{A2.78}$$

c^{b+}_β 和 c^b_β 是规范确定项中的 s^+ 和 s 的系数（量纲为 1，见 §8 - 8 含 s 的规范确定项和 §8 - 10 含 s 和 s^+ 的规范确定项）。$d^b_{\alpha\beta}$是群协变常数，例如最低次的是 $d^b_{\alpha\beta} \sim \tau^{b+}_{\alpha\beta}$。

到这里问题已经比较清楚，只要对前一节给出的 Γ 的通解（其中 $F[A, s, s^+]$ 的形式还没有最后确定下来），能够找到 T，s，V，V^+等，使得 Γ 的通解中含 u，K，L 的部分可以从 $\mathscr{G}\mathscr{F}[A, s, s^+, u, K, L]$ 得到，那么，Γ 中不含 u，K，L 的部分一定可用

$$G[A,s,s^+] + \mathscr{G}\mathscr{F}[A,s,s^+,u,K,L] \tag{A2.79}$$

中的不含 u，K，L 的部分来表示。这里 G 还是一个待定的不含 u，K，L 的泛函。
由于 $\mathscr{G}\cdot\mathscr{G}=0$，所以 G 满足

$$\mathscr{G}G[A,s,s^+] = 0 \tag{A2.80}$$

（可见 G 是一个量纲为 4，$F-P$ 荷为 0 的规范不变的定域泛函）。自（A2.80）可得到 G 的通解。代入（A2.79），如果 $\mathscr{F}$已经找到的话，就得到 Γ 的通解：$\Gamma = G + \mathscr{G}\mathscr{F}$。与前一节一般形式的 Γ 对比不含 u，K，L 的部分，$F[A, s, s^+]$ 的通解就可以定下来。

现在就来证明 T，S，V，V^+等都是可以找到的。我们用（A2.75）写出 $\mathscr{G}\mathscr{F}$，并与前一节的 Γ 的一般形式（A2.72）对比：

$$\begin{aligned}\mathscr{G}\mathscr{F} = &\Big(\frac{\delta\tilde{S}}{\delta K_i}\frac{\delta}{\delta A_i} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta A_i}\frac{\delta}{\delta K_i} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta K^s_l}\frac{\delta}{\delta s_l} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta s_l}\frac{\delta}{\delta K^s_l} \\ &+ \frac{\delta\tilde{S}}{\delta K^{s+}_l}\frac{\delta}{\delta s^+_l} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta s^+_l}\frac{\delta}{\delta K^{s+}_l} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta L_\alpha}\frac{\delta}{\delta u_\alpha} + \frac{\delta\tilde{S}}{\delta u_\alpha}\frac{\delta}{\delta L_\alpha}\Big) \\ &\cdot (L_\alpha T_{\alpha\beta}u_\beta + K_\alpha S_{\alpha\beta}A_\beta + K^s_\alpha V_{\alpha\beta}s_\beta + K^{s+}_\alpha V^+_{\alpha\beta}s^+_\beta + K^s_\alpha H'_\alpha + K^+_\alpha H^{+\prime}_\alpha) \\ = &\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}S_{i\beta}A_\beta + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}V^+_{l\beta}s_\beta + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s^+_l}V^+_{l\beta}s^+_\beta\end{aligned}$$

说明：

1. 略去了计算的中间步骤。
2. 以下在把简化指标还原为普通指标时，已把 δ 函数积分积掉，所以 δ 函数不出现。
3. 利用了（A2.24）定义：

$$-K_\alpha(-\partial_{\underline{i}}u_\beta\delta_{\underline{i}\underline{\beta}})S_{\underline{\alpha}\underline{i}}\delta_{\alpha\underline{i}} - K_i(-\partial_{\underline{i}}u_\beta\delta_{\underline{\alpha}\underline{i}})T_{\alpha\beta}$$
$$= -K_{\underline{\alpha}\underline{\alpha}}(-\partial_{\underline{\alpha}}u_{\underline{i}})S_{\underline{\alpha}\underline{i}} - K_{\underline{i}\underline{i}}(-\partial_{\underline{i}}u_\beta)T_{\underline{i}\underline{i}}$$

$$-K_\alpha(-\partial_{\underline{\beta}} u_{\underline{i}})S_{\underline{\alpha}\underline{i}} - K_\alpha(-\partial_{\underline{\beta}} u_{\underline{i}})T_{\underline{\alpha}\underline{i}}$$
$$+g(f_{\underline{i}\underline{\beta}\underline{i}}S_{\underline{i}\underline{r}} - f_{\underline{i}\underline{\beta}\underline{r}}S_{\underline{i}\underline{i}} - f_{\underline{i}\underline{\alpha}\underline{r}}T_{\underline{\alpha}\underline{\beta}})K_{\underline{i}\underline{i}}u_{\underline{\beta}}A_{\underline{r}\underline{i}}$$
$$+g\left(\frac{1}{2}f_{\alpha\beta\gamma}T_{\underline{\delta}\underline{\alpha}} + \frac{1}{2}f_{\underline{\delta}\alpha\beta}T_{\underline{\alpha}\gamma} - \frac{1}{2}f_{\underline{\delta}\underline{\alpha}\gamma}T_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}\right)u_\beta u_\gamma L_\delta$$
$$+g(-\tau^{\beta}_{\bar{l}\bar{k}}V_{\bar{\alpha}\bar{l}} + \tau^{\beta}_{\bar{\alpha}\bar{l}}V_{\bar{l}\bar{k}} - \tau^{\gamma}_{\bar{\alpha}\bar{k}}T_{\gamma\underline{\beta}})K^{s}_{\alpha}s_{\bar{k}}u_{\underline{\beta}}$$
$$+g(-\tau^{\beta+}_{\bar{k}\bar{l}}V^{+}_{\bar{\alpha}\bar{l}} + \tau^{\beta+}_{\bar{l}\bar{\alpha}}V^{+}_{\bar{l}\bar{k}} - \tau^{\gamma}_{\bar{k}\bar{\alpha}}T_{\gamma\underline{\beta}})K^{s+}_{\underline{\alpha}}s^{+}_{\bar{k}}u_{\underline{\beta}}$$
$$+\left(\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l} + K^{s}_{l}\tau^{\beta}_{jl}u_\beta\right)H'_l + \left(\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s^{+}_l} + K^{s+}_{j}\tau^{\beta+}_{jl}u_\beta\right)H^{+\prime}_l \tag{A2.81}$$

再把（A2.72）的普通指标都写出来（δ 函数也都积分积掉）：

$$\Gamma[A,s,s^{+},u,0,K,L] = F[A,s,s^{+}] + K_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}(b^{\underline{i}}_{\underline{\alpha}}(-)\partial_{\underline{\beta}}u_i)$$
$$+[g(-f_{\gamma\underline{k}\underline{\alpha}}b^{\gamma}_{\underline{i}} + f_{\underline{\alpha}\underline{i}\underline{j}}b^{\underline{k}}_{\underline{i}}) + a^{\underline{i}}_{\underline{k}\underline{\alpha}}]A_{\underline{k}\underline{i}}K_{\underline{i}\underline{i}}u_{\underline{\alpha}} + \frac{1}{2}h_{\underline{\alpha}\beta\gamma}u_\beta u_\gamma L_{\underline{\alpha}}$$
$$+K^{s}_{\underline{l}}e^{\alpha}_{\bar{l}\bar{m}}s_{\bar{m}}u_{\underline{\alpha}} + K^{s+}_{\bar{l}}e^{\alpha+}_{\bar{m}\bar{l}}s^{+}_{\bar{m}}u_{\underline{\alpha}}$$
$$+\left(\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l} + K^{s}_{j}\tau^{\beta}_{jl}u_\beta\right)H_l + \left(\frac{\delta L'_{inv}}{\delta s^{+}_l} + K^{s+}_{j}\tau^{\beta+}_{lj}u_\beta\right)H^{+}_{s} \tag{A2.82}$$

对比后得到以下结果：

1. 如果 S，V，V^{+} 存在，则不含 K，L 的项有如下关系：

$$F[A,s,s^{+}] = G[A,s,s^{+}]$$
$$+\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}S_{i\beta}A_\beta + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}V_{l\beta}s_\beta\ \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s^{+}_l}V^{+}_{l\beta}s^{+}_\beta \tag{A2.83}$$

从而得到 $F[A, s, s^{+}]$ 的通解。我们将在讨论了 s、T、V、V^{+} 的存在之后，再来讨论（A2.83）

2. 只要取

$$H'_l = H_l,\ H^{+\prime}_l = H^{+}_l \tag{A2.84}$$

就可解决 Γ 中与规范有关的蝌蚪图贡献所引起的问题。

要求 S，T，V，V^{+} 满足以下联立起来的五个方程：

$$-b^{\underline{i}}_{\underline{\alpha}} = S_{\underline{\alpha}\underline{i}} + T_{\underline{\alpha}\underline{i}} \tag{A2.85}$$
$$a^{\underline{i}}_{\underline{k}\underline{\alpha}} + g(-f_{\gamma\underline{k}\underline{\alpha}}b^{\gamma}_{\underline{i}} + f_{\underline{\alpha}\underline{i}\underline{j}}b^{\underline{k}}_{\underline{i}}) = g(f_{\underline{i}\underline{\alpha}\beta}S_{\beta\underline{k}} - f_{\underline{\beta}\underline{\alpha}\underline{k}}S_{\underline{i}\underline{\beta}} - f_{\underline{i}\underline{\beta}\underline{k}}T_{\underline{\beta}\underline{\alpha}}) \tag{A2.86}$$
$$\frac{1}{2}h_{\underline{\alpha}\beta\gamma} = -\frac{1}{2}a^{\underline{\alpha}}_{\beta\gamma} = g\,\frac{1}{2}(f_{\underline{\lambda}\beta\gamma}T_{\underline{\alpha}\lambda} + f_{\underline{\alpha}\lambda\beta}T_{\lambda\gamma} - f_{\underline{\alpha}\lambda\gamma}T_{\lambda\beta}) \tag{A2.87}$$
$$e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{m}} - g(-\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{\beta}\bar{m}}V_{\bar{l}\bar{\beta}} + \tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{\beta}}V_{\bar{\beta}\bar{m}} - \tau^{\beta}_{\bar{l}\bar{m}}T_{\beta\underline{\alpha}}) \tag{A2.88}$$
$$e^{\underline{\alpha}+}_{\bar{m}\bar{l}} = g(-\tau^{\underline{\alpha}+}_{\bar{m}\bar{\beta}}V_{\bar{l}\bar{\beta}} + \tau^{\underline{\alpha}+}_{\bar{\beta}\bar{l}}V_{\bar{\beta}\bar{m}} - \tau^{\beta+}_{\bar{m}\bar{l}}T_{\beta\underline{\alpha}}) \tag{A2.89}$$

自（A2.85）解得

$$S_{\underline{\alpha}\underline{i}} = -b^{\underline{i}}_{\underline{\alpha}} - T_{\underline{\alpha}\underline{i}} \tag{A2.90}$$

自（A2.87），用 $f_{\lambda\gamma\alpha}$ 乘两边，相同指标求和，得到

$$gT_{\lambda\beta} = \frac{1}{N}(f_{\underline{\lambda}\gamma\underline{\alpha}}a^{\underline{\alpha}}_{\beta\gamma} + gf_{\underline{\lambda}\gamma\underline{\alpha}}f_{\underline{\delta}\beta\gamma}T_{\underline{\alpha}\underline{\delta}} + gf_{\underline{\delta}\gamma\underline{\lambda}}f_{\alpha\beta\gamma}T_{\underline{\alpha}\underline{\delta}})$$

$$= \frac{1}{N}(f_{\lambda\gamma\alpha}a^{\alpha}_{\beta\gamma} - gf_{\alpha\gamma\delta}f_{\lambda\beta\gamma}T_{\alpha\delta}) \tag{A2.91}$$

其中 $N = C_2(G)$，$C_2(G)$ 的定义是 $f_{\alpha\beta\gamma}f_{\alpha'\beta\gamma} = C_2(G)\,\delta_{\alpha\alpha'}$。

可以看到，如果 $T_{\lambda\beta}$ 满足（A2.87），则（A2.91）中 $T_{\lambda\beta}$ 的解就是

$$gT_{\lambda\beta} = \frac{1}{N}f_{\lambda\gamma\alpha}a^{\alpha}_{\beta\gamma} \tag{A2.92}$$

为了检验这一点，可把（A2.92）代入（A2.91）右方的第二项，得到（利用（A2.87））：

$$\begin{aligned}
-gf_{\alpha\gamma\delta}f_{\lambda\beta\gamma}T_{\alpha\delta} &= -\frac{1}{N}f_{\alpha\gamma\delta}f_{\lambda\beta\gamma}f_{\alpha\sigma\rho}a^{\rho}_{\delta\sigma} \\
&= \frac{g}{N}f_{\lambda\beta\gamma}f_{\gamma\delta\alpha}f_{\alpha\sigma\rho}(f_{\varepsilon\delta\sigma}T_{\rho\varepsilon} + f_{\rho\varepsilon\delta}T_{\varepsilon\sigma} - f_{\rho\varepsilon\sigma}T_{\varepsilon\delta}) \\
&= \frac{g}{N}(-f_{\lambda\beta\gamma}f_{\gamma\rho\alpha}f_{\varepsilon\xi\delta}f_{\alpha\rho\xi}T_{\varepsilon\delta} - f_{\lambda\beta\gamma}f_{\gamma\delta\alpha}f_{\alpha\sigma\rho}f_{\rho\varepsilon\delta}T_{\varepsilon\delta}) \\
&= g(f_{\lambda\beta\gamma}f_{\varepsilon\gamma\delta}T_{\varepsilon\delta} - f_{\lambda\beta\gamma}f_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon}T_{\varepsilon\delta}) = 0
\end{aligned}$$

果然得零。从而（A2.92）在（A2.87）成立的前提下就是（A2.91）的解。现在要问，（A2.92）是否满足（A2.87）这个前提呢？为了检验，我们把（A2.92）代入（A2.87），得到

$$-a^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{N}(f_{\lambda\beta\gamma}f_{\alpha\sigma\rho}a^{\rho}_{\lambda\sigma} + f_{\alpha\lambda\beta}f_{\lambda\sigma\rho}a^{\rho}_{\gamma\sigma} - f_{\alpha\lambda\gamma}f_{\lambda\sigma\rho}a^{\rho}_{\beta\sigma}) \tag{A2.93}$$

所以，$a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 满足（A2.93）是（A2.92）满足（A2.87）的前提。那么，$a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 是不是满足（A2.93）呢？是的。因为 $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 满足（A2.37），可以从（A2.37）导出（A2.93）。说明如下：

自（A2.37），有：

$$\begin{aligned}
0 &= f_{\lambda\alpha\delta}(f_{\sigma\alpha\beta}a^{\delta}_{\sigma\gamma} + f_{\sigma\gamma\alpha}a^{\delta}_{\sigma\beta} + f_{\sigma\beta\gamma}a^{\delta}_{\sigma\alpha} + f_{\delta\sigma\alpha}a^{\sigma}_{\beta\gamma} + f_{\delta\sigma\beta}a^{\sigma}_{\gamma\alpha} + f_{\delta\sigma\gamma}a^{\sigma}_{\alpha\beta}) \\
&= -f_{\beta\alpha\lambda}f_{\sigma\alpha\delta}a^{\delta}_{\sigma\gamma} - f_{\delta\alpha\sigma}f_{\lambda\gamma\alpha}a^{\delta}_{\sigma\beta} + f_{\lambda\alpha\delta}f_{\sigma\beta\gamma}a^{\delta}_{\sigma\alpha} + Na^{\lambda}_{\beta\gamma}
\end{aligned}$$

正好就导致（A2.93）。从而证明了在 $a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 满足（A2.37）的条件下，（A2.92）就是（A2.91）和（A2.87）的解。

我们还要证明（A2.85），（A2.87）与（A2.86）自洽。为此，可把（A2.87）代入（A2.86）左端，并利用（A2.85）的定义，立刻可得（A2.86）的右端。可见自洽。

e，e^{+} 和 V，V^{+} 的存在

（A2.64）是 e，e^{+} 必须满足的条件。（A2.88）和（A2.89）则是有了 e，e^{+}，T 之后，V 和 V^{+} 所应满足的条件。

为了求 e，我们把（A2.92）的 $gT_{\lambda\beta} = \frac{1}{N}f_{\lambda\gamma\alpha}a^{\alpha}_{\beta\gamma}$ 代入（A2.88），则看到恰好

$$e^{\alpha}_{\bar{I}\bar{m}} = -g\tau^{\gamma}_{\bar{I}\bar{m}}T_{\gamma\alpha} = -\frac{1}{N}\tau^{\gamma}_{\bar{I}\bar{m}}f_{\gamma\sigma\tau}a^{\tau}_{\alpha\sigma} \tag{A2.94}$$

是（A2.69）第一式的一个特解。请读者自己验证这一点（把（A2.94）代入

(A2.69) 第一式，再利用 (A2.93))。

$e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{m}}$的通解应是 (A2.69) 第一式的一个特解再加上 (A2.69) 第一式的齐次方程的通解，这个齐次方程是

$$e^{\underline{\alpha}}_{\bar{m}\bar{l}}\tau^{\underline{\beta}}_{\bar{l}\bar{k}} - e^{\underline{\beta}}_{\bar{m}\bar{l}}\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{k}} - \tau^{\underline{\beta}}_{\bar{m}\bar{l}}e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{k}} + \tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{m}\bar{l}}e^{\underline{\beta}}_{\bar{l}\bar{k}} + f_{\underline{\gamma\beta\alpha}}e^{\underline{\gamma}}_{\bar{m}\bar{k}} = 0 \tag{A2.95}$$

乘$f_{\underline{\delta\alpha\beta}}$，(A2.95) 就呈现为另一种形式：

$$e^{\underline{\delta}}_{\bar{m}\bar{k}} = \frac{2}{N}(f_{\underline{\delta\alpha\beta}}e^{\underline{\alpha}}_{\bar{m}\bar{l}}\tau^{\underline{\beta}}_{\bar{l}\bar{k}} + f_{\underline{\delta\alpha\beta}}\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{m}\bar{l}}e^{\underline{\beta}}_{\bar{l}\bar{k}}) \tag{A2.95'}$$

其通解仍可写成$e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{m}}$，它含有$\bar{l}\bar{m}$指标，为了$\bar{l}\bar{m}$指标，我们来考察 (A2.54) 式的作用量$S$和 (8.159)、(8.160) 式所给的规范确定项（取的是R_ξ规范，或推广的协变规范）。我们看到，可以提拱$\bar{l}\bar{m}$类型的指标的系数只有$K_{\bar{l}}$，$K^{+}_{\bar{l}}$，$\tau_{\bar{l}\bar{m}}$和$c^{\underline{a}}_{\bar{l}}$，$c^{\underline{a}+}_{\bar{l}}$。但方程式 (A2.3) 要求$\Gamma^{\mathrm{div}}_{(n+1)}(S^0_n)$中的$c^{\underline{a}}_{\bar{l}}$只能以$K - c^{\underline{a}}_{\bar{l}}\bar{u}_\alpha$的形式出现，如果$e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{m}}$中含有$c^{\underline{a}}_{\bar{l}}$，则 (A2.82) 中的$K^{\bar{l}}_{\bar{l}}e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{m}}s_{\bar{m}}u_{\underline{\alpha}}$必定含有$K$与$K$相乘的项，以至量纲要超过4，这当然是不允许的。可见$e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{m}}$中不能含有$c^{\underline{a}}_{\bar{l}}$，同理也不能含有$c^{\underline{a}+}_{\bar{l}}$，只能含有$\tau_{\underline{l}\underline{m}}$以及$\delta_{\underline{l}\underline{m}}$。

我们试把$e^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{m}}$写成如下的含有$\tau^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{m}}$和$\delta_{\underline{l}\underline{m}}$的形式：

$$e^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{m}} = gc^{ab}\tau^{\underline{b}}_{\bar{l}\bar{m}} - gw_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{a}}_{\bar{j}\bar{m}} - g\tau^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{j}}v_{\bar{j}\bar{m}} + Y_{\underline{\alpha}}\delta_{\bar{l}\bar{m}} \tag{A2.96}$$

把 (A2.96) 代入 (A2.95′) 两端，就发现右边有两个τ相乘的项，而左方只有单个的τ。为了使右端变成单个的τ，可以利用

$$\tau^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{b}}_{\bar{j}\bar{m}} - \tau^{\underline{b}}_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{a}}_{\bar{j}\bar{m}} = f_{\underline{abc}}\tau^{\underline{c}}_{\bar{l}\bar{m}} \tag{A2.97}$$

它又可写成

$$\tau^{\underline{c}}_{\bar{l}\bar{m}} = \frac{2}{N}f_{\underline{abc}}\tau^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{b}}_{\bar{j}\bar{m}} \tag{A2.97'}$$

此外还有

$$\mathrm{Tr}\tau^{\underline{a}}\tau^{\underline{b}} = T(R)\delta^{\underline{ab}} \qquad \tau^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{a}}_{\bar{j}\bar{k}} = C_2(R)\delta_{\bar{l}\bar{k}} \tag{A2.97''}$$

同时，右方比左方有更多个结构常数f相乘。为了使右方f的幂次减少，可以利用

$$f_{\underline{cba}}f_{\underline{deb}}f_{\underline{fae}} = -\frac{1}{2}Nf_{cdf} \tag{A2.98}$$

此外还有

$$f_{\underline{abc}}f_{\underline{dbc}} = N\delta_{\underline{ad}} \tag{A2.98'}$$

于是就可由 (A2.97) 把$c^{\underline{ab}}$，$w_{\bar{l}\bar{j}}$，$v_{\bar{j}\bar{m}}$，Y^α定出来，得到（见〔2〕）

$$c^{\underline{ab}} = \alpha_{\underline{d}}f_{\underline{dab}}, w_{\bar{j}\bar{l}} = -v_{\bar{j}\bar{l}}, Y^\alpha = 0 \tag{A2.99}$$

代入 (A2.96)，就得到 (A2.95) 的解

$$e^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{m}} = g\alpha_{\underline{d}}f_{\underline{dab}}\tau^{\underline{b}}_{\bar{l}\bar{m}} - g(\tau^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{j}}v_{\bar{j}\bar{m}} - v_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{a}}_{\bar{j}\bar{m}}) \tag{A2.100}$$

其中$\alpha_{\underline{d}}$，$v_{\bar{j}\bar{m}}$分别是群空间的矢量和 Higgs 空间的张量，都是自由参数，

但是如果取更复杂一些的含τ的形式，如

$$e^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{m}} = D^{\underline{ac}}(E_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{c}}_{\bar{j}\bar{m}} - \tau^{\underline{c}}_{\bar{l}\bar{j}}E_{\bar{j}\bar{m}}) \tag{A2.101}$$

或

$$e^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{m}} = F_{\bar{l}\bar{i}}\tau^{\underline{a}}_{\bar{i}\bar{j}}G_{\bar{j}\bar{m}} - G_{\bar{l}\bar{i}}\tau^{\underline{a}}_{\bar{i}\bar{j}}F_{\bar{j}\bar{m}} \tag{A2.101$_2$}$$

或

$$e^{\underline{a}}_{\bar{l}\bar{m}} = H^{\underline{a}\underline{c}}(I_{\bar{l}\bar{i}}\tau^{\underline{c}}_{\bar{i}\bar{j}}J_{\bar{j}\bar{m}} - J_{\bar{l}\bar{i}}\tau^{\underline{c}}_{\bar{i}\bar{j}}I_{\bar{j}\bar{m}}) \tag{A2.101$_3$}$$

代入（A2.95′）后又会发现，把 D, E, F, …取为任意自由参数（任意张量）时，（A2.97）和（A2.98）都用不上，不可能满足（A2.97）；除非 D, E, F, G, H, I, J…不是自由参数，而是取特定的值如：$D_{\bar{l}\bar{m}} \sim \delta_{\bar{l}\bar{m}}$，…，等等，这样就回到了（A2.96），没有新内容。不仅如此，除（A2.97）、（A2.98）外，不存在别的使（A2.95′）右方的 τ, f 的幂次减少的关系式。所以（A2.101）的各个含 τ 和自由参数的形式都不可能成为（A2.95）的解。对于更复杂形式的项，这种情况仍然存在。这说明除（A2.100）的形式外，（A2.95）的解不会有其他更复杂的形式。由此可见，（A2.100）是一个通解，事实上它比第八章的参考文献〔3〕所讨论的协变规范微扰结果要普遍得多，后者只相当于取

$$T_{\underline{a}\underline{b}} \sim \delta_{\underline{a}\underline{b}}, \qquad v_{\bar{i}\bar{j}} \sim \delta_{\bar{i}\bar{j}}, \qquad v^{+}_{\bar{i}\bar{j}} \sim \delta_{\bar{i}\bar{j}}, \qquad b^{\underline{b}}_{\underline{a}} \sim \delta^{\underline{a}\underline{b}}$$

的特殊情况。

现在，把通解（A2.96）与特解（A2.94）合在一起，就又得到（A2.69）第一式的通解如下：

$$e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{m}} = g[-\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{j}}v_{\bar{j}\bar{m}} + v_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{j}\bar{m}} + \alpha_{\zeta}f_{\zeta\underline{\alpha}\gamma}\tau^{\gamma}_{\bar{l}\bar{m}} - \frac{1}{gN}a^{\underline{\tau}}_{\underline{\alpha}\underline{\sigma}}f_{\gamma\underline{\sigma}\underline{\tau}}\tau^{\gamma}_{\bar{l}\bar{m}}] \tag{A2.102}$$

还可以再把右方第三项写成第一、第三两项的形式，因为

$$\alpha_{\zeta}f_{\zeta\underline{\alpha}\gamma}\tau^{\gamma}_{\bar{l}\bar{m}} = \alpha_{\zeta}\tau^{\zeta}_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{j}\bar{m}} - \alpha_{\zeta}\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{j}}\tau^{\zeta}_{\bar{j}\bar{m}} \tag{A2.103}$$

所以

$$e^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{m}} = g[-\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{l}\bar{j}}(v_{\bar{j}\bar{m}} + v'_{\bar{j}\bar{m}}) + (v_{\bar{l}\bar{j}} + v'_{\bar{l}\bar{j}})\tau^{\underline{\alpha}}_{\bar{j}\bar{m}} - \frac{1}{gN}a^{\underline{\tau}}_{\underline{\alpha}\underline{\sigma}}f_{\gamma\underline{\sigma}\underline{\tau}}\tau^{\gamma}_{\bar{l}\bar{m}}] \tag{A2.104}$$

与（A2.88）对照：

$$-V_{\bar{l}\bar{m}} = v_{\bar{l}\bar{m}} + v'_{\bar{l}\bar{m}} \tag{A2.105}$$

其中

$$v'_{\bar{l}\bar{m}} = \alpha_{\eta}\tau^{\eta}_{\bar{l}\bar{m}} \tag{A2.106}$$

α_{η} 则是任意一阶张量。另外，$T_{\gamma\beta}$ 和（A2.92）一致。

这样，就同时求得了微扰论情况下的（A2.69）第一方程的通解，并且证明了 $V_{\bar{l}\bar{m}}$ 和 $T_{\gamma\underline{\alpha}}$ 的存在。对于 e^{+} 和 V^{+}，也可以同样证明其存在（作为一个练习）。

总的来说，到此为止我们已经证明了 $\mathscr{F}[A, s, s^{+}, u, K, L]$ 的存在。$\Gamma[A, s, s^{+}, u, K, L]$ 的一般形式里面含 K, L, u 的项，都正好就是 $\mathscr{G}\mathscr{F}[A, s, s^{+}, u, K, L]$ 中含 K, L, u 的项。剩下来的最后一个问题就是不含 K, L, u 的项。对比（A2.81），（A2.82），有

$$\begin{aligned}\Gamma[A,s,s^{+},u,0,K,L] &= F[A,s,s^{+}] + \mathscr{G}\mathscr{F}[A,s,s^{+},u,K,L]\\ &\quad - \frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i}S_{i\beta}A_{\beta} - \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l}V_{l\beta}s_{\beta} - \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s^{+}_l}V^{+}_{l\beta}s^{+}_{\beta}\\ &= G[A,s,s^{+}] + \mathscr{G}\mathscr{F}[A,s,s^{+},u,K,L]\end{aligned} \tag{A2.107}$$

其中

$$G[A,s,s^+] = F[A,s,s^+] - \frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i} S_{i\beta} A_\beta - \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l} V_{l\beta} s_\beta - \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+} V_{l\beta}^+ s_l^+ \tag{A2.108}$$

这样，我们似乎又回到了（A2.83）。不过，我们已经证明了 $S_{i\beta}$，$V_{l\beta}$，$V_{l\beta}^+$ 的存在，所以事实上比（A2.83）进了一大步。

由于要求 Γ 满足 $\mathscr{S}\Gamma=0$，所以也要求

$$\mathscr{S}G = 0 = \left((\Delta_i^\beta + gt_{ij}^\beta A_j)\frac{\delta G}{\delta A_i} + g\tau_{lk}^\beta s_k \frac{\delta G}{\delta s_l} + g\tau_{kl}^{\beta +} s_k^+ \frac{\delta G}{\delta s_l^+}\right)u_\beta \tag{A2.109}$$

可见 $G[A, s, s^+]$ 必须是一个规范不变的、量纲为 4 的定域泛函。这样，通过（A2.108）就把 $F[A, s, s^+]$ 也确定了下来。说明了 $G[A, s, s^+]=0$ 时，$F[A, s, s^+]$ 的特解就是

$$\frac{\delta L'_{inv}}{\delta A_i} S_{i\beta} A_\beta + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l} V_{l\beta} s_\beta + \frac{\delta L'_{inv}}{\delta s_l^+} V_{l\beta}^+ s_\beta^+ \tag{A2.110}$$

我们记得 $F[A, s, s^+]$ 应满足（A2.74）式，所以（A2.110）的表达式也应该满足（A2.74）式。事实上确实是满足的，请读者自己验证。

关于 $\tilde{\Gamma}^{\mathrm{div}}_{(n+1)}(S_n^0)$ 的通解可写成（A2.4）形式的证明到此告一段落，因为 $\bar{u}\neq 0$ 时，把 K_α 恢复成 $K_\alpha - F_\alpha^a \bar{u}_a$，$K_l^s$、$K_l^{s+}$ 恢复成 $K_l^s - c_l^a u_a$、$K_l^{s+} - c_l^{a+} u_a$ 是没有困难的。在没有 Higgs 场的情况下，则（A2.4）简化成为（A2.2），这也没有任何困难。

这个证明方法还可以扩充到含有 Abel 子群的情况下，与 Abel 子群相对应的 L_α 等于零，与 Abel 子群相对应的 $F-P$ 场可写成 u，$\bar{u}$（没有群指标）。此时（A2.113）或（A2.2）形式的 Γ 的解包括全部既含 u_a 又含 u 的解，但它并不包括全部只含 u 不含 u_a 的解。换句话说，在有 Abel 子群的情况下，Γ 的通解并不能写成（A2.113）或（A2.2）的形式，在 §8－10 中给出了有一个 Abel 子群时的 Γ 的通解。这个方法也可以推广到有若干个 Abel 子群和若干个非 Abel 子群的情况[3][4]。

参考文献

1 S. D. Joglekor, B. W. Lee, Annals of Physics, 97 (1976) 160

2 陆培荣，汪容，Commun. in Theor. Dhys.，4（1985）Yang-Mills 场 30 周年纪念论文集

3 汪容，物理学报，30（1981）731

4 李文铸，汪容，诸绍林，Commun. in Theor, Dhys, 2（1983）1533

附录三　深度非弹性散射

——重正化群应用一例

这个附录里将系统地讨论深度非弹性散射问题，并给出几个反常量纲的计算。

§ A3－1　光锥行为为什么重要

定义：$P^2=-m^2$，m 是靶质量

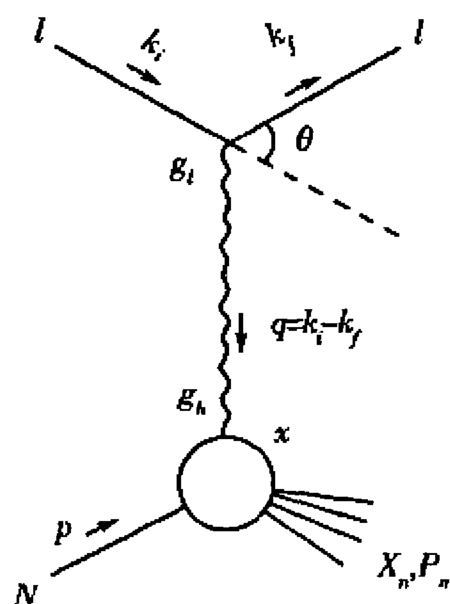
$$\nu=-\frac{P\cdot q}{m}$$

$$q^2=(k_i-k_f)^2\approx 2k_{i0}k_{f0}-2k_i\cdot k_f>0$$

实验室系：$\nu=q_0$

$$\omega=\frac{2\nu m}{q^2}=-\frac{2P\cdot q}{q^2}=\frac{1}{x}$$

$$E_i=k_{i0},E_f=k_{f0} \qquad (A3.1)$$



散射振幅是

$$\sim -g_lg_h\frac{-i}{q^2+M^2}\cdot l_\mu\cdot\langle X_n,P_n\mid J_\mu(0)\mid P,s\rangle\cdot\delta^4(P+q-P_n) \qquad (A3.2)$$

这里要说明几点：

1. g_l 和 g_h 是与各有关顶角相联系的耦合常数。

2. M^2 随传播子而不同。对于光子，$M^2=0$；对于 $W^\pm$（带电流），$M^2=M_W^2$；对于 Z^0（中性流），$M^2=M_z^2$。

3. 忽略了轻子质量，从而忽略了传播子中含有$\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}$的项，因为这个项作用在 l_μ 上正比于轻子质量。

4. 一般可把 l_μ 写成

$$\bar{u}(k_f)\gamma_\mu(a-b\gamma_5)u(k_i)$$

于是

$$\{l_\mu\cdot\langle X_nP_n\mid J_\mu(0)\mid P,s\rangle\}^*$$

$$=\bar{u}(k_i)\gamma_4(a-b\gamma_5)\gamma_\mu\gamma_4u(k_f)\cdot\langle P,s\mid J_\mu(0)(-1)^{\delta_{\mu4}}\mid X_nP_n\rangle$$

[$(-1)^{\delta_{\mu4}}$ 的出现是因为 $J_{1,2,3}$ 厄米，J_4 反厄米：

$$J_{1,2,3}^+=J_{1,2,3},\quad J_4^+=-J_4$$

又 $\gamma_5=\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$，$\gamma_\mu^+=\gamma_\mu$，$\gamma_5^+=\gamma_5$]

$$=-\bar{u}(k_i)(a+b\gamma_5)\gamma_\mu u(k_f)\cdot\langle P,s\mid J_\mu(0)\mid X_nP_n\rangle$$

$$= -\bar{u}(k_i)\gamma_\mu(a-b\gamma_5)u(k_f)\cdot\langle P,s\mid J_\mu(0)\mid X_nP_n\rangle \tag{A3.3}$$

对始态自旋求平均，对终态自旋求和，得到单位时间散射几率是（有些与后面讨论无关的因子已略去）：

$$\mathrm{d}W \sim \left(\frac{g_l g_h}{q^2+M^2}\right)^2\cdot(2\pi)^4\delta^4(p+q-P_n)\cdot\frac{1}{\eta}\mathrm{Tr}\{\hat{k}_i\gamma_\mu(a-b\gamma_5)\hat{k}_f\gamma_\nu(a-b\gamma_5)\}$$

$$\cdot\frac{\mathrm{d}^3k_f}{(2\pi)^3}\cdot\frac{1}{4\pi}\sum_{s,n}\int\langle P,s\mid J_\mu(0)\mid X_nP_n\rangle\langle X_nP_n\mid J_\nu(0)\mid P,s\rangle\cdot\prod_i\frac{\mathrm{d}^3P_{ni}}{(2\pi)^3}$$

$$=\left(\frac{g_l g_h}{q^2+M^2}\right)\cdot(2\pi)^4\delta^4(p+q-P_n)\cdot L_{\mu\nu}\cdot W_{\mu\nu} \tag{A3.4}$$

其中

$$L_{\mu\nu}=\frac{1}{\eta}\mathrm{Tr}\{\hat{k}_i\gamma_\mu(a-b\gamma_5)\hat{k}_f\gamma_\nu(a-b\gamma_5)\}$$

因为对轻子始态自旋求平均，终态自旋求和，所以在 eN 的情况下，$\frac{1}{\eta}=\frac{1}{2}$（$b=0$），在 υN 的情况下，$\eta=1$（只有左旋，不需$\frac{1}{2}$）。在 υN 的情况下，$\bar{u}$（k_f）要换成 υ（k_f），u（k_j）要换成 υ（k_i）。

（A3.4）中另一个因子 $W_{\mu\nu}$是

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\sum_{s,n}\int(2\pi)^4\delta^4(p+q-P_n)$$

$$\cdot\langle Ps\mid J_\mu(0)\mid X_nP_n\rangle\langle X_nP_n\mid J_\nu(0)\mid P,s\rangle\cdot\prod_i\frac{\mathrm{d}^3P_{ni}}{(2\pi)^3}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{s,n}\int e^{-iqz-ipz+ip_n z}\mathrm{d}^4z\cdot$$

$$\langle PS\mid J_\mu(0)\mid X_nP_n\rangle\langle X_nP_n\mid J_\nu(0)\mid P,s\rangle\cdot\prod_i\frac{\mathrm{d}^3P_{ni}}{(2\pi)^3}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{s,n}\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s\mid J_\mu(z)J_\nu(0)\mid P,s\rangle$$

（这里利用了平移公式）

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_{s}\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s\mid[J_\mu(z),J_\nu(0)]\mid P,s\rangle \tag{A3.5}$$

在（A3.5）中增加了一项：

$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{s}\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s\mid J_\nu(0)J_\mu(z)\mid P,s\rangle$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sum_{s,n}\int e^{-iqz+ipz-ip_n z}\mathrm{d}^4z$$

$$\cdot\langle P,s\mid J_\nu(0)\mid X_n,P_n\rangle\langle X_n,\cdot P_n\mid J_\mu(0)\mid P,s\rangle\prod_i\frac{\mathrm{d}^3P_{ni}}{(2\pi)^3}$$

d^4z 积分后出现因子

$$\delta^4(p-q-P_n)$$

但动量能量守恒，没有一个 P_n 能够满足 $p-q-P_n=0$，所以这加上的一项为零。

高能极限

根据（A3.1）的定义，取实验室系：

$$\upsilon=\frac{mq_0}{m}=q_0=(E_i-E_f)$$

$$q=(0,\ 0,\ \sqrt{\upsilon^2+q^2},\ \upsilon)$$

这里 $$\boldsymbol{q}^2=q^2+q_0^2=q^2+\upsilon^2,\quad q_3=\sqrt{\boldsymbol{q}^2}。$$

引入光锥变量：

$$q_\pm\equiv q_0\pm q_3,\quad q_0=(q_++q_-)/2,\quad q_3=(q_+-q_-)/2$$

$$z_\pm\equiv z_0\pm z_3,\quad z_0=(z_++z_-)/2,\quad z_3=(z_+-z_-)/2 \qquad (A3.6)$$

Jacobi 行列式是$\frac{1}{2}$。

$$q\cdot z=q_3z_3-q_0z_0=-\frac{1}{2}(q_-z_++q_+z_-) \qquad (A3.7)$$

考察 Bjorken 极限：

$$\upsilon\to+\infty,q^2\to+\infty$$

$$q_\pm\equiv\upsilon\pm\sqrt{\upsilon^2+q^2}=\upsilon\pm\upsilon\sqrt{1+\frac{2mx}{\upsilon}}\to\begin{cases}=2\upsilon\\ =-mx=-\dfrac{q^2}{2\upsilon}\end{cases} \qquad (A3.8)$$

把（A3.7）代入（A3.5）：

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\sum_s\int\frac{1}{2}\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\mathrm{d}z_+\ \mathrm{d}z_-\ e^{\frac{i}{2}(q_-z_++q_+z_-)}$$
$$\cdot\langle P,s\mid[J_\mu(z),J_\nu(0)]\mid P,s\rangle \qquad (A3.9)$$

与（A3.8）比较，主要贡献来自

$$|z_-|\lesssim\frac{1}{\upsilon},\ |z_+|\lesssim\frac{2}{mx} \qquad (A3.10)$$

然而

$$\langle P,s\mid[J_\mu(z),J_\nu(0)]\mid P,s\rangle$$

只在 $z^2\leqslant0$ 时（类时）才不为0，所以主要贡献又是在如下区域：

$$z^2=z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_0^2=z_1^2+z_2^2-z_+z_-\leqslant0$$

或写成

$$z_+z_--z_1^2-z_2^2=-z^2=|z^2|\geqslant0, \qquad (A3.11)$$

可见要求 z_+，z_-都为+或都为-。再根据（A3.10），可见主要贡献在

$$\frac{2}{mx\upsilon}=+\frac{4}{q^2}\gtrsim z_+z_-\gtrsim|z^2|\gtrsim0 \qquad (A3.12)$$

所以，当 $\upsilon\to\infty$，$q^2\to\infty$，主要贡献在

$$z^2\to0$$

处。即〔J_μ^+（z），J_ν（0）〕在光锥处（$z^2\to0$）的行为起主要作用。

从（A3.10）还看到，$|z_+|$ 不一定要→0，而 $|z_-|$ 要→0，就是说，$z_0=+z_3$ 这一支光锥（$z_-=0$）有最主要贡献。

§ A3－2　结构函数和交叉关系

我们看（A3.5），$W_{\mu\nu}$是一个二阶张量。由于协变性，又由于不积分的动量只有 P，q，所以得到下式（注意（A3.13）恰好满足 $q_\mu W_{\mu\nu}(P,q)=0$）：

$$W_{\mu\nu}(P,q)=-\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)W_1(q^2,\upsilon)+\left(P_\mu-q_\mu\frac{p\cdot q}{q^2}\right)\left(P_\nu-q_\nu\frac{p\cdot q}{q^2}\right)\frac{W_2(q^2,\upsilon)}{m^2}$$
$$-i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{P_\lambda q_\rho}{2m^2}W_3(q^2,\upsilon) \tag{A3.13}$$

在（A3.13）中本来还有其他的项，但与 $L_{\mu\nu}$收缩后，有的项是零，有的项正比于轻子质量，当忽略轻子质量时，这种项也应略去。

为了进一步研究 $W_{\mu\nu}$，我们来考察下列张量 $T_{\mu\nu}(P,q)$（类似于（A3.13），也可写成三项）：

$$T_{\mu\nu}(P,q)=\frac{i}{4\pi}\sum_s\int e^{-iqz}d^4z\langle P,s|T(J_\mu(z)J_\nu(0)|P,s\rangle$$
$$=-\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)T_1(q^2,\upsilon)$$
$$+\left(P_\mu-q_\mu\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\left(P_\nu-q_\nu\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\frac{T_2(q^2,\upsilon)}{m^2}-i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\frac{P_\lambda q_\rho}{2m^2}T_3(q^2,\upsilon) \tag{A3.14}$$

固定 q^2，延拓 $\upsilon=-\frac{P\cdot q}{m}$（$\upsilon=q_0$，在实验室系），可看到 $W_{\mu\nu}$是 $T_{\mu\nu}$在 v 的实轴上侧的虚部。现在来证明这一点：

$$T_{\mu\nu}(P,q)=\frac{i}{4\pi}\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\sum_{s,n}\{\theta(z_0)\langle P,s|J_\mu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\nu(0)|P,s\rangle\cdot e^{i(p_n-p)z}$$
$$+\theta(-z_0)\langle P,s|J_\nu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\mu(0)|P,s\rangle\cdot e^{-i(p_n-p)z}\}$$
$$=\frac{i}{4\pi}\sum_{s,n}(2\pi)^3\Big\{\delta^3(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_n)$$
$$\cdot\frac{-1}{i(q_0+P_0-P_{n0}+i\eta)}\langle P,s|J_\mu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\nu(0)|P,s\rangle$$
$$+\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}_n)$$
$$\cdot\frac{1}{i(q_0-P_0+P_{n0}-i\eta)}\langle P,s|J_\nu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\nu(0)|P,s\rangle\Big\} \tag{A3.15}$$

$$\therefore\quad T_{\mu\nu}(P\cdot q)=\frac{1}{4\pi}\sum_{s,n}(2\pi)^3\Big\{\Big[P\frac{1}{q_0+P_0-P_{n0}S^3(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}_n)}\Big]$$
$$+i\pi\delta^4(q+P-P_n)\cdot\langle P,s|J_\mu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\nu(0)|P,s\rangle$$

$$+\left[P\frac{1}{q_0-P_0+P_{n0}}\delta^3(q+P+P_n)\right]$$

$$+i\pi\delta^4(q-P+P_n)\cdot\langle P,s|J_\nu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\mu(0)|P,s\rangle\Big\}$$

(A3.16)

取实验室系，$q_0=\upsilon$，在（A3.15）中，先令 $\eta=0$，再延拓 $q_0=\upsilon$。

从（A3.15）右方出发，把 $q_0=\upsilon$ 延拓到 $\upsilon+i\varepsilon$：

$$T_{\mu\nu}(P,q,q_0=\upsilon+i\varepsilon)=\mathrm{Re}T_{\mu\nu}(q^2,\upsilon)$$
$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{s,n}(2\pi)^3\{i\pi\delta^4(q+P-P_n)\langle P,s|J_\mu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\nu(0)|P,s\rangle$$
$$-i\pi\delta^4(q-P+P_n)\langle P,s|J_\nu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\mu(0)|P,s\rangle\}$$

再把 $q_0=\upsilon$ 延拓到 $\upsilon-i\varepsilon$：

$$T_{\mu\nu}(P,q,q_0=\upsilon-i\varepsilon)=\mathrm{Re}T_{\mu\nu}(q^2,\upsilon)$$
$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{s,n}(2\pi)^3\{-i\pi\delta^4(q+P-P_n)\langle P,s|J_\mu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\nu(0)|P,s\rangle$$
$$+i\pi\delta^4(q-P+P_n)\langle P,s|J_\nu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\mu(0)|P,s\rangle\}$$

可以看到：

$$\mathrm{Im}T_{\mu\nu}(P,q,q_0=\upsilon+i\varepsilon)=-\mathrm{Im}T_{\mu\nu}(P,q,q_0=\upsilon-i\varepsilon)\qquad(A3.17)$$

而且有

$$\mathrm{Im}T_{\mu\nu}(P,q,q_0=\upsilon+i\varepsilon)$$
$$=\frac{1}{8\pi}\sum_{s,n}(2\pi)^4\{\delta^4(q+P-P_n)\langle P,s|J_\mu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\nu(0)|P,s\rangle$$
$$=-\delta^4(q-P+P_n)\langle P,s|J_\nu(0)|n,P_n\rangle\langle n,P_n|J_\mu(0)|P,s\rangle\}$$
$$=\frac{1}{8\pi}\sum_s\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s|[J_\mu(z),J_\nu(0)]|P,s\rangle=\frac{1}{2}W_{\mu\nu}(P,q)\qquad(A3.18)$$

（参见（A3.5））。

交叉关系

自（A3.5）：

$$W_{\mu\nu}(P,-q)=\frac{1}{4\pi}\sum_s\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s|[J_\mu(z),J_\nu(0)]|P,s\rangle$$

$$(z\to-z)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_s\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s|[J_\mu(-z),J_\nu(0)]|P,s\rangle$$

（插入中间态，利用平移公式）

$$=\frac{1}{4\pi}\sum_s\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s|[J_\mu(0),J_\nu(z)]|P,s\rangle$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\sum_s\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s|[J_\nu(z),J_\mu^+(0)]P,s\rangle$$

$$\overline{W}_{\mu\nu}(P,q)=\frac{1}{4\pi}\sum_s\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s|[J_\nu(0),J_\nu^+(0)]|P,s\rangle\qquad(A3.19)$$

对比（A3.5）和（A3.19）则有

$$W_{\mu\upsilon}(P,-q)=-\overline{W}_{\upsilon\mu}(P,q) \tag{A3.20}$$

电生的情况：自（A3.20），（A3.13）（电磁作用 $W_3=0$），得到

$$-\left(\delta_{\mu\upsilon}-\frac{q_\mu q_\upsilon}{q^2}\right)W_1(q^2,-\upsilon)+\left(P_\mu-q_\mu-\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\left(P_\upsilon-q_\upsilon\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\frac{W_2(q_1^2,-\upsilon)}{m^2}$$

$$=\left(\delta_{\mu\upsilon}-\frac{q_\mu q_\upsilon}{q^2}\right)W_1(q^2,\upsilon)-\left(p_\mu-q_\mu\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\left(P_\upsilon-q_\upsilon\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\frac{W_2(q^2,\upsilon)}{m^2} \tag{A3.21}$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}W_1(q^2,-\upsilon)&=-W_1(q^2,\upsilon)\\W_2(q^2,-\upsilon)&=-W_2(q^2,\upsilon)\end{aligned}\right\} \tag{A3.22}$$

υ生和$\bar{\upsilon}$生的情况：类似（A3.5）；与$\bar{\upsilon}$生有关的是

$$\overline{W}_{\upsilon\mu}(P\cdot q)=\frac{1}{\Delta\pi}\sum_s\int e^{-iqz}\mathrm{d}^4z\langle P,s\mid[J_\mu^+(z),J_\upsilon^+(0)]\mid P,s\rangle$$

$$=-W_\mu(P,-q)(-1)^{\delta_\mu^4+\delta_\upsilon^4} \tag{A3.23}$$

（引入 $(-1)^{\delta_\mu^4+\delta_\upsilon^4}$因子是由于 J_4 反厄米）。

自（A3.13），与υ生有关的 $W_{\upsilon\mu}$取如下形式：

$$-W_{\mu\upsilon}(P,-q)=\left(\delta_{\mu\upsilon}-\frac{q_\mu q_\upsilon}{q^2}\right)W_1^{(\upsilon)}(q^2,-\upsilon)$$

$$-\left(P_\mu-q_\mu\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\left(P_\upsilon-q_\upsilon\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\frac{W_2^{(\upsilon)}(q^2,-\upsilon)}{m^2}$$

$$+i\varepsilon_{\mu\upsilon\lambda\rho}\frac{P_\lambda q_\rho}{2m^2}W_3^{(\upsilon)}(q^2,-\upsilon)$$

（A3.23）的 $\overline{W}_{\mu\upsilon}$按其 Lorentz 变换性质应取如下形式：

$$\overline{W}_{\mu\upsilon}(P,q)=-\left(\delta_{\mu\upsilon}-\frac{q_\mu^* q_\upsilon^*}{q^2}\right)W_1^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)$$

$$+\left(P_\mu^*-q_\mu^*\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\left(P_\upsilon^*-q_\upsilon^*\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\frac{W_2^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)}{m^2}$$

$$+i\varepsilon_{\mu\upsilon\lambda\rho}\frac{P_\lambda^* q_\rho^*}{2m^2}W_3^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)$$

$$=-\left(\delta_{\mu\upsilon}-\frac{q_\mu q_\upsilon}{q^2}\right)(-1)^{\delta_\mu^4+\delta_\upsilon^4}W_1^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)$$

$$+\left(P_\mu-q_\mu\frac{P\cdot q}{q^2}\right)\left(P_\upsilon-q_\upsilon\frac{P\cdot q}{q^2}\right)(-1)^{\delta_\mu^4+\delta_\upsilon^4}\frac{W_2^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)}{m^2}$$

$$-i\varepsilon_{\mu\upsilon\lambda\rho}\frac{P_\lambda q_\rho}{2m^2}(-1)^{\delta_\mu^4+\delta_\upsilon^4}W_3^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)$$

代入（A3.23），对比得到

$$\left.\begin{aligned}W_1^{(\upsilon)}(q^2,-\upsilon)&=-W_1^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)\\W_2^{(\upsilon)}(q^2,-\upsilon)&=-W_2^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)\\W_3^{(\upsilon)}(q^2,-\upsilon)&=-W_3^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)\end{aligned}\right\} \tag{A3.24}$$

$$\therefore\quad W_i^{(\upsilon)}(q^2,-\upsilon)+W_i^{(\bar{\upsilon})}(q^2,-\upsilon)=-[W_i^{(\upsilon)}(q^2,\upsilon)+W_i^{(\bar{\upsilon})}(q^2,\upsilon)]$$

$$W_i^{(\upsilon)}(q^2,-\upsilon)-W_i^{(\bar\upsilon)}(q^2,-\upsilon)=W_i^{(\upsilon)}(q^2,\upsilon)-W_i^{(\bar\upsilon)}(q^2,\upsilon)$$
$$(i=1,2,3) \tag{A3.25}$$

§ A3 −3　T_i 的色散关系

上面已看到（见（A3.17），（A3.18）），在

$$\mathrm{Im}T_{\mu\nu}(P,q,q_0=\upsilon\pm i\varepsilon)=\pm\frac{1}{2}W_{\mu\nu}(P,q)$$

中有两个 δ 函数，一个是 δ^4（$q+P-P_n$），一个是 δ^4（$q-P+P_n$），其中 P_n 是物理的态。所以，W_1，W_2，W_3 不等于零的条件是：

A. $(P+q)^2=P_n^2=\begin{cases}-m^2 & N\text{态}\\ \leqslant-(m+m_\pi)^2 & N\pi,\ N\pi\pi,\ \cdots,\ \text{等态}\end{cases}$

B. $(P-q)^2=P_n^2=\begin{cases}-m^2 & N\text{态}\\ \leqslant-(m+m_\pi) & N\pi,\ N\pi\pi,\ \cdots,\ \text{等态}\end{cases}$

于是有四种情况实验室系：

1. $(P+q)^2=-m^2-2mq_0+q^2=-m^2\rightarrow q_0=\dfrac{q^2}{2m}>0$

2. $(P+q)^2=-m^2-2mq_0+q^2\leqslant-m^2-2mm_\pi-m_\pi^2\rightarrow q_0\geqslant m_\pi+\dfrac{m_\pi^2}{2m}+\dfrac{q^2}{2m}>0$

3. $(P-q)^2=-m^2+2mq_0+q^2=-m^2\rightarrow q_0=-\dfrac{q^2}{2m}<0$

4. $(P-q)^2=-m^2+2mq_0+q^2\leqslant-m^2-2mm_\pi-m_\pi^2\rightarrow q_0\leqslant-m_\pi-\dfrac{m_\pi^2}{2m}-\dfrac{q^2}{2m}<0$

(A3.26)

知道了 T 的极点和割线，就可以写出 T 的色散关系。由于（A3.14），对比后知道：

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}T_1(q^2,\upsilon\pm i\varepsilon)&=\pm\frac{1}{2}W_1(q^2,\upsilon)\\ \mathrm{Im}T_2(q^2,\upsilon\pm i\varepsilon)&=\pm\frac{1}{2}W_2(q^2,\upsilon)\\ \mathrm{Im}T_3(q^2,\upsilon\pm i\varepsilon)&=\pm\frac{1}{2}W_3(q^2,\upsilon)\end{aligned} \tag{A3.27}$$

所以我们现在分别写出 T_1，T_2，T_3 的色散关系。假定需要 J 次减除，则色散关系是：

$$T_i(q^2,\upsilon)=P_i^{(J-1)}(q^2,\upsilon)+\frac{\upsilon^J}{2\pi i}\int_C\frac{T_i(q^2,\upsilon')}{\upsilon'^J(\upsilon'-\upsilon)}d\upsilon'\qquad i=1,2,3 \tag{A3.28}$$

这里 $P_i^{(J-1)}$（q^2，υ）是 υ 的（$J-1$）次多项式。C 见下面的图，大圆上积分为零。J 次减除是利用了

$$\begin{aligned}\frac{1}{z'-z}&=\frac{z}{z'}\cdot\frac{1}{z'-z}+\frac{1}{z'}=\frac{z}{z'}\left(\frac{z}{z'}\frac{1}{z'-z}+\frac{1}{z'}\right)+\frac{1}{z'}\\ &=\frac{z^2}{z'^2}\frac{1}{z'-z}+\frac{z}{z'^2}+\frac{1}{z'}\end{aligned}$$

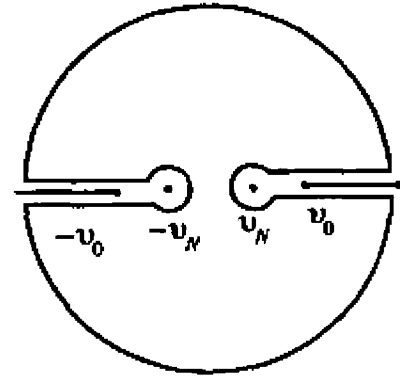
$$= \frac{z^J}{z'^J(z'-z)} + \frac{z^{J-1}}{z'^J} + \cdots + \frac{z}{z'^2} + \frac{1}{z'}$$

并把$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\cdots dz'}{z'-z}$换成$\frac{z^J}{2\pi i}\int \frac{\cdots dz'}{z'^J(z'-z)} + P^{(J-1)}(z)$，$P^{(J-1)}(z)$是$z$的$(J-1)$次多项式，多项式系数作为待定参数。

根据（A3.26）给出的奇异性，υ的奇异性是：

1. $|\upsilon| = |q_0| = \frac{q^2}{2m} = \upsilon_N$，有极点。（A3.29）

2. $|\upsilon| = |q_0| \geq m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m} + \frac{q^2}{2m} = \upsilon_0$，有割线。



据此可画出（A3.28）的积分回路图，复平面上其他地方无奇异性。于是，一般可以把（A3.28）的积分写成如下形式（极点项中间态是一个核子，d^3P_n中间态求

和，$d\upsilon' = dq_0'$积分后，正好把四维δ函数消去，υ固定到$\pm\upsilon_N$：

$$T_i(q^2,\upsilon) = P_i^{(J-1)}(q^2,\upsilon) + \left(\frac{\upsilon}{\upsilon_N}\right)^J\left[\frac{g_{\upsilon N}}{\upsilon_N-\upsilon} + (-1)^J\frac{g_{-\upsilon_N}}{-\upsilon_N-\upsilon}\right]$$

$$+ \frac{\upsilon^J}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\upsilon_0} + \int_{\upsilon_0}^{\infty}\right)\frac{W_i(q^2,\upsilon')}{\upsilon'^J(\upsilon'-\upsilon)}d\upsilon' \qquad \text{(A3.30)}$$

根据（A3.17）和（A3.18），割线积分中利用了

$$T_i(q^2,\upsilon+i\varepsilon) - T_i(q^2,\upsilon-i\varepsilon) = iW_i(q^2,\upsilon)$$

再把变数换成$\omega = \frac{1}{x} = \frac{2\upsilon m}{q^2}$，则有（$\omega_N = 1$）

$$T_i(q^2,\omega) = P_i^{(J-1)}(q^2,\omega) + \left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)^J\left[\frac{g_{\upsilon N}}{\omega_N-\omega} + (-1)^J\frac{g_{-\upsilon N}}{-\omega_N-\omega}\right]\left(\frac{2m}{q^2}\right)$$

$$+ \frac{\omega^J}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\frac{2\upsilon_0 m}{q^2}} + \int_{\frac{2\upsilon_0 m}{q^2}}^{\infty}\right)\frac{W_i(q^2,\omega')}{\omega'^J(\omega'-\omega)}d\omega' \qquad \text{(A3.31)}$$

这里$P_i^{(J-1)}(q^2,\omega)$是ω的$(J-1)$次多项式。当$q^2\to\infty$，极点项的贡献$\to0$，可以忽略。又自（A3.29）：

$$\frac{2\upsilon_0 m}{q^2} = \left(m_\pi + \frac{m_\pi^2}{2m} + \frac{q^2}{2m}\right)\frac{2m}{q^2} \to 1$$

所以，当$q^2\to\infty$，（A3.31）简化为

$$T_i(q^2,\omega) = P_i^{(J-1)}(q^2,\omega) + \frac{\omega^J}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty}\right)\frac{W_i(q^2,\omega')}{\omega'^J(\omega'-\omega)}d\omega' \qquad \text{(A3.32)}$$

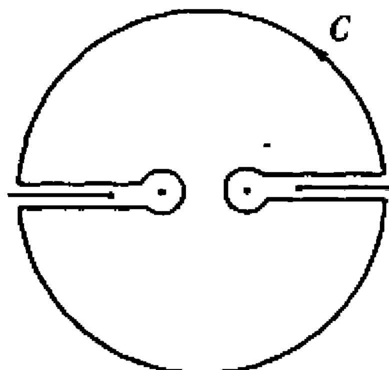
现在我们取$\frac{T_i}{\upsilon^n}$，而不是T_i，来写出色散关系。由于n取得足够大，所以减除没有必要（若原先需减除J次，则取$n+1>J$，就足够使积分在无穷远处不发散）。类似上面的讨论，也是先写成υ'的Cauchy积分，再把υ换成ω，则$q^2\to\infty$时，极点项可以略去，于是有：

$$T_i(q^2,0)\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega\frac{T_i(q^2,\omega)}{\omega^{n+1}}=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_1^{\infty}\right)d\omega\frac{W_i(q^2,\omega)}{\omega^{n+1}} \quad (A3.33)$$

右方换 $x=\frac{1}{\omega}$，$d\omega=-\frac{dx}{x^2}$：

$$T_i(q^2,0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega\frac{T_i(q^2,\omega)}{\omega^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}(W_i(q^2,x)+(-1)^{n-1}W_i(q^2,-x)) \quad (A3.34)$$



自交叉关系（A3.22），对于 eN 的 W_1，W_2 有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega\frac{T_i(q^2,\omega)}{\omega^{n+1}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}(1+(-1)^n)W_i(q^2,x)$$

$$(i=1,2) \quad (A3.35)$$

自交叉关系（A3.25），对于 υ_N 和 $\bar{\upsilon}_N$ 有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega\frac{T_i^{\upsilon+\bar{\upsilon}}(q^2,\omega)}{\omega^{n+1}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}(1+(-1)^n)W_i^{\upsilon+\bar{\upsilon}}(q^2,x)$$

$$(i=1,2,3) \quad (A3.36)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega\frac{T_i^{\upsilon-\bar{\upsilon}}(q^2,\omega)}{\omega^{n+1}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\cdot x^{n-1}(1+(-1)^{n-1})W_i^{\upsilon-\bar{\upsilon}}(q^2,x)$$

$$(i=1,2,3)$$

§ A3－4　光锥展开所用到的公式

$$J_1(z)=\frac{z}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l z^{2l}}{2^{2l}l!(l+1)!}$$

$$N_1(z)=\frac{z}{\pi}J_1(z)\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right)+C\right]-\frac{2}{\pi z}$$

$$-\left(\frac{1}{\pi}\right)\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}}{l!(l-1)!}\left[2\sum_{m=1}^{l-1}\frac{1}{m}-\frac{1}{l}\right]$$

$$K_1(z)=I_1(z)\ln\frac{Cz}{2}-\frac{1}{2}\frac{z}{2}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}}{l!(l+1)!}\left[2\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{k}+\frac{1}{l+1}\right]+\frac{1}{z}$$

$$I_1(z)=\frac{z}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2l}}{l!(l+1)!} \quad (A3\ 37)$$

$$C = 0.57721\cdots \text{是 Euler 常数}$$

注意以下都是取 $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$ 这种度规：

$$\begin{aligned}
\Delta^{(+)}(x,m) &= -D^-(x,m) = -\frac{1}{4\pi}\delta(-x^2)\varepsilon(x_0) \\
&+ \theta(-x^2)\frac{m}{8\pi\sqrt{-x^2}}(\varepsilon(x_0)J_1(m\sqrt{-x^2}) - iN_1(m - \sqrt{-x^2})) \\
&- \theta(x^2)\frac{im}{4\pi^2\sqrt{x^2}}K_1(m\sqrt{x^2}) \\
\Delta^{(-)}(x,m) &= -D^+(x,m) = -\frac{1}{4\pi}\delta(-x^2)\varepsilon(x_0) \\
&+ \theta(-x^2)\frac{m}{8\pi\sqrt{-x^2}}(\varepsilon(x_0)J_1(m\sqrt{-x^2}) + iN_1(m\sqrt{-x^2})) \\
&+ \theta(x^2)\frac{im}{4\pi^2\sqrt{x^2}}K_1(2\sqrt{x^2}) \\
\Delta(x,m) &= \Delta^{(+)}(x,m) + \Delta^{(-)}(x,m) = -D(x,m) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\delta(-x^2)\varepsilon(x_0) + \theta(-x^2)\frac{m}{4\pi\sqrt{-x^2}}\varepsilon(x_0)J_1(m\sqrt{-x^2}) \\
\Delta_F(x,m) &= i\theta(x_0)\Delta^{(+)}(x,m) - i\theta(-x_0)\Delta^{(-)}(x,m) \\
&= -iD^c(x,m) = -\frac{i}{4\pi}\delta(-x^2) \\
&+ \theta(-x^2)\frac{im}{8\pi\sqrt{-x^2}}(J_1(m\sqrt{-x^2}) - iN_1(m\sqrt{-x^2})) \\
&+ \theta(x^2)\frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}}K_1(m\sqrt{x^2})
\end{aligned} \tag{A3.38}$$

把（A3.37）代入（A3.38），取 $x^2 \to 0$ 时的最大项：

$$\begin{aligned}
\Delta^{(\pm)}(x,m) &\doteq -\frac{1}{4\pi}\delta(-x^2)\varepsilon(x_0) \\
&+ \theta(-x^2)\frac{m}{8\pi\sqrt{-x^2}}\left(\pm i\frac{2}{\pi m\sqrt{-x^2}}\right) \\
&\mp \theta(x^2)\frac{im}{4\pi^2\sqrt{x^2}}\cdot\frac{1}{m\sqrt{x^2}} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\delta(-x^2)\varepsilon(x_0) \mp P\frac{i}{4\pi^2x^2} = \mp\frac{i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2 \pm ix_0\varepsilon} \\
\Delta(x,m) &= \Delta^{(+)}(x,m) + \Delta^{(-)}(x,m) \\
&\doteq -\frac{1}{2\pi}\delta(-x^2)\varepsilon(x_0) = \frac{i}{4\pi^2}\left(-\frac{1}{x^2 + ix_0\varepsilon} + \frac{1}{x^2 - ix_0\varepsilon}\right) \\
\Delta_F(x,m) &= i\theta(x_0)\Delta^{(+)}(x,m) - i\theta(-x_0)\Delta^{(-)}(x,m) \\
&\doteq i\left(-\frac{1}{4\pi}\delta(-x^2) - P\frac{i}{4\pi^2x^2}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left(\mathrm{P}\frac{1}{x^2} - i\pi\delta(x^2)\right) = \frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{x^2 + i\varepsilon} \tag{A3.39}$$

顺便又得到：

$$S^{(\pm)}(x,m) = (\hat{\partial} - m)\Delta^{(\pm)}(x,m) = (\hat{\partial} - m)\frac{\mp i}{4\pi^2}\frac{1}{x^2 \pm ix_0\varepsilon} + \cdots$$

$$= \frac{\pm i}{2\pi^2}\frac{\hat{x}}{(x^2 \pm ix_0\varepsilon)^2} \pm \frac{i}{4\pi^2}\frac{m}{x^2 \pm ix_0\varepsilon} + \cdots$$

$$S(x,m) = (\hat{\partial} - m)\Delta(x,m) = (\hat{\partial} - m)\frac{-1}{2\pi}\delta(x^2)\dot{\varepsilon}(x_0) + \cdots$$

$$= -\frac{1}{\pi}\delta'(x^2)\varepsilon(x_0)\hat{x} + \frac{i}{\pi}\delta(x^2)\delta(x_0)\gamma_4 + \frac{m}{2\pi}\delta(x^2)\varepsilon(x_0) + \cdots$$

$$S_F(x,m) = -(\hat{\partial} - m)\Delta_F(x,m) = -(\hat{\partial} - m)\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{x^2 + i\varepsilon} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\frac{\hat{x}}{(x^2 + i\varepsilon)^2} + \frac{m}{4\pi^2}\cdot\frac{1}{x^2 + i\varepsilon} + \cdots \tag{A3.40}$$

此外还有几个有用的公式：

$$\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\upsilon = S_{\mu\lambda\upsilon\rho}\gamma_\rho - \varepsilon_{\mu\lambda\upsilon\rho}\gamma_\rho\gamma_5 \tag{A3.41}$$

其中

$$S_{\mu\lambda\upsilon\rho} \equiv \delta_{\mu\lambda}\delta_{\upsilon\rho} - \delta_{\mu\upsilon}\delta_{\lambda\rho} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\upsilon\lambda} \tag{A3.42}$$

这是由下式得来的：

$$\begin{aligned}\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\upsilon = {} & \delta_{\mu\lambda}\gamma_\upsilon - \delta_{\upsilon\mu}\gamma_\lambda + \delta_{\lambda\upsilon}\gamma_\mu \\ & - \varepsilon_{\mu\lambda\upsilon1}\gamma_2\gamma_3\gamma_4 + \varepsilon_{\mu\lambda\upsilon2}\gamma_1\gamma_3\gamma_4 \\ & - \varepsilon_{\mu\lambda\upsilon3}\gamma_1\gamma_2\gamma_4 + \varepsilon_{\mu\lambda\upsilon4}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\end{aligned}$$

第一行：μ，λ，υ 有两个相同时，可写成 $S_{\mu\lambda\upsilon\rho}\gamma_\rho$。

第二、三行：μ，λ，υ 都不相同时，可写成 $-\varepsilon_{\mu\lambda\upsilon\rho}\gamma_\rho\gamma_5$（$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$）。

$$\lambda^a\lambda^b = (d_{abc} + if_{abc})\lambda^c + \alpha_N\delta_{ab}\cdot 1 \tag{A3.43}$$

$$[\lambda^a,\lambda^b]_- = 2if_{abc}\lambda^c \qquad \{\lambda^a,\lambda^b\}_+ = 2d_{abc}\lambda^c + 2\alpha_N\delta_{ab}\cdot 1$$

SU (2)：$d_{abc} = 0$，$\alpha_2 = 1$

SU (3)：$d_{abc} \neq 0$，$\alpha_3 = \frac{2}{3}$

§ A3－5　J^+J 的光锥展开和算子的扭度

在可重正化量子场论的有限次微扰的前提下，可以证明两个定域算子 $A\left(\frac{y}{2}\right)$，$B\left(-\frac{y}{2}\right)$ 的乘积在 $y^2 \to 0$ 时，在弱收敛的意义下，可以作光锥展开如下：

$$A\left(\frac{y}{2}\right)B\left(-\frac{y}{2}\right) \underset{y^2\to 0}{\sim} \sum_{N,j} C_N^j(y^2 + i\varepsilon)y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_N}O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0) \tag{A3.44}$$

这里我们不作证明，而只是解释一下：

1. $\mu_1\cdots\mu_N$ 是 Lorentz 指标。C_N^j（$y^2 + i\varepsilon$）是 c－数，叫作 Wilson 系数，它含有 $y^2 \to 0$ 时的奇异性（参见前一节 Δ_F（y），S_F（y）在 $y^2 \to 0$ 时的奇异性）。

2. $O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}$（0）是 N 级张量定域算子，它没有奇异性。

3. 同是 N 级张量的定域算子 O^j（0）不限于一种，这里用 j 来标出，要对 j 求和。

4. （A3.44）是 $A\left(\frac{y}{2}\right)$, $B\left(-\frac{y}{2}\right)$无自旋的最简单的情况，一般情况下右方还会有微商出现，见下面 J^+J 的光锥展开。

以夸克的电流为例：

$$J^+_\mu \sim \bar{\psi}\gamma_\mu\psi(-)^{\delta_{\mu 4}}, J_\nu \sim \bar{\psi}\gamma_\nu\psi$$

当 $y^2\to 0$ 时，$\overbrace{\psi\left(\frac{y}{2}\right)\bar{\psi}}\left(-\frac{y}{2}\right) \sim S_F \sim \frac{\hat{y}}{(y^2+i\varepsilon)^2}$（见前一节的（A3.40）），从而缩合后出现如下的项：

$$\sim \bar{\psi}\left(\frac{y}{2}\right)\frac{\gamma_\mu\hat{y}\gamma_\nu}{(y^2+i\varepsilon)^2}\psi\left(-\frac{y}{2}\right)$$

再利用（A3.41）就化为

$$\sim \bar{\psi}\left(\frac{y}{2}\right)\frac{y_\lambda}{(y^2+i\varepsilon)^2}\gamma_\rho\Gamma\psi\left(\frac{y}{2}\right)$$

$\Gamma=1$ 或 γ_5。

如果再考虑味的改变，则 J^+_μ，J_ν 中要分别写进 γ^a，γ^b，缩写后出现 $\gamma^a\gamma^b$，再利用（A3.43），就化为 γ^c 或 1。所以一般情况下（包括电磁作用和弱作用），$\Gamma=1$，γ_5，γ^c，或 $\gamma_5\gamma^c$，有四种情况，将在后面讨论。这里再对 $\bar{\psi}\left(\frac{y}{2}\right)\psi\left(-\frac{y}{2}\right)$作 Taylor 展开，就得到（考虑到部分积分）

$$\sim C(y^2+i\varepsilon)(\bar{\psi}\gamma_\rho\partial_{\mu_2}\partial_{\mu_3}\cdots\partial_{\mu_N}\Gamma\psi)\mid_{y=0}y_\lambda y_{\mu 2}\cdots y_{\mu N}$$

注意这里如果补写上 $S_{\mu\lambda\nu\rho}$和 $\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}$就仍保持原先的协变性质。由此我们看到，有一种算子 $O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}$（0）是呈如下形式的：

$$O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0) \sim (\bar{\psi}\gamma_{\mu 1}D_{\mu_2}D_{\mu 3}\cdots D_{\mu_N}\Gamma\psi)\mid_{y=0} + \text{所有各种置换} \qquad (A3.45)$$

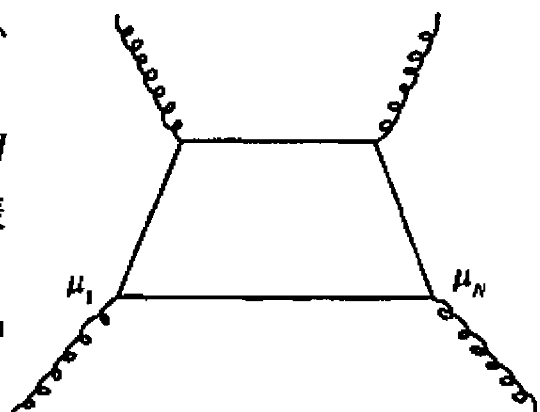
在 O^ψ 中用

$$D_\mu = \partial_\mu - igT^aA^a_\mu$$

来替换 ∂_μ，T^a 是色空间矩阵，这是为了保证 O^ψ 在色规范变换下不变，因为电流和弱流在强作用规范群（色规范群）的变换下是不变的。

弱收敛下的展开给出的 $O^\psi_{\mu_1\cdots\mu_N}$也包含了微扰修正，但微扰修正不会改变$\mu_1\cdots\mu_N$的指标，从而不改变（A3.45）的形式。

由于弱收敛下的展开包含着强相互作用，我们还必须考虑到 $\langle 0\mid TAJ^+JA\mid 0\rangle \neq 0$，见右图：$Tr$（$T^aT^b$）$=\delta_{ab}T$（$R$），故 μ_1，μ_N 两顶点的 a 指标相同，于是 J^+J 的弱收敛下的展开还应当包括如下的算子 O^A（A 代表胶子）：



$O^A_{\mu_1\cdots\mu_N}$（0）$\sim F^a_{\alpha\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu N-1}F^a_{\mu_N\alpha}\mid_{y=0}$ + 所有各种置换 （A3.47）

$F_{\mu\nu}$是胶子场张量，∇_μ 是协变微分：

$$\nabla_\mu F^a_{\nu\lambda} = (\partial_\mu \delta_{ac} + g f_{abc} A^b_\mu) F^c_{\nu\lambda} \tag{A3.48}$$

它可保证 O^A 在色规范变换下不变，这也是因为夸克的电流和弱流在色规范变换下不变。至于（A3.48）右方的规范变换性质可参见附录一（A1.25）。

注意胶子与夸克的耦合形式是 $\bar{\psi}\gamma_\mu T^a A^a_\mu \psi$，所以图上看到，每一个胶子顶点上提供一个 Lorentz 指标，从而 O^A 中的胶子张量 $F_{\alpha\mu_1}$和 $F_{\mu_N\alpha}$多出来一对指标（例如 α）必须缩合掉，而只留下 μ_1 和 μ_N。D_μ 仍是来自 Taylor 展开，和（A3.45）中 O^ψ 的情况相仿。

现在我们就来把 $T(J_\mu(y) J_\nu(0))$ 作光锥展开。虽然这里写的是 $T(J_\mu(y) J_\nu(0))$，并不是 $TJ_\mu\left(\frac{y}{2}\right) \cdot J_\nu\left(-\frac{y}{2}\right)$，但由于弱收敛，矩阵元 $\langle P, s | T(J_\mu(y), J_\nu(0) | P, s\rangle$ 按照平移公式有：

$$\begin{aligned}\langle P,s | T(J_\mu(y)J_\nu(0)) | P,s\rangle &= \langle P,s | T\left(J_\mu\left(\frac{y}{2}\right)J_\nu\left(-\frac{y}{2}\right)\right) | P,s\rangle \\ &= \langle P,s | T(J_\mu(0)J_\nu(-y)) | P,s\rangle\end{aligned}$$

所以此地对于 $T(J_\mu(y) J_\nu(0))$ 仍可用 $T\left(J_\mu\left(\frac{y}{2}\right)J_\nu\left(-\frac{y}{2}\right)\right)$的光锥展开。注意到 $W_{\mu\nu}(P, q)$ 满足 $q_\mu W_{\mu\nu}(P, q) =0$（见（A3.13）的讨论，$q_\mu W_{\mu\nu}(P, q) =0$ 是略去轻子质量的结果），展开必定具有如下形式：

$$\begin{aligned}&T(J_\mu(y)J_\nu(0)) \\ &\underset{y^2\to 0}{\sim} (\delta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\left[\sum_{N=0}^{\infty} i^{N-1} \sum_j \frac{C^j_{1,N}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon} O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0) y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_N} + \cdots\right] \\ &- (\delta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}\Box - \delta_{\mu\beta}\partial_\alpha\partial_\nu - \delta_{\nu\beta}\partial_\alpha\partial_\mu) \\ &\cdot \left[\sum_{N=0}^{\infty} i^{N-1} \sum_j C^j_2, N+2(y^2+i\varepsilon) O^j_{\alpha\beta\mu_1\cdots\mu_N}(0) y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_N} + \cdots\right] \\ &- \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\beta\left[\sum_{N=0}^{\infty} i^{N-1} \sum_j \frac{C^j_{3,N+1}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon} O^j_{\alpha\mu_1\cdots\mu_N}(0) y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_N} + \cdots\right]\end{aligned} \tag{A3.49}$$

右方显然满足 $W_{\mu\nu}(P, q)$ 满足的条件，即 $q_\mu W_{\mu\nu}$得零。x^2 都以 $x^2+i\varepsilon$ 形式出现，其来源见上节 $\Delta_F(x)$ 和 $S_F(x)$ 的光锥近似领头项（参看（A3.39），（A3.40））。$y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_N}$是 Taylor 展开的结果。$\sum_j$ 表示对不同类型的 O^j 求和，例如 O^ψ，O^A。$+\cdots$表示在只考虑领头项时，略去了更高扭度的算子项。以下说一说什么是扭度。

扭度

先举一个简单的例子，仍取（A3.44）的光锥展开：

$$A\left(\frac{y}{2}\right)B\left(-\frac{y}{2}\right) \underset{y^2\to 0}{\sim} \sum_{Nj} C^j_N(y^2+i\varepsilon) y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_N} O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0)$$

左边质量量纲是 d_A+d_B，右边 $O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0)$ 的质量量纲设为 d_{Nj}。由于左右的量纲必须相同，必定有

$$C^j_N(y^2+i\varepsilon) \underset{y^2\to 0}{\sim} (y^2+i\varepsilon)^{(d_{Nj}-N-d_A-d_B)/2}$$

于是，给定 d_A+d_B（即给定 A 和 B）的情况下，我们可以定义扭度 τ，并把自由的（没有收缩的）Lorentz 指标的个数 N 叫做自旋数：

$$\tau = d_{N,j} - N = d_{N,j} - \text{自旋数} \tag{A3.50}$$

显然在 $y^2\to 0$ 时，扭度最低的 O^j 有最主要贡献。O^j 扭度加 2，C_N^j 就要多乘一个 y^2，或多乘一个 $\frac{1}{q^2}$，在 $y^2\to 0$ 或 $q^2\to\infty$ 时，其贡献应是次要的。

从无自旋的 A 和 B 推广到 J^+ 和 J，可以同样地定义 O^ψ 和 O^A 的扭度。自（A3.45）和（A3.47）：

$$O^\psi_{\mu_1\cdots\mu_N}(0) \sim \bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_N}\Gamma\psi$$

$$d_{N,\psi} = 2\times\frac{3}{2}+(N-1) = N+2, \text{自旋数 } N, \tau = 2$$

$$O^A_{\mu_1\cdots\mu_N}(0) \sim F^a_{\alpha\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_{N-1}}F^a_{\mu_N\alpha}$$

$$d_{N,A} = 2\times 2+(N-2) = N+2, \text{自旋数 } N, \tau = 2$$

扭度 τ 都是 2，而且 O^ψ 每增加一个 D_μ，或 O^A 每增加一个 ∇_μ，$d_{N,j}$ 都是同时增 1，自旋数增 1，$\tau=2$ 并不改变。

根据前面的讨论还可以说明，JJ 的光锥展开中并不包含 $\tau<2$ 的算子。例如，并不包含

$$\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}D_{\mu_3}\cdots D_{\mu_N}\Gamma\psi(\tau = 1)$$

$$\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}D_{\mu_4}\cdots D_{\mu_N}\Gamma\psi(\tau = 0)$$

$$F^a_{\mu_1\mu_2}\nabla_{\mu_3}\cdots\nabla_{\mu_{N-2}}F^a_{\mu_{N-1}\mu_N}(\tau = 0)$$

所以，$\tau=2$ 的 O^ψ，O^A 是 J^+J 光锥展开中扭度最小的算子，它们应给出主要贡献。

此外，展开中还会出现

$$\delta_{\mu_i\mu_k}\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_N}\psi$$

$$\delta_{\mu_i\mu_k}F^a_{\alpha\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_{N-1}}F^a_{\mu_N\alpha}$$

它们的 $d_{N,i}$ 仍是 $N+2$，但由于 $\delta_{\mu_i\mu_k}$ 把指标缩合了，自由 Lorentz 指标个数（自旋数）降为 $N-2$，所以 $\tau=4$。更多的缩合可导致更高的扭度。正如上面所说，根据量纲分析，与更高扭度的 $O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}$ 相对应的 Wilson 系数 C_N^j 含有更高次的 y^2，当 $y^2\to 0$，贡献次要。

回过头来看一看（A3.49）的展开，如果右方都是取扭度为 2 的算子，则分析量纲得到：

$O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0)$ 的量纲是 $N+2$，$C^j_{1,N}(y^2+i\varepsilon)$ 的量纲应是 $2d_J-6$；

$O^j_{\alpha\beta\mu_1\cdots\mu_N}(0)$ 的量纲是 $N+4$，$C^j_{2,N+2}(y^2+i\varepsilon)$ 的量纲应是 $2d_J-6$；

$O^j_{\alpha\mu_1\cdots\mu_N}(0)$ 的量纲是 $N+3$，$C^j_{3,N+2}(y^2+i\varepsilon)$ 的量纲应是 $2d_J-6$。

已知 $2d_J=6$，所以（A3.49）中都取最小扭度（$\tau=2$）的算子时，$C^j_{1,N}$，$C^j_{2,N+2}$，$C^j_{3,N+1}$ 的质量量纲（正常量纲）都是 0，与 N 无关。

§ A3－6　$C^j_{i,N}$ 的 Fourier 变换与结构函数的矩

为了方便，可把（A3.14）改写如下：

$$T_{\mu\nu}(P,q) = \left(-\delta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)t_L(q^2,\nu)$$
$$+ \left(\frac{1}{q^2}\right)^2 [q^2 P_\mu P_\nu - (P\cdot q)(P_\mu q_\nu + q_\mu P_\nu) + \delta_{\mu\nu}(P\cdot q)^2] t_2(q^2,\nu)$$
$$- \frac{i}{q^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}P_\lambda q_\rho t_3(q^2,\nu) \qquad (A3.51)$$

（也和 $q_\mu W_{\mu\nu}=0$ 一样，$T_{\mu\nu}$满足 $q_\mu T_{\mu\nu}=0$）。

（A3. 51）还立刻可写成

$$T_{\mu\nu} = \left(-\delta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\left(t_L(q^2,\nu) - \left(\frac{P\cdot q}{q^2}\right)^2 t_2(q^2,\nu)\right)$$
$$+ \frac{1}{q^2}\left(P_\mu - \frac{P\cdot q}{q^2}q_\mu\right)\left(P_\nu - \frac{P\cdot q}{q^2}q_\nu\right)t_2(q^2,\nu) - \frac{i}{q^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}P_\lambda q_\rho t_3(q^2,\nu) \qquad (A3.52)$$

这样就可比较（A3. 52）与（A3. 14），得到

$$\left.\begin{aligned}
&T_1(q^2,\nu) = t_L(q^2,\nu) - \left(\frac{P\cdot q}{q^2}\right)^2 t_2(q^2,\nu)\\
&\text{或 } T_1(q^2,\nu) = t_L(q^2,\nu) - \frac{\omega^2}{4}t_2(q^2,\nu)\\
&\frac{1}{m^2}T_2(q^2,\nu) = \frac{1}{q^2}t_2(q^2,\nu)\\
&\text{或}\quad \frac{\nu}{m}T_2(q^2,\nu) = \frac{1}{2}\omega t_2(q^2,\nu)\\
&\frac{1}{2m^2}T_3(q^2,\nu) = \frac{1}{q^2}t_3(q^2,\nu)\\
&\text{或}\quad \frac{\nu}{m}T_3(q^2,\nu) = \omega t_3(q^2,\nu)
\end{aligned}\right\} \qquad (A3.53)$$

为了把含 P 的和含 q^2 的因子分开（P^2 不$\to\infty$，而 $q^2\to\infty$，如果要对 q^2 采用重正化群方法，就需要把这两类因子分开），可以根据协变性质把自旋平均后的 $\langle Ps|O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0)|P,s\rangle$ 写成：

$$\frac{1}{2}\sum_s \langle Ps|O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}(0)|Ps\rangle = A^j_N P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_N} \qquad (A3.54)$$

因为 $\langle P,s|O|ps\rangle$ 中不含 q，只含 P，对自旋平均后，只有 P 矢量。为简单起见，只取最低扭度的 $O^j_{\mu_1\cdots\mu_N}$（$\tau=2$）（不含有求迹项——即更高扭度项）。A^j_N 是待定常数，它不依赖于 P。

后面还要利用如下的积分公式：

$$\int d^4y e^{-iqy} y_\alpha f(y^2) = i\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\int d^4y e^{-iqy} f(y^2) = i2q_\alpha \frac{\partial}{\partial(q^2)}\int d^4y e^{-iqy} f(y^2) \qquad (A3.55)$$

$$\int d^4y e^{-iqy} y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_N} f(y^2) = (2i)^N q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_N}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy} f(y^2) \qquad (A3.56)$$

现在就可以来找 $C^j_{i,N}$与 W_i 的矩之间的关系。分两步进行：

第一步把（A3. 49），（A3. 54）代入（A3. 14），并与（A3. 51）对比（为了得到 t_L，t_2，t_3与 C_1，C_2，C_3 之间的关系）。

1. 对比$\left(-\delta_{\mu\upsilon}+\frac{q_\mu q_\upsilon}{q^2}\right)$项：

$$\left(-\delta_{\mu\upsilon}+\frac{q_\mu q_\upsilon}{q^2}\right)t_L(q^2,\upsilon) = \frac{i}{4\pi}(-\delta_{\mu\upsilon}q^2+q_\mu q_\upsilon)\cdot\sum_{N=0}^{\infty}i^{N-1}$$

$$\cdot(2i)^N q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_N}\cdot\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\sum_j\frac{C^j_{1,N}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon}\cdot A^j_N P_{\mu_1}\cdots p_{\mu_N}$$

$$=(-\delta_{\mu\upsilon}q^2+q_\mu q_\upsilon)\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-2P\cdot q)^N}{4\pi}\cdot\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\sum_j\frac{C^j_{1,N}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon}A^j_N$$

$$=\left(-\delta_{\mu\upsilon}+\frac{q_\mu q_\upsilon}{q^2}\right)\sum_{N=0}^{\infty}\omega^N\sum_j\frac{(q^2)^{N+1}}{4\pi}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\frac{C^j_{1,N}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon}A^j_N$$

$$\therefore\quad t_L(q^2,\upsilon)=\sum_{N=0}^{\infty}\omega^N\sum_j f^j_{1,N}(q^2,g,m,\mu)A^j_N$$

$$f^j_{1,N}(q^2,g,m,\mu)=\frac{(q^2)^{N+1}}{4\pi}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\frac{C^j_{1,N}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon}\qquad(A3.57)$$

这里m是核子（靶粒子）的质量，μ是维数正常化的质量参数。

2. 对比$\left(\frac{1}{q^2}\right)^2$［$q^2P_\mu P_\upsilon-(P\cdot q)(P_\mu q_\upsilon+q_\mu P_\upsilon)+\delta_{\mu\upsilon}(P\cdot q)^2$］项：

$$\left(\frac{1}{q^2}\right)^2[q^2P_\mu P_\upsilon-(P\cdot q)(P_\mu q_\upsilon+q_\mu P_\upsilon)+\delta_{\mu\upsilon}(P\cdot q)^2]t_2(q^2,\upsilon)$$

$$=-\frac{i}{4\pi}(-\delta_{\mu\upsilon}q_\alpha q_\beta-\delta_{\mu\alpha}\delta_{\upsilon\beta}q^2+\delta_{\mu\beta}q_\alpha q_\upsilon+\delta_{\upsilon\beta}q_\alpha q_\mu)\cdot\sum_{N=0}^{\infty}i^{N-1}$$

$$\cdot(2i)^N q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_N}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\sum_j C^j_{2,N+2}(y^2+i\varepsilon)A^j_{N+2}P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_N}P_\alpha P_\beta$$

$$=-\left(\frac{1}{q^2}\right)^2[-\delta_{\mu\upsilon}(P\cdot q)^2-q^2P_\mu P_\upsilon+(P\cdot q)(P_\mu q_\upsilon+q_\mu P_\upsilon)]$$

$$\cdot(q^2)^2\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-2P\cdot q)^N}{4\pi}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\sum_j C^j_{2,N+2}(y^2+i\varepsilon)\cdot A^j_{N+2}$$

$$=\left(\frac{1}{q^2}\right)^2[q^2P_\mu P_\upsilon-(P\cdot q)(P_\mu q_\upsilon+q_\mu P_\upsilon)+\delta_{\mu\upsilon}(P\cdot q)^2]$$

$$\cdot\sum_{N=0}^{\infty}\omega^N\sum_j\frac{(q^2)^{N+2}}{4\pi}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}C^j_{2,N+2}(y^2+i\varepsilon)\cdot A^j_{N+2}$$

$$\therefore\quad t_2(q^2,\upsilon)=\sum_{N=0}^{\infty}\omega^N\sum_j f^j_{2,N+2}(q^2,g,m,\mu)\cdot A^j_{N+2}$$

$$f^j_{2,N+2}(q^2,g,m,\mu)=\frac{(q^2)^{N+2}}{4\pi}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}C^j_{2,N+2}(y^2+i\varepsilon)\qquad(A3.58)$$

3. 对比$\frac{1}{q^2}\varepsilon_{\mu\upsilon\lambda\rho}P_\lambda q_\rho$项：

$$-\frac{i}{q^2}\varepsilon_{\mu\upsilon\lambda\rho}P_\lambda q_\rho t_3(q^2,\upsilon)=\frac{-i}{4\pi}\varepsilon_{\mu\upsilon\lambda\rho}(iq_\rho)\sum_{N=0}^{\infty}i^{N-1}$$

$$\cdot(2i)^N q_{\mu_1}\cdots q_{\mu_N}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\sum_j\frac{C^j_{3,N+1}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon}A^j_{N+1}P_{\mu_1}\cdots P_{\mu_N}P_\lambda$$

$\left(iq_\rho \text{ 是由于部分积分：} -\frac{\partial}{\partial y_\rho}e^{-iqy} = iq_\rho e^{-iqy}\right)$

$$= -\frac{i}{q^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}P_\lambda q_\rho \cdot q^2 \cdot \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-2p\cdot q)^N}{4\pi}\cdot\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\sum_j \frac{C^j_{3,N+1}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon}A^j_{N+1}$$

$$= -\frac{i}{q^2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}P_\lambda q_\rho \cdot \sum_{0=0}^{\infty}\omega^N\sum_j \frac{(q^2)^{N+1}}{4\pi}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\frac{C^j_{3,N+1}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon}A^j_{N+1}$$

$$\therefore\quad t_3(q^2,\upsilon) = \sum_{N=0}^{\infty}\omega^N\sum_j f^j_{3,N+1}(q^2,g,m,\mu)\cdot A^j_{N+1}$$

$$f^j_{3,N+1}(q^2,g,m,\mu) = \frac{(q^2)^{N+1}}{4\pi}\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}\int d^4y e^{-iqy}\frac{C^j_{3,N+1}(y^2+i\varepsilon)}{y^2+i\varepsilon} \qquad \text{(A3.59)}$$

这样，就找到了 t 和 C 之间的关系。

第二步根据（A3.53）中 t_i 与 T_i 的关系，把 t_i 代入 T_i 的色散积分。由于有（A3.57），（A3.58），（A3.59）的 t_i 展开式，就可得到 W_i 的矩与 C^j_{iN}之间的关系。

1. 自（A3.53）

$$t_L(q^2,\upsilon) = T_1(q^2,\upsilon) + \frac{\upsilon\omega}{2m}T_2(q^2,\upsilon)$$

由于$\frac{\upsilon\omega}{2m}=\frac{q^2}{4m^2x^2}$，$\frac{1}{x^2}W_2$ 与 W_2 有相同交叉关系，所以类似于（A3.35），（A3.36），取 $W_{1,2}$为 $W^e_{1,2}$或 $W^{\upsilon+\bar{\upsilon}}_{1,2}$，可得到

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega\frac{t_L}{\omega^{N+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega\frac{T_1+\frac{\upsilon\omega}{2m}T_2}{\omega^{N+1}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\cdot x^{N-1}(1+(-1)^N)\left(W_1+\frac{q^2}{4m^2x^2}W_2\right)$$

左方根据（A3.57）和 Cauchy 积分，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega\frac{t_L}{\omega^{N+1}} = \sum_j f^j_{1,M}(q^2,g,m,\mu)A^j_N$$

$$\therefore\quad \sum_j f^j_{1,N}(q^2,g,m,\mu)A^j_N$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\cdot x^{N-1}(1+(-1)^N)\cdot\left(W_1+\frac{q^2}{4m^2x^2}W_2\right) \qquad \text{(A3.60)}$$

$\therefore$ 对于 $W^e_{1,2}, W^{\upsilon+\bar{\upsilon}}_{1,2}$

$f^j_{1,N} = 0 \qquad N$ 奇

$f^j_{1,N} \neq 0 \qquad N$ 偶

2. 自（A3.53）：

$$\frac{\upsilon}{m}T_2(q^2,\upsilon) = \frac{\omega}{2}t_2(q^2,\upsilon)$$

由于$\frac{\upsilon}{m}=\frac{q^2}{2m^2x}$，$\frac{1}{x}W_2$ 与 W_2 有相反的交叉关系，取 W_2 为 W^e_2 或 $W^{\upsilon+\bar{\upsilon}}_2$，可得到（注意 N 换成 $N-1$）：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega \frac{\frac{\omega}{2}t_2}{\omega^N} = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega \frac{\frac{\nu}{m}T_2}{\omega^N}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx \cdot x^{N-2}(1+(-1)^N)\frac{q^2}{2m^2x}W_2$$

左方根据（A3.58）和 Cauchy 积分，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega \frac{\frac{\omega}{2}t_2}{\omega^N} = \sum_j f_{2,N}^j(q^2,g,m,\mu)A_N^j$$

$$\therefore \quad \sum_j f_{2,N}^j(q^2,g,m,\mu)A_N^j = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx \cdot x^{N-2}(1+(-1)^N)\frac{q^2}{2m^2x}W_2 \quad (A3.61)$$

∴ 对于 W_2^ν，$W_2^{\nu+\bar\nu}$，

$f_{2,N}^j=0$ N 奇

$f_{2,N}^j\neq 0$ N 偶

3. 自（A3.53）

$$\frac{\nu}{m}T_3(q^2,\nu) = \omega t_3(q^2,\nu)$$

也是$\frac{\nu}{m}=\frac{q^2}{2m^2x}$，$\frac{1}{x}W_3$ 与 W_3 的交叉关系相反，取 W_3 为 $W_3^{\nu+\bar\nu}$，可得到（注意也把 N 换成 $N-1$）：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega \frac{\omega t_3}{\omega^N} = \frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega \frac{\frac{\nu}{m}T_3}{\omega^N}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx \cdot x^{N-2}(1+(-1)^N)\frac{q^2}{2m^2x}W_3$$

左方根据（A3.59）和 Cauchy 积分，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\omega \frac{mt_3}{\omega^N} = \sum_j f_{3,N-1}^j(q^2,g,m,\mu)A_{N-1}^j$$

$$\therefore \quad \sum_j f_{3,N-1}^j(q^2,g,m,\mu)A_{N-1}^j = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx \cdot x^{N-2}(1+(-1)^N)\frac{q^2}{2m^2x}W_3 \quad (A3.62)$$

∴ 对于 $W_3^{\nu+\bar\nu}$，

$f_{3,N-1}^j=0$ N 奇 或 $f_{3,N}^j=0$ N 偶

$f_{3,N-1}^j\neq 0$ N 偶 或 $f_{3,N}^j\neq 0$ N 奇

如果把 $W^{\nu+\bar\nu}$换成 $W^{\nu-\bar\nu}$，则根据交叉关系（A3.25），上述积分中 $(1+(-1)^N)$ 都要换成 $(1-(-1)^N)$，相应地，$f_{1,2,3}$换成$\bar f_{1,2,3}$，从而得到（和上面相仿的做法）：

$\bar f_{1,N}^j\neq 0$ N 奇，$\bar f_{2,N}^j\neq 0$ N 奇，$\bar f_{3,N-1}^j\neq 0$ N 奇 或 $\bar f_{3,N}^j\neq 0$ N 偶；

$\bar f_{1,N}^j = 0$ N 偶，$\bar f_{2,N}^j = 0$ N 偶，$f_{3,N-1}^j = 0$ N 偶 或 $f_{3,N}^j = 0$ N 奇。

§ A3 - 7　味非单态和味单态的格林函数 G 和 Wilson 系数 C 的重正化群方程，矩的渐近行为

上一节说明了在深度非弹性散射中，可以通过光锥展开和求矩来把含 P 的因子(表现为$(2P\cdot q)^N$ 或 ω^N 或 x^N 的形式) 分离，使$f^j_{i,N}$ 和 $C^j_{i,N}$ 中都不含有 P 而只含有 q^2。这就可以选用重正化群方法来考察$f^j_{i,N}$ 和 $C^j_{i,N}$ 的渐近行为了。而且由 $C^j_{i,N}$ 和$f^j_{i,N}$ 的渐近行为，又可看到 W 的渐近行为。在$f^j_{i,N}$ 中虽然还含有 m，但 m 有它自己的渐近行为，在 q^2 很大时，m 可以忽略(见第十章)，与 P 不同。

在导出有关的重正化群方程之前，先说明一下味非单态和味单态的区别。

我们回到(A3.45)。Γ 有 $1,\gamma_5,\lambda^c,\gamma_5\lambda^c$ 四种情况。但在上一节给出(A3.54)时，是对夸克自旋取了平均的。对自旋取平均，γ_5 就没有贡献。因此只须讨论 $\Gamma=1$ 和 $\Gamma=\lambda^c$ 两种情况。λ^c 是味 $SU(M)$ 群的 M^2-1 个 $M\times M$ 矩阵中的一个，1 则代表 $SU(M)$ 的么矩阵。

显然 1 是 SU (M) 群变换下不变的，性质像单态，所以相应的 O^ψ (0) 就叫做单态算子：

$$O^{\psi,N}(0)\sim\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_N}\psi\big|_{y=0}+\text{所有各种置换}\qquad(\text{A3.63})$$

它在 $\langle Ps|\ O^{\psi,N}\ (0)\ |Ps\rangle$ 矩阵元中，对每一种味都有相同的贡献。

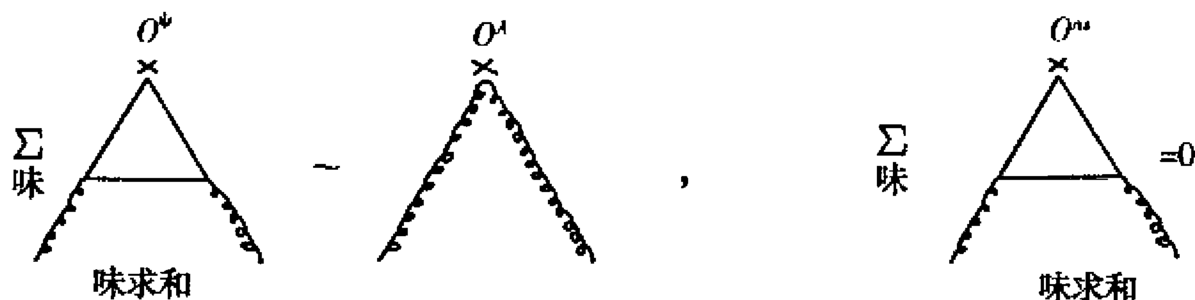
λ^c 在 SU (M) 群变换下是要变的，性质不同于单态，所以相应的 $O^{ns,N}$ (0) 就叫做非单态算子：

$$O^{ns,N}(0)\sim\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_N}\lambda^c\psi\big|_{y=0}+\text{所有各种置换}\qquad(\text{A3.64})$$

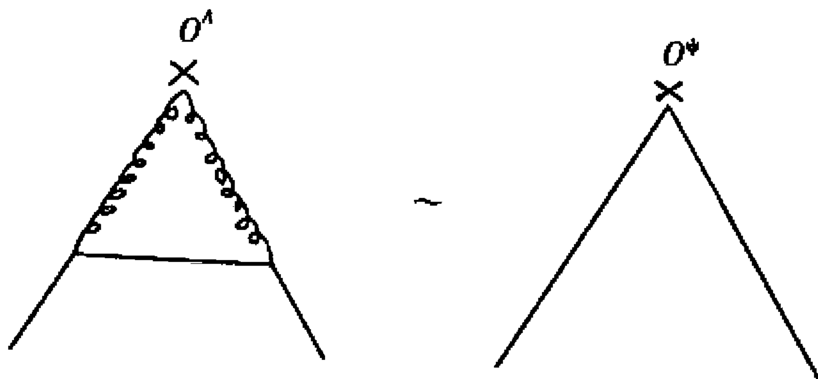
它在 $\langle Ps|\ O^{ns,N}\ (0)\ |Ps\rangle$ 矩阵元中，对不同味的靶有不同的贡献。

O^ψ 和 O^{ns}的更重要的区别在于它们和 (A3.47) 式给出的 O^A 的关系：

从 (A3.47) 看到，JJ 光锥展开中出现 O^A 是要通过费米子圈的，而且要对所有各种味的费米子圈求和。由于胶子顶点并不改变味，所以这个求和正好相当于对 O^ψ 或 O^{ns}中的 1 矩阵或 λ^c 矩阵求迹。然而 SU (M) 的矩阵 λ^a 的迹等于零，而 1 的迹$\neq 0$，因此，对于产生 O^A 来说，O^ψ 有贡献，而 O^{ns}无贡献。可用如下的简单的费曼图来表示：



反过来还看到，O^A 又可产生 O^ψ，也可用费曼图来表示：



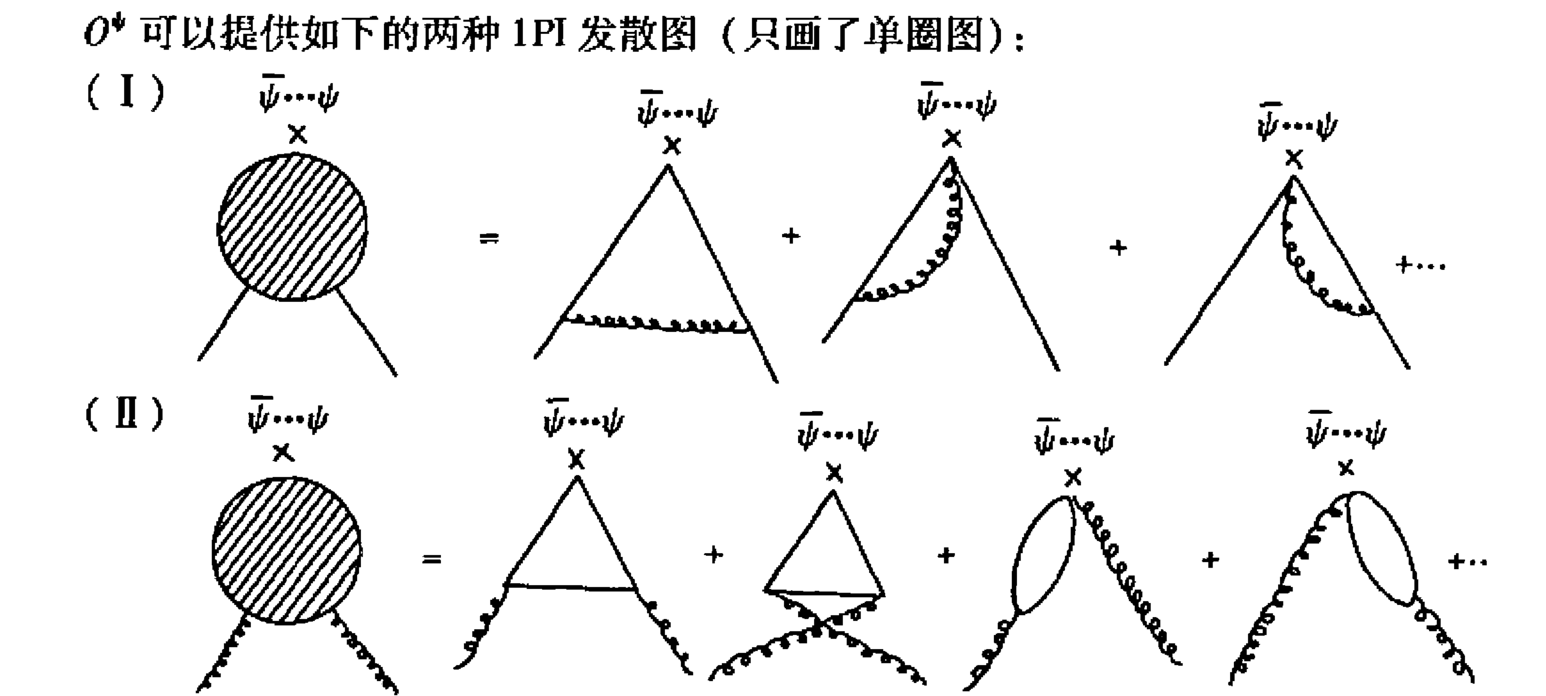
但是 O^A 不改变味，所以这个图对所有的味都一视同仁，也就是说，它不能产生 O^{ns}。

可以更直截了当地从 $SU(M)$ 群的性质来说明问题：由于 O^A 和 O^ψ 都是 $SU(M)$ 不变的（单态），所以允许它们相互产生；而 O^{ns} 则不是 $SU(M)$ 不变的（非单态），所以它们不能和单态的 O^A 相互产生。

现在就来推导 O^A 和 O^ψ 做成的格林函数 G 的重正化群方程，以及 $C^\psi_{i,N}$，$C^A_{i,N}$ 的重正化群方程。有了这些方程，又可方便地给出 O^{ns} 做成的格林函数的重正化群方程和 $C^{ns}_{i,N}$ 的重正化群方程。

O^a 的截肢格林函数 G_{ab} 的重正化群方程组

O^ψ 可以提供如下的两种 1PI 发散图（只画了单圈图）：

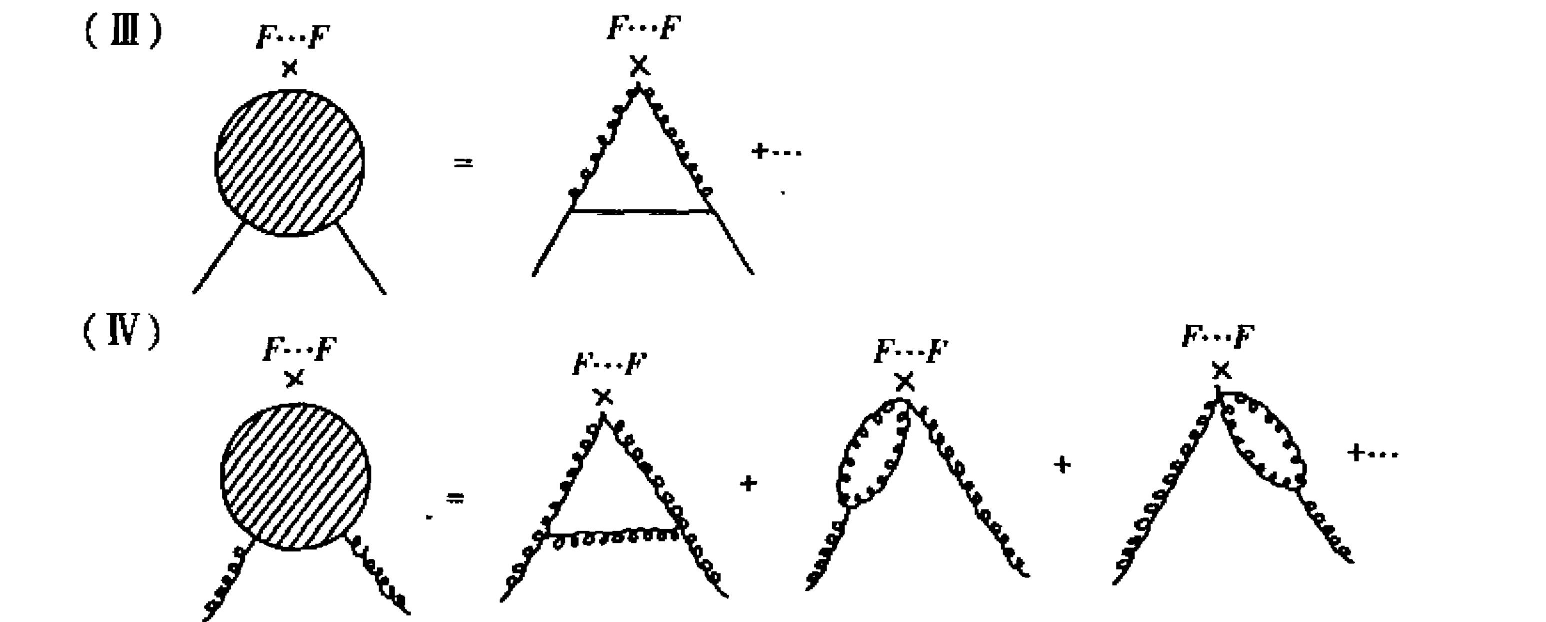


按照第五章的讨论：

（Ⅰ）所要求的抵消项可归入 $Z_{\psi\psi}O^\psi$

（Ⅱ）所要求的抵消项可归入 $Z_{\psi A}O^A$

O^A 又可以提供如下的两种 1PI 发散图（只画了单圈图）：



按照第五章的讨论：

（Ⅲ）所要求的抵消项可归入 $Z_{A\psi}O^\psi$

（Ⅳ）所要求的抵消项可归入 $Z_{AA}O^A$

所以插入的算子如果是 O^{ψ} 和 O^{A}，则裸的 $O^{\psi 0}$和 O^{A0}应是：

$$
\begin{aligned}
O^{\psi 0} &= Z_{\psi\psi}O^{\psi} + Z_{\psi A}O^{A} \\
O^{A0} &= Z_{A\psi}O^{\psi} + Z_{AA}O^{A}
\end{aligned}
\tag{A3.65}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
Z_{\psi\psi} &= 1 + O(g^2) \qquad Z_{\psi A} = O(g^2) \\
Z_{AA} &= 1 + O(g^2) \qquad Z_{A\psi} = O(g^2)
\end{aligned}
$$

一般来说，此时裸的生成泛函可写成：

$$
\begin{aligned}
W[j^0,\xi^0,\bar{\xi}^0,K^0,L^0,N^0] &= d(\varphi^0)d(u^0)d(\bar{u}^0) \\
&\cdot \exp\{S[\varphi^0,u^0,\bar{u}^0,K^0,L^0] + j_i^0\psi_i^0 \\
&+ \bar{u}_\alpha^0\xi_\alpha^0 + \bar{\xi}^0u_\alpha^0 + N_A^0O^{A^C} + N_\psi^0O^{\psi 0}\}^{①}
\end{aligned}
\tag{A3.66}
$$

按第五章、第八章的重正化的手续，把（A3.65）和 $\psi^0 = Z_\psi^{1/2}\psi$，…代入，就可得到各种重正化的有限的矩阵元（除 $j_i^0 = Z_\psi^{-1/2}j_i$，$u_\alpha^0 = \tilde{Z}_3^{+1/2}u_\alpha$，…外，这里还有 $N_A^0 = N_A$，$N_\psi^0 = N_\psi$）。由于 O^ψ，O^A 规范不变，N_ψ，N_A 也规范不变，所以在导出 Slavnov 恒等式时不受影响。于是仍可用第九章的办法来证明含有插入算子 O^ψ，O^A 的重正化的物理的矩阵元（即所有的外线全都在质壳上的含有算子 O^ψ，O^A 的矩阵元）不随规范而变（在有自发破缺时也成立）。

现在我们定义 Z^{-1}（在 $\varepsilon\neq 0$，或 $n\neq 4$ 时，Z 为有限，可以定义 Z^{-1}）：

$$
\begin{aligned}
O^{\psi} &= (Z^{-1})_{\psi\psi}O^{\psi 0} + (Z^{-1})_{\psi A}O^{A0} \\
O^{A} &= (Z^{-1})_{A\psi}O^{\psi 0} + (Z^{-1})_{AA}O^{A0}
\end{aligned}
\tag{A3.67}
$$

再定义重正化的截肢 1PI 格林函数：

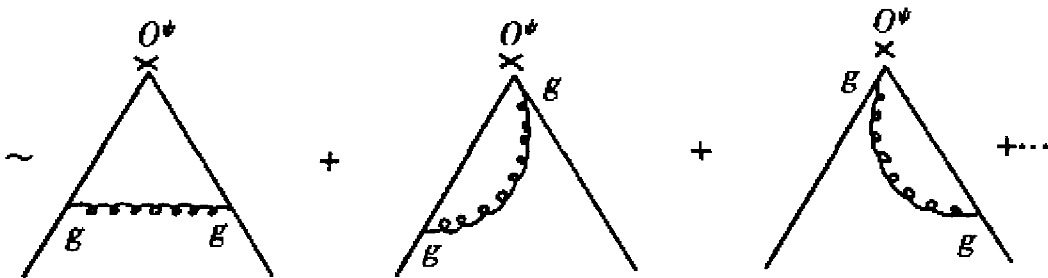
$$
\begin{aligned}
G_{\psi\psi} &= \langle 0 \mid T\psi O^{\psi}\bar{\psi} \mid 0\rangle_{截肢} \\
G_{A\psi} &= \langle 0 \mid T\psi O^{A}\bar{\psi} \mid 0\rangle_{截肢} \\
G_{\psi A} &= \langle 0 \mid TAO^{\psi}A \mid 0\rangle_{截肢} \\
G_{AA} &= \langle 0 \mid TAO^{A}A \mid 0\rangle_{截肢}
\end{aligned}
\tag{A3.68}
$$

还有裸的截肢 1PI 格林函数：

$$
\begin{aligned}
G^0_{\psi\psi} &= \langle 0 \mid T\psi^0O^{\psi 0}\bar{\psi}^0 \mid 0\rangle_{截肢} \\
G^0_{A\psi} &= \langle 0 \mid T\psi^0O^{A0}\bar{\psi}^0 \mid 0\rangle_{截肢} \\
G^0_{\psi A} &= \langle 0 \mid TA^0O^{\psi 0}A^0 \mid 0\rangle_{截肢} \\
G^0_{AA} &= \langle 0 \mid TA^0O^{A0}A^0 \mid 0\rangle_{截肢}
\end{aligned}
\tag{A3.69}
$$

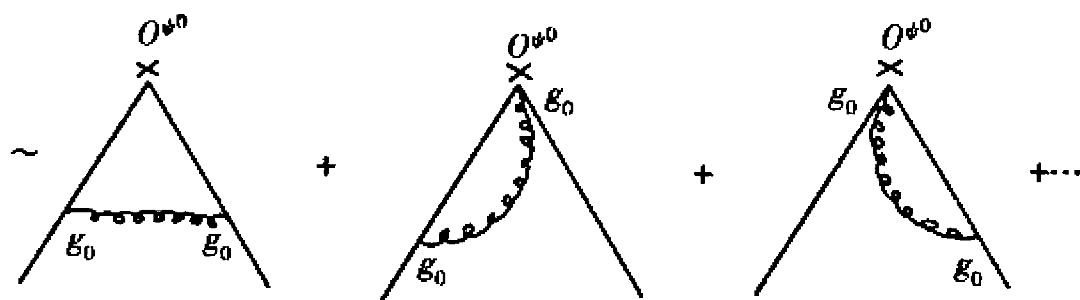
举例：

$G_{\psi\psi} = \langle 0 \mid T\psi O^{\psi}\bar{\psi} \mid 0\rangle_{截肢}$

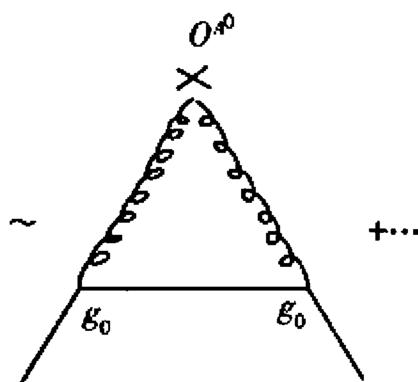


① 相互作用项中没有$\frac{\delta}{\delta N_A}$，$\frac{\delta}{\delta N_\psi}$，插入算子 O_i 在格林函数中出现的次数是有限的，不妨碍重正化（参见附录二的讨论）。

$G^0_{\psi\psi} = \langle 0 | T\psi^0 O^{\psi 0} \overline{\psi}^0 | 0 \rangle_{截肢}$



$G^0_{A\psi} = \langle 0 | T\psi^0 O^{A0} \overline{\psi}^0 | 0 \rangle_{截肢}$



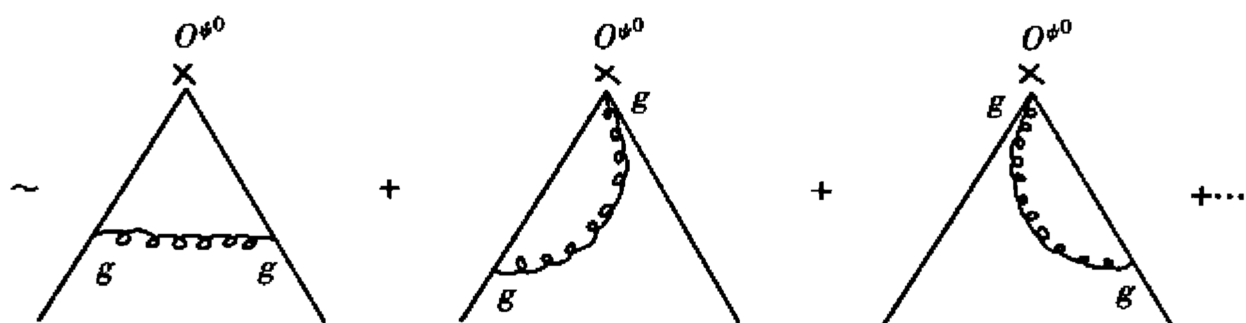
g 是重正化的，g_0 是裸的，$g_0 = \dfrac{Z_1}{Z_\psi Z_A^{1/2}} g$。

根据（A3.67）第一式：

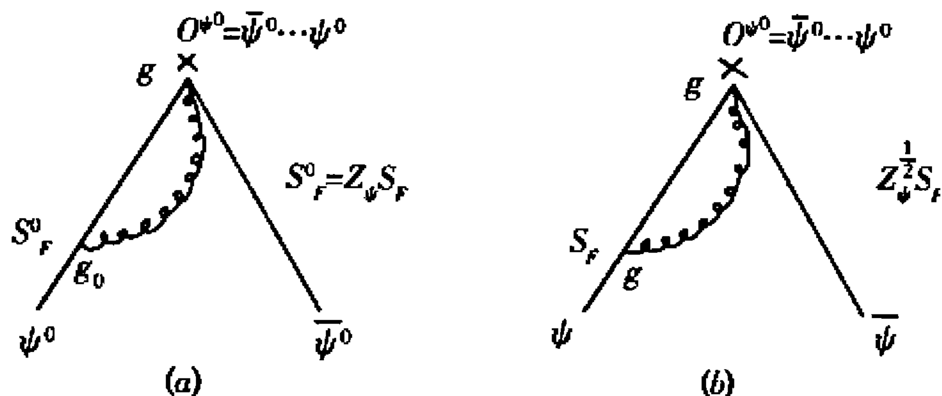
$$G_{\varphi\varphi} = \langle 0 | T\psi O^{\psi} \overline{\psi} | 0 \rangle_{截肢}$$

$$= (Z^{-1})_{\varphi\varphi} \langle 0 | T\psi O^{\psi 0} \overline{\psi} | 0 \rangle_{截肢} + (Z^{-1})_{\psi A} \langle 0 | T\psi O^{\psi 0} \overline{\psi} | 0 \rangle_{截肢}$$

其中 $\langle 0 | T\psi O^{\psi 0} \overline{\psi} | 0 \rangle_{截肢}$



比较以下两图



（a）左边截去 S_F^0，在圈上得 $g_0 S_F^0 D_A^0 = Z_A^{1/2} g$ 因子。

（b）左边截去 S_F，在圈上得 $Z_1 g S_F D_A Z_A^{1/2} Z_A^{1/2} = Z_\psi^{1/2} g_0 S_F^0 D_A^0$ 因子（O^{ψ^0} 提供了 $Z_A^{1/2} Z_\psi^{1/2}$）。

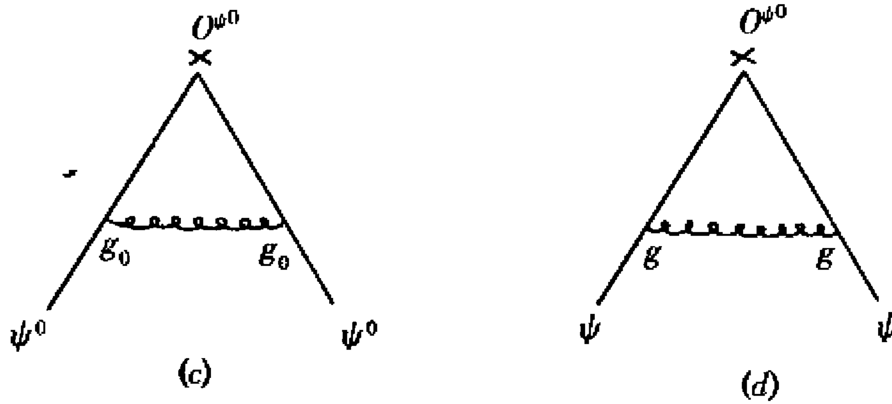
（a）右边截去 S_F^0，把 ψ^0 提供的 $Z_\psi^{1/2}$ 也去掉了。

（b）右边截去 S_F，保留了 ψ^0 提供的 $Z_\psi^{1/2}$。

所以总起来看：

$$Z_\psi^{1/2} \cdot Z_\psi^{1/2}\ (a)\ = Z_\psi\ (a)\ =\ (b)$$

再比较以下两图



(c) (d)

（c）截去两个 S_F^0，（d）截去两个 S_F。结果（c）有因子 $g_0^2 D_A^0 S_F^0 S_F^0$，（d）有因子 $Z_1 g Z_1 g Z_\psi S_F D_A = g_0^2 Z_\psi S_F^0 S_F^0 D_A^0$（$O^{\psi^0}$提供了 Z_ψ）。

所以也有：

$$Z_\psi\ (c)\ =\ (d)$$

从而：

$$\langle 0 |\ T\psi O^{\psi^0} \bar{\psi}\ | 0 \rangle_{截肢} = Z_\psi \langle 0 |\ T\psi^0 O^{\psi^0} \bar{\psi}^0\ | 0 \rangle_{截肢}$$

相仿有

$$\langle 0 |\ T\psi O^{A^0} \bar{\psi}\ | 0 \rangle_{截肢} = Z_\psi \langle 0 |\ T\psi^0 O^{\psi^0} \bar{\psi}\ | 0 \rangle_{截肢}$$

代入上面的 $G_{\psi\psi}$ 得到：

$$G_{\psi\psi} = Z_\psi [(Z^{-1})_{\psi\psi} G_{\psi\psi}^0 + (Z^{-1})_{\psi A} G_{A\psi}^0]$$
$$G_{\psi A} = Z_A [(Z^{-1})_{\psi\psi} G_{\psi A}^0 + (Z^{-1})_{\psi A} G_{AA}^0]$$

相仿有

$$G_{A\psi} = Z_\psi [(Z^{-1})_{A\psi} G_{\psi\psi}^0 + (Z^{-1})_{AA} G_{A\psi}^0]$$
$$G_{AA} = Z_A [(Z^{-1})_{A\psi} G_{\psi A}^0 + (Z^{-1})_{AA} G_{AA}^0]$$

总结起来可写成

$$G_{ac} = \sum_b Z_c (Z^{-1})_{ab} G_{bc}^0 (c\ 不求和) \tag{A3.70}$$

定义：

$$\gamma_c = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_c} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} Z_c = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_c \tag{A3.71}$$

由于 Z^{-1} 的定义有：

$$Z^{-1} Z = \begin{pmatrix} Z_{\psi\psi}^{-1} & Z_{\psi A}^{-1} \\ Z_{A\psi}^{-1} & Z_{AA}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_{\psi\psi} & Z_{\psi A} \\ Z_{A\psi} & Z_{AA} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是微商得：

$$
\begin{aligned}
&Z_{\psi\psi}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{\psi\psi}+Z_{A\psi}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{\psi A}+\gamma_{\psi\psi}=0\\
&Z_{\psi A}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{\psi\psi}+Z_{AA}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{\psi A}+\gamma_{\psi A}=0\\
&Z_{\psi\psi}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{A\psi}+Z_{A\psi}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{AA}+\gamma_{A\psi}=0\\
&Z_{\psi A}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{A\psi}+Z_{AA}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{AA}+\gamma_{AA}=0
\end{aligned}
\tag{A3.72}
$$

其中定义 γ_{ab}为：

$$
\begin{aligned}
\gamma_{\psi\psi}&=(Z^{-1})_{\psi\psi}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{\psi\psi})+(Z^{-1})_{\psi A}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{A\psi})\\
\gamma_{\psi A}&=(Z^{-1})_{\psi\psi}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{\psi A})+(Z^{-1})_{\psi A}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{AA})\\
\gamma_{A\psi}&=(Z^{-1})_{A\psi}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{\psi\psi})+(Z^{-1})_{AA}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{A\psi})\\
\gamma_{AA}&=(Z^{-1})_{A\psi}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{\psi A})+(Z^{-1})_{AA}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{AA})
\end{aligned}
\tag{A3.73}
$$

把（A3.72），（A3.73）合在一起可写成：

$$
\gamma_{ac}=(Z^{-1})_{ab}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z_{bc})=-Z_{bc}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{ab}
\tag{A3.74}
$$

现在回到（A3.70）。因为 G^0_{bc}与 μ 无关，我们可导出 G_{ab}的重正化群方程。为此，在一般情况下，定义（参见第十章）$\mathscr{D}$如下：

$$
\mathscr{D}=\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\beta\frac{\partial}{\partial g}+\gamma_m\cdot m\frac{\partial}{\partial m}+\delta\frac{\partial}{\partial a}
\tag{A3.75}
$$

根据第十章的解释，$\mathscr{D}$就是指固定 g_c 时随 t 的变化——即$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{g_c}=\left.\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right|_{g_c}$。但 $\mathscr{D}$中的 $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$的含义则狭窄一些，它是指对于 g，Z，m，a（g，Z，m，a 都是 t 的函数）之外的 μ 作微商（例如在把维数扩充到 n 时，g_0 就会出现 $\mu^{\frac{4-N}{2}}$因子，m_0 就会出现 μ 因子，见第十章）。现在，（A3.71），（A3.74）中的 $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$都是前一种意义的。因此，把 $\mathscr{D}$作用在（A3.70）上，就得到（利用（A3.70），（A3.71），（A3.74））：

$$
\mathscr{D}G_{ac}=Z_{cc}\frac{1}{Z_c}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_c\right)\sum_b(Z^{-1})_{ab}G^0_{bc}+Z_c\sum_b\mu\frac{\partial}{\partial\mu}(Z^{-1})_{ab}G^0_{bc}=2\gamma_cG_{ac}-\sum_e\gamma_{ae}G_{ea}
$$

$$
\therefore\quad(\mathscr{D}-2\gamma_c)G_{ac}=-\sum_e\gamma_{ae}G_{ec}
\tag{A3.76}
$$

非单态的情况：前已讨论过，对于非单态的 O^{ns}，

$$
\langle 0|T\psi O^{ns}\bar{\psi}|0\rangle_{截肢}\neq 0,而\langle 0|TAO^{ns}A|0\rangle_{截肢}=0,
$$

所以方程组（A3.74）简化为：

$$
(\mathscr{D}-2\gamma_\psi)G^{ns}=-\gamma^{ns}_{\psi,\psi}G^{ns}
\tag{A3.77}
$$

其中 $G^{ns}=\langle 0|T\psi O^{ns}\bar{\psi}|0\rangle_{截肢}$。

单态的情况：方程组（A3.76）包括4个方程：

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{D}-2\gamma_{\psi})G_{\psi\psi} &= -\gamma_{\psi\psi}G_{\psi\psi}-\gamma_{\psi A}G_{A\psi} \\
(\mathscr{D}-2\gamma_{\psi})G_{A\psi} &= -\gamma_{A\psi}G_{\psi\psi}-\gamma_{AA}G_{A\psi} \\
(\mathscr{D}-2\gamma_{A})G_{\psi A} &= -\gamma_{\psi\psi}G_{\psi A}-\gamma_{\psi A}G_{AA} \\
(\mathscr{D}-2\gamma_{A})G_{AA} &= -\gamma_{A\psi}G_{\psi A}-\gamma_{AA}G_{AA}
\end{aligned}
\tag{A3.78}
$$

（A3.77）和（A3.78）就是截肢格林函数 G 的重正化群方程。

Wilson 系数 C 的重正化群方程组

定义：

$$
\begin{aligned}
G_{JJ\psi} &= \langle 0 | T\psi JJ\bar{\psi} | 0\rangle_{\text{截肢}} \\
G_{JJA} &= \langle 0 | TAJJA | 0\rangle_{\text{截肢}}
\end{aligned}
$$

光锥展开：

$$
G_{JJc} \sim \sum_N \sum_b C_b^N G_{bc}^N y_{\mu_1}\cdots y_{\mu_N} \tag{A3.79}
$$

根据与前类似的分析，有（因为截肢时 $G_{JJ\psi}^0$ 多截去了两个 $Z_\psi^{1/2}$）：

$$
\begin{aligned}
\langle 0 | T\psi J^0 J^0\bar{\psi} | 0\rangle_{\text{截肢}} &= Z_\psi \langle 0 | T\psi^0 J^0 J^0\bar{\psi}^0 | 0\rangle_{\text{截肢}} \\
\langle 0 | TAJ^0 J^0 A | 0\rangle_{\text{截肢}} &= Z_A \langle 0 | TA^0 J^0 J^0 A^0 | 0\rangle_{\text{截肢}}
\end{aligned}
$$

然而从第十章知道，守恒流或部分守恒流 J_μ 的反常量纲为0，$\gamma_J=0$，$Z_J=1$，所以

$$
\begin{aligned}
G_{JJ\psi} &= \langle 0 | T\psi J^0 J^0\bar{\psi} | 0\rangle_{\text{截肢}} = Z_\psi G_{JJ\psi}^0 \\
G_{JJA} &= \langle 0 | TAJ^0 J^0 A | 0\rangle_{\text{截肢}} = Z_A G_{JJA}^0
\end{aligned}
\tag{A3.80}
$$

从而用 $\mathscr{D}$ 作用上去（参考前面讨论）得到：

$$
\mathscr{D}G_{JJc} = Z_c\cdot\frac{1}{Z_c}\mu\frac{\partial}{\partial\mu}Z_c\cdot G_{JJc}^0 = 2\gamma_c\cdot G_{JJc}
$$

$$
\therefore (\mathscr{D}-2\gamma_c)G_{JJc} = 0 \tag{A3.81}
$$

把（A3.79）代入（A3.81），并利用（A3.76）：

$$
\sum_b(\mathscr{D}C_b^N)G_{bc}^N+\sum_b C_b^N(\mathscr{D}G_{bc}^N) = \sum_b(\mathscr{D}C_b^N)G_{bc}^N+\sum_b C_b^N[2\gamma_c G_{bc}^N-\sum_e\gamma_{be}^N G_{ec}^N]
$$

$$
= 2\gamma_c\sum_b C_b^N G_{bc}^N
$$

$$
\therefore \quad \sum_b(\mathscr{D}C_b^N-\sum_a C_a^N\gamma_{ab}^N)G_{bc}^N = 0
$$

由于 $G_{\psi c}^N$ 与 G_{Ac}^N 互相独立，立刻得到：

$$
\mathscr{D}C_b^N = \sum_a C_a^N\gamma_{ab}^N \tag{A3.82}
$$

这就是单态的 C_a^N 的重正化群方程组。注意只有 N 相同的 C_ψ^N，C_A^N 才能发生混合。

非单态的情况，因为只有 $C^{ns,N}$，所以简化为

$$
\mathscr{D}C^{ns,N} = C^{ns,N}\gamma^{ns,N} \tag{A3.82$'$}
$$

单态的 γ 本征值

$$\gamma^N = \begin{pmatrix} \gamma_{\psi\psi}^N & \gamma_{\psi A}^N \\ \gamma_{A\psi}^N & \gamma_{AA}^N \end{pmatrix} \tag{A3.83}$$

本征值是：

$$\gamma_\pm^N = \frac{\gamma_{\psi\psi}^N + \gamma_{AA}^N \pm \sqrt{(\gamma_{\psi\psi}^N + \gamma_{AA}^N)^2 - 4(\gamma_{\psi\psi}\gamma_{AA} - \gamma_{\psi A}\gamma_{A\psi})}}{2} \tag{A3.84}$$

本征矢量记作 $C_\pm^N$，于是（A3.82）化简为：

$$\mathscr{D}C_+^N = C_+^N \gamma_+^N$$
$$\mathscr{D}C_-^N = C_-^N \gamma_-^N \tag{A3.85}$$

而 C_b^N 可展为

$$C_b^N = d_b^{N+} C_+^N + d_b^{N-} C_-^N \tag{A3.86}$$

前已讨论过，$\mathscr{D}$ 是指固定 g_c 时随 t 的变化，即 $\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{g_c}$，所以相仿于第十章的做法（参考（10.27））：

$$\begin{aligned} &C_\pm^N\,(e^{2t}q^2, g(g_c,0), u_c, m(0), a(0)) \\ &= e^{-\int_0^t \gamma_\pm^N dt} C_\pm^N\left(q^2, g(g_c,t), u_c, \frac{m(t)}{e^t}, a(t)\right) \end{aligned} \tag{A3.87}$$

这里我们注意到，§A3－5 的讨论指出，对于 τ＝2，C_b^N 的正常量纲都是零。

在一圈近似下，$\gamma^N \sim O\ (g^2)$，我们写

$$\gamma^N = g^2 \bar{\gamma}^N$$

又 $g^2 \approx \dfrac{g_c^2}{1+b_0 g_c^2 t}$，所以

$$e^{-\int_0^t \gamma_\pm^N dt} \xrightarrow{t\to\infty} e^{-\frac{\bar{\gamma}_\pm^N}{b_0}\ln(1+b_0 g_c^2 t)} = (1 + b_0 g_c^2 t)^{-\frac{\bar{\gamma}_\pm^N}{b_0}}$$

代入（A3.86）

$$\begin{aligned} &C_b^N\,(e^{2t}q^2, g(g_c,0), \mu_c, m(0), a(0)) \\ &= d_b^{N+} C_+^N\,(e^{2t}q^2, g(g_c,0), \mu_c, m(0), a(0)) \\ &\quad + d_b^{N-} C_-^N\,(e^{2t}q^2, g(g_c,0), \mu_c, m(0), a(0)) \\ &\xrightarrow{t\to\infty} d_b^{N+\prime} C_+^N\left(q^2, g(g_c,t), \mu_c, \frac{m(t)}{e^t}, a(t)\right)(1 + b_0 g_c^2 t)^{-\frac{\bar{\gamma}_+^N}{b_0}} \\ &\quad + d_b^{N-\prime} C_-^N\left(q^2, g(g_c,t), \mu_c, \frac{m(t)}{e^t}, a(t)\right)(1 + b_0 g_c^2 t)^{-\frac{\bar{\gamma}_-^N}{b_0}} \end{aligned} \tag{A3.88}$$

这里的 t 也常写成 $\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}$，$Q^2 = e^{2t}q^2$，参考（10.39′），（10.40′）：

如果是非单态，则（A3.88）简化成下式：

$$\begin{aligned} &C^{ns,N}(e^{2t}q^2, g(g_c,0), \mu_c, m(0), a(0)) \\ &\xrightarrow{T\to\infty} \text{常数} \times C^{ns,N}\left(q^2, g(g_c,t)\mu_c, \frac{m(t)}{e^t}, \alpha(t)\right)\cdot(1 + b_0 g_c^2 t)^{-\frac{\bar{\gamma}^{ns,N}}{b_0}} \end{aligned} \tag{A3.88′}$$

综合（A3.57），（A3.58），（A3.59）：

$$f^j_{i,N}(q^2,g,m,\mu,a) = \frac{(q^2)^{N+\lambda^i}}{4\pi}\frac{\partial^{N-\mu_i}}{\partial(q^2)^{N-\mu_i}}\int d^4y\frac{C^j_{i,N}(y^2+i\varepsilon)}{(y^2+i\varepsilon)^{v^i}}e^{-iqy} \tag{A3.89}$$

$$\begin{array}{lll} \lambda_1=1 & \lambda_2=0 & \lambda_3=0 \\ \mu_1=0 & \mu_2=2 & \mu_3=1 \\ v_1=1 & v_2=0 & v_3=1 \end{array}$$

正好 $\lambda_i+\mu_i+v_i=2$，$(i=1,2,3)$，所以

$$\begin{aligned} & f^j_{i,N}(\lambda^2q^2,g(g_c,0),\mu_c,m(0),a(0)) \\ & = \frac{(\lambda^2)^{\lambda_i+\mu_i+v_i-2}}{4\pi}(q^2)^{N+\lambda_i}\frac{\partial^{N-\mu_i}}{\partial(q^2)^{N-\mu_i}}\int d^4y\frac{C^j_{i,N}\left(\frac{y^2}{\lambda^2}+i\varepsilon\right)}{(y^2+i\varepsilon)^{v_i}}e^{-iqy} \\ & = \frac{(q^2)^{N+\lambda_i}}{4\pi}\frac{\partial^{N-\mu_i}}{\partial(q^2)^{N-\mu_i}}\int d^4y\frac{C^j_{i,n}\left(\frac{y^2}{\lambda_2}+i\varepsilon\right)}{(y^2+i\varepsilon)^{v_i}}e^{-iqy} \end{aligned} \tag{A3.90}$$

对照（A3.49）和（A3.79），可见 C^N_b 包括了 $C^j_{i,N}$（$i=1,2,3$）的三种情况。在（A3.90）的 Fourier 变换中，（A3.88）和（A3.88）′的 $(1+b_0g_0^2t)^{-\frac{\bar{\gamma}}{b_0}}$ 因子不会改变，d^4y 积分和 $\frac{\partial^N}{\partial(q^2)^N}$ 微商都不影响这个因子，所以从（A3.90）看到，$f^j_{i,N}$ 的渐近行为和 $C^j_{i,n}$ 的渐近行为是相同的。再通过（A3.60），（A3.61），（A3.62），就可以知道用 W_i 做成的矩的渐近行为。

举一个例子，自（A3.62），对于非单态有：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx\cdot x^{N-1}(1+(-1)^{N+1})\frac{q^2}{2m^2x}W_3 \sim \sum_j f^j_{3,N}A^j_N(1+b_0g_c^2t)^{-\frac{\bar{\gamma}_{ns,N}}{b_0}}$$

对于单态，情况要复杂一些，因为在（A3.88）中有渐近行为不同的两项。但在 $T\to\infty$ 时，$(1+b_0g_c^2t)^{-\frac{\bar{\gamma}_N}{b_0}}$ 项有主要贡献。

§ A3-8 求 $\gamma^{ns,N}$ 和 γ^N_{ba}

我们这里只求一圈图的贡献（即取到 g^2 级）。可以从（A3.77），（A3.78）入手。设重正化的有限的矩阵元是（r 是待定参数）

$$G^{ns,N} = A_1\left(1+\frac{r^{ns,N}}{2}\ln\frac{P^2}{\mu^2}+O(g^4)\right)$$

$$G^N_{\psi\psi} = A^N_1\left(1+\frac{r^N_{\psi\psi}}{2}\ln\frac{P^2}{\mu^2}\right)+O(g^4)$$

$$G^N_{A\psi} = A^N_1\left(\frac{r^N_{A\psi}}{2}\ln\frac{P^2}{\mu^2}\right)+O(g^4)$$

$$G^N_{\psi A} = A^N_2\left(\frac{r^N_{\psi A}}{2}\ln\frac{P^2}{\mu^2}\right)+O(g^4)$$

$$G_{AA}^N = A_2^N\left(1 + \frac{r_{AA}^N}{2}\ln\frac{P^2}{\mu^2}\right) + O(g^4) \tag{A3.91}$$

(A3.68－69）是 G_{ab} 把 ψ（或 A）的传播子截肢而得出的，所以 G_{ab} 的 $1PI$ 应是传播子所带能量动量 P 的函数。$\ln\frac{P^2}{\mu^2}$ 代表正常化给出的有限项（见第六章。P^2 代表 P 的一个二次项）。A_1^N，A_2^N 是为了写成（A3.92）而引入的系数。把（A3.91）代入（A3.77），（A3.78），只取到 g^2，则有（注意 $r^N \simeq \bar{r}^N g^2$，$\beta \sim g^3$，$\mathscr{D}$ 的定义见（A3.75）：

$$\mathscr{D}\left(1 + \frac{r^N}{2}\ln\frac{P^2}{\mu^2}\right) = -\frac{\bar{r}^N g^2}{2}\cdot 2\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\mu + \left(\beta\frac{\partial}{\partial g}\bar{r}^N g^2\right)\ln\frac{P^2}{\mu^2} \simeq -\bar{r}^N g^2$$

$\beta\frac{\partial}{\partial g}g^2 \sim O(g^4)$ 略去，g^2 中不含 μ、m、a、m 微分项和 a 微分项也可略去。于是：

$$\begin{aligned} -r^{ns,N} - 2\gamma_\psi &= -\gamma^{ns,N} \\ -r_{\psi\psi}^N - 2\gamma_\psi &= -\gamma_{\psi\psi}^N \\ -r_{A\psi}^N &= -\gamma_{A\psi}^N \\ -r_{\psi A}^N &= -\gamma_{\psi A}^N \\ -r_{AA}^N - 2\gamma_A &= -\gamma_{AA}^N \end{aligned} \tag{A3.92}$$

（由于 $\gamma^N = \bar{\gamma}^N g^2$，乘上非对角的 G_{ab}^N 得 $O(g^4)$，所以都略去）。现在归结为求 $r_{\psi\psi}, r_{A\psi}, r_{\psi A}, r_{AA}$。注意用维数正常化时，$\ln\frac{P^2}{\mu^2}$ 总是以 $\left(\frac{1}{4-n} - \frac{1}{2}\ln\frac{P^2}{\mu^2}\right)$ 形式与 $\frac{1}{4-n}$ 联合出现，所以只需在计算 G_{ab}^N 时找出 $\frac{1}{4-n}$ 的系数，乘上（－1）即得 r_{ab}^N。以下我们计算最低扭度（$\tau = 2$）的算子 $O_{\mu1,\cdots,\mu_N}^{ns}, O_{\mu1,\cdots,\mu_N}^{\psi}, O_{\mu1,\cdots,\mu_N}^{A}$ 所给出的 G_{ab}^N 和相应的 r_{ab}^N。在 O^{ns} 中，$\lambda_{\alpha\beta}^k$ 的指标 k 代表不同的非单态矩阵，但因 $r^{ns,N}$ 与 k 无关，故不必写出 k。

$$\begin{aligned} O_{\mu1,\cdots,\mu_N}^{ns} &= \frac{(-i)^{N-1}}{N!}S(\bar{\psi}_\alpha\lambda_{\alpha\beta}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_N}\psi_\beta) \\ O_{\mu1,\cdots,\mu_N}^{\psi} &= \frac{(-i)^{N-1}}{N!}S(\bar{\psi}_\alpha\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_N}\psi_\alpha) \\ O_{\mu1,\cdots,\mu_N}^{A} &= \frac{(-i)^{N-1}}{N!}S(F_{\mu_1\nu}^a\nabla_{\mu2}\cdots\nabla_{\mu_{N-1}}F_{\mu_N\nu}^a) \end{aligned} \tag{A3.93}$$

其中 S 表示对 Loreutz 指标 μ_1，…，μ_N 对称化求和。另外我们用到的有

$$S_{F\alpha\beta}(x-y) = \langle 0 | T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) | 0\rangle = \frac{1}{2(\pi)^4}\int d^4p e^{ip(x-y)}\frac{-(\hat{p}+im)}{(p^2+m^2)-i\varepsilon}$$

$$\delta_{\mu\nu}\Delta_F(x-y) = \langle 0 | TA_\mu(x)A_\nu(x) | 0\rangle = \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4k e^{ik(x-y)}\frac{-j}{k^2-i\varepsilon}$$

为了方便，我们用费曼规范计算，因为这里考虑的反常量纲在 g^2 一级与规范无关。

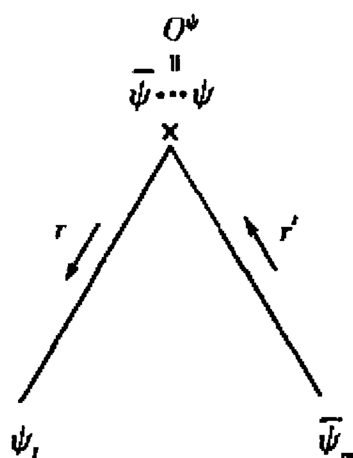
求 $\gamma_{\psi\psi}$，γ^{ns}：计算 $G_{\psi\psi}$，为了方便，可以计算下式

$$\langle 0 | T\psi\frac{(-i)^{N-1}}{N!}S(\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}D_{\mu_2}\cdots D_{\mu_N}\psi)\bar{\psi} | 0\rangle_{截肢}x_{\mu1}\cdots x_{\mu N}$$

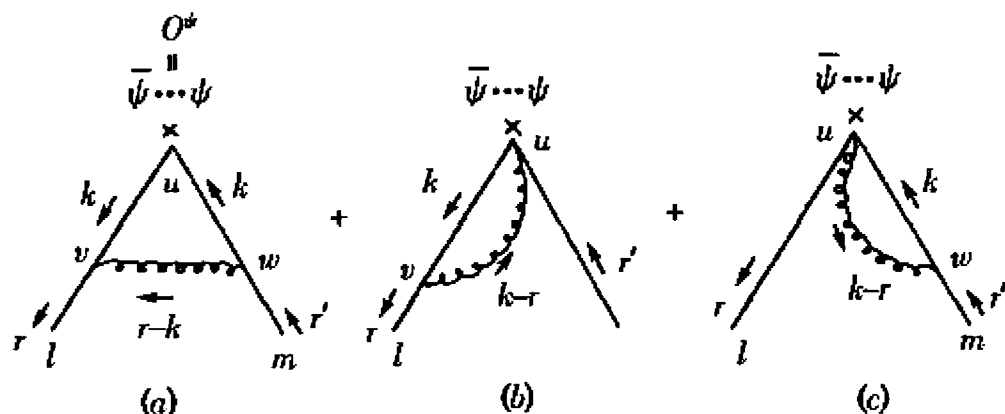
然后令 $x^2 \to 0$。这样就可以把计算中出现的 x^2 项，$x^2 \cdot x^2$ 项，…去掉，从而大大简化。

$G_{\psi\psi}$ 的树图项：

$$G^N_{\psi\psi\text{树图}} x_{\mu_1}\cdots x_{\mu_N} = \not{x}(x\cdot r)^{N-1}(2\pi)^4\delta^4(r-r')\delta_{lm} \tag{A3.94}$$



$G_{\psi\psi}$的一圈图项：



$$(a) = \int d^4u d^4v d^4\omega \cdot e^{i\omega r'}\cdot e^{-ivr}\cdot \frac{1}{2(\pi)^4}\int d^4q_l e^{iq_1(v-w)}\frac{-i}{q_1^2-i\varepsilon}$$

$$\cdot i(ig\gamma_\alpha T^\alpha_{ln})\cdot\frac{1}{2(\pi)^4}\int d^4k e^{ik(v-u)}\frac{-\hat{k}}{k^2-i\varepsilon}(T^\alpha_{ln}\text{ 是色矩阵})$$

$$\cdot\frac{1}{2(\pi)^4}\int \not{x}(x\cdot q_2)^{N-1}d^4q_2\cdot e^{iq_2(u-w)}\frac{-\hat{q}_2}{q_2^2-i\varepsilon}\cdot i(ig\gamma_\alpha T^\alpha_{nm})$$

$$= g^2\int d^4q_1 d^4k d^4q_2\delta^4(r'-q_1-q_2)\delta^4(q_1+k-r)\delta^4(-k+q_2)$$

$$\cdot(-i)\frac{\gamma_\alpha\hat{k}\hat{x}\hat{q}_2\gamma_\alpha}{(q_1^2-i\varepsilon)(k^2-i\varepsilon)(q_2^2-i\varepsilon)}T^\alpha_{ln}T^\alpha_{nm}(x\cdot q_2)^{N-1}$$

$$= g^2\int d^4k(-i)\frac{\gamma_\alpha\hat{k}\not{x}\hat{k}\gamma_\alpha}{((r'-k)^2-i\varepsilon)(k^2-i\varepsilon)^2}(x\cdot k)^{N-1}C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')$$

$$\doteq 2ig^2\int d^4k\frac{\hat{k}\not{x}\hat{k}}{k^2\cdot k^2(k-r)^2}\cdot(x\cdot k)^{N-1}C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')$$

用维数正常化方法算这个积分：

$$\int d^nk\frac{\hat{k}\not{x}\hat{k}}{k^2\cdot k^2(k-r)^2}(x\cdot k)^{N-1}$$

$$=\int_0^1 dy\cdot 2y\int d^nk\frac{\hat{k}\not{x}\hat{k}}{(k^2-2r\cdot k(1-y)+r^2(1-y))^3}(x\cdot k)^{N-1}$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{作变数变换}: k' = k - r(1-y), k = k' + r(1-y) \\ \qquad\qquad k'^2 = k^2 - 2r\cdot k(1-y) + r^2(1-y)^2 \\ \text{又有 } \hat{k}\hat{x}\hat{k} = 2(x\cdot k)\hat{k} - \hat{x}k^2\end{array}\right]$$

$$= \int_0^1 dy\cdot 2y\int d^n k'$$

$$\cdot\frac{2[(x\cdot k') + x\cdot r(1-y)][\hat{k}' + \hat{r}(1-y)] - \hat{x}[k'^2 + 2r\cdot k'(1-y) + r^2(1-y^2)]}{(k'^2 - r^2(1-y)^2 + r^2(1-y))^3}$$

$\cdot[(x\cdot k') + (x\cdot r)(1-y)]^{N-1}$,（消去了分母上的 k 一次项）。

考察分子上的 $(x\cdot k')$ 的幂次：

1. $(x\cdot k')^2$ 和更高幂次的 k' 项才有发散。

2. $(x\cdot k')^2 = x_\alpha k'_\alpha x_\beta k'_\beta$，自维数正常化积分公式（6.6）看到，$k'$ 积分后分子上有 $\sim x_\alpha\delta_{\alpha\beta}x_\beta = x^2\to 0$。

3. $(x\cdot k')^3$ 是 k' 的奇函数，积分为0。

总之，若 $(x\cdot k')^N$ 的 $N\geqslant 2$，是偶数，则 k' 积分后，由于是标量，必定出现 x^2，x^2，…，$x^2\to 0$（因为积分后除 x 外没有别的矢量）。若 $N>2$，是奇数，则 k' 的奇函数积分也得零。所以可以把积分函数的分子展开，略去 $(x\cdot k')^2$，$(x\cdot k')^3$，…，得到

$$\{2[(x\cdot k') + x\cdot r(1-y)][\hat{k}' + \hat{r}(1-y)] - \hat{x}[k'^2 + 2r\cdot k'(1-y) + r^2(1-y)^2]\}$$
$$\cdot\{(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1} + (N-1)(x\cdot k')(x\cdot r)^{N-2}\cdot(1-y)^{N-2} + \cdots\}$$

$$\Rightarrow 2(x\cdot k')\hat{k}'(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1} + 2(x\cdot r)(1-y)\cdot\hat{k}'(N-1)(x\cdot k')$$
$$\cdot(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2} - \hat{x}k'^2(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}$$
$$-2\hat{x}\cdot(r\cdot k')(1-y)(N-1)(x\cdot k')(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2}$$

（这里我们注意到如果是 k' 的奇次项则积分得零；如果是 k' 的4，6，8，…次幂，则必定出 x^2，$x^2\cdot x^2$，…$\to 0$；如果是 k' 的零次幂，则不发散。所以我们只挑选出 k' 的二次项（$(x\cdot k')^2$ 项也不要）代入上述积分，并利用维数正常化公式，只取发散项：

$$\int d^n k\frac{\hat{k}\hat{x}\hat{k}}{k^2k^2(k-r)^2}\cdot(x\cdot k)^{N-1}$$

$$\Rightarrow\int_0^1 dy\cdot 2y\cdot d^n k'\frac{1}{(k'^2 - r^2(1-y)^2 + r^2(1-y))^3}$$
$$\cdot[2(x,k')\hat{k}'(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}$$
$$+2(x\cdot r)\hat{k}'(x\cdot k')(x\cdot r)^{N-2}(N-1)(1-y)^{N-1}$$
$$-\hat{x}k'^2(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}$$
$$-2\hat{x}(r\cdot k')(x\cdot k')(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-1}(N+1)]$$

$$\left[\int_0^1 2y(1-y)^{N-1}dy = \frac{2}{N(N-1)}\right]$$

$$\Rightarrow\frac{2}{N(N+1)}\cdot\frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(3)}\cdot\left\{2\cdot\frac{\hat{x}}{2}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(x\cdot r)^{N-1}\right.$$
$$+2\frac{\hat{x}}{2}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(x\cdot r)^{N-1}(N-1)$$

$$-\not{x}\cdot\frac{n}{2}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(x\cdot r)^{N-1}-2\not{x}\frac{(x\cdot r)^{N-1}}{2}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(N-1)\bigg\}$$

$$\stackrel{n\to 4}{\Rightarrow}\frac{2}{N(N+1)}\cdot\frac{i\pi^2}{2}\cdot\left\{\frac{1}{2-\frac{n}{2}}-2\frac{1}{2-\frac{n}{2}}\right\}\not{x}(x\cdot r)^{N-1}$$

$$=\frac{-2i\pi^2}{N(N+1)}\frac{1}{4-n}\not{x}(x\cdot r)^{N-1}$$

∴ (a) 的发散部分

$$=4g^2\pi^2\frac{1}{N(N+1)}\cdot\frac{1}{4-n}\cdot\not{x}(x\cdot r)^{N-1}C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')\qquad(\text{A3.95})$$

$$(b)=\int d^4u\,d^4v\,e^{iur'}\cdot e^{ivr}\cdot\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,e^{ik(v-u)}\cdot i(ig\gamma_\alpha T^a_{ln})\frac{-\hat{k}}{k^2-i\varepsilon}$$

$$\cdot\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4q\,e^{iq(v-u)}\frac{-i}{q^2-i\varepsilon}\cdot\not{x}\cdot(-i)x_\alpha\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot k)^j(x\cdot r)^{N-2-j}(-igT^a_{nm})$$

$$=g^2\int d^4k\,d^4q\,\delta^4(r'-k-q)\delta^4(-r+k+q)$$

$$\cdot i\frac{\not{x}\hat{k}\not{x}}{(k^2-i\varepsilon)(q^2-i\varepsilon)}\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot k)^j(x\cdot r)^{N-2-j}T^a_{ln}T^a_{nm}$$

$$=g^2\int d^4k\,i\frac{\not{x}\hat{k}\not{x}}{k^2(k-r)^2}\cdot\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot k)^j(x\cdot r)^{N-2-j}C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')$$

由于对称，$(b)=(C)$。考虑到 $\not{x}\hat{k}\not{x}=2(x\cdot k)\not{x}-\hat{k}x^2$，$x^2\to 0$，并作与上面相同的变数变换得到：

$$(b)+(c)$$

$$=g^2\int_0^1 dy\int d^4k\cdot i\cdot\frac{4(x\cdot k)\not{x}}{(k^2-2(r\cdot k)(1-y)+r^2(1-y))^2}\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot k)^j$$

$$\cdot(x\cdot r)^{N-2-j}C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')$$

$$=g^2\int_0^1 dy\int d^4k'\cdot i\cdot\frac{4\not{x}}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{N-2}[(x\cdot k')+(x\cdot r)(1-y)]^{j+1}(x\cdot r)^{N-2-j}\cdot C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')$$

分子上 k' 一次、三次幂积分为零（奇函数），k' 二次、四次幂出 x^2，$x^2\cdot x^2\to 0$，所以只有 k' 零次幂对发散项有贡献：

$$\Rightarrow g^2\int_0^1 dy\int d^4k'\cdot i\cdot\frac{4\not{x}}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot r)^{N-1}$$

$$\cdot(1-y)^{j+1}\cdot C^2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')=g^2\int d^4k'\cdot i$$

$$\cdot\frac{4}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}\cdot\sum_{j=0}^{N-2}\frac{1}{j+2}\cdot\not{x}(x\cdot r)^{N-1}C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')$$

换成维数正常化积分，发散项是：

$$\Rightarrow g^2\cdot i\cdot 4\frac{i\pi^2}{\Gamma(2)}\cdot\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\cdot\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\cdot\not{x}(x\cdot r)^{N-1}C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r')$$

$$\Rightarrow -8g^2\pi^2\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\frac{1}{4-n}\cdot \hat{x}(x\cdot r)^{N-1}C_2(R)\delta_{lm}\delta^4(r-r') \qquad (A3.96)$$

收集（A3.94），（A3.95），（A3.96），可见到一圈图为止有

$$G^N_{\psi\psi}x_{\mu 1}\cdots x_{\mu N} = \hat{x}\ (x\cdot r)^{N-1}\ (2\pi)^4\delta^4\ (r-r')\ \delta_{lm}\ \cdot$$

$$\left[1+\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{4}{N(N+1)}C_2(R)-8\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}C_2(R)\right)\frac{1}{4-n}+\text{不发散项}\right]$$

$$\therefore G^N_{\psi\psi} = \gamma_{\mu 1}\gamma_{\mu 2}\cdots\gamma_{\mu N}(2\pi)^4\delta^4(r-r')\delta_{lm}$$

$$\cdot\left[1+\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{4}{N(N+1)}-8\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\right)C_2(R)\frac{1}{4-n}+\text{不发散项}\right]$$

〔〕中的$\frac{1}{4-n}$的系数乘(-1)就是$r^N_{\psi\psi}$，所以

$$r^N_{\psi\psi} = -\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\frac{4}{N(N+1)}-8\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\right)C_2(R)$$

自（A3.92）

$$r^N_{\psi\psi} = 2\gamma_\psi + r^N_{\psi\psi} = 2\gamma_\psi + \frac{g^2}{16\pi^2}\left(-\frac{4}{N(N+1)}+8\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\right)C_2(R)$$

自（10.86）

$$Z_2 = 1+\frac{g^2}{16\pi^2}\frac{2}{\cdot n-4}C_2(G) = 1+\frac{Z_2^1}{N-4}+\cdots$$

和γ_3一样（见（10.41））有

$$\gamma_\psi = \frac{g}{4}\frac{\partial}{\partial g}z_2^1 = \frac{g^2}{16\pi^2}C_2(R)$$

$$\therefore r^N_{\psi\psi} = \frac{g^2}{16\pi^2}\left[2-\frac{4}{N(N+1)}+8\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\right]C_2(R) \qquad (A3.97)$$

由于$\lambda^k_{\alpha\beta}$是厄米矩阵，不影响上述计算，所以也有

$$\gamma^{ns,N} = \frac{g^2}{16(\pi^2)}\left[2-\frac{4}{N(N+1)}+8\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{j}\right]C_2(R) \qquad (A3.98)$$

求 $\gamma_{\psi A}$

计算G_{AA}树图，也是把$x_{\mu 1}\cdots x_{\mu N}$乘上，得

$$G^N_{AA\text{树图}}x_{\mu 1}\cdots x_{uN}$$

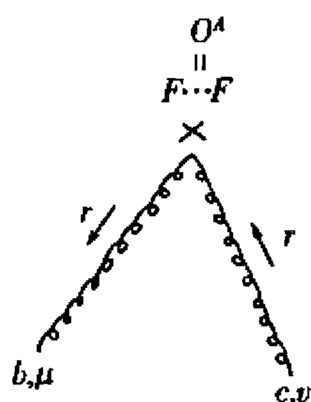
$$= \langle 0|\ TA^0_\mu\frac{(-i)^{N-1}}{N!}F^a_{\mu 1\alpha}\nabla_{\mu 3}\cdots\nabla_{\mu N-1}F^a_{\mu N\alpha}A^c_\nu|\ 0\rangle_{\text{截肢}}x_{\mu 1}\cdots x_{\mu N}$$

$$= (-2i)[(-ir_{\mu 1}\delta_{\mu\alpha}+ir_\alpha\delta_{\mu\mu_1})(r\cdot x)^{N\ 2}(ir_{\mu N}\delta_{\alpha\nu}-ir_\alpha\delta_{\mu N\nu})x_{\mu 1}x_{\mu N}]$$

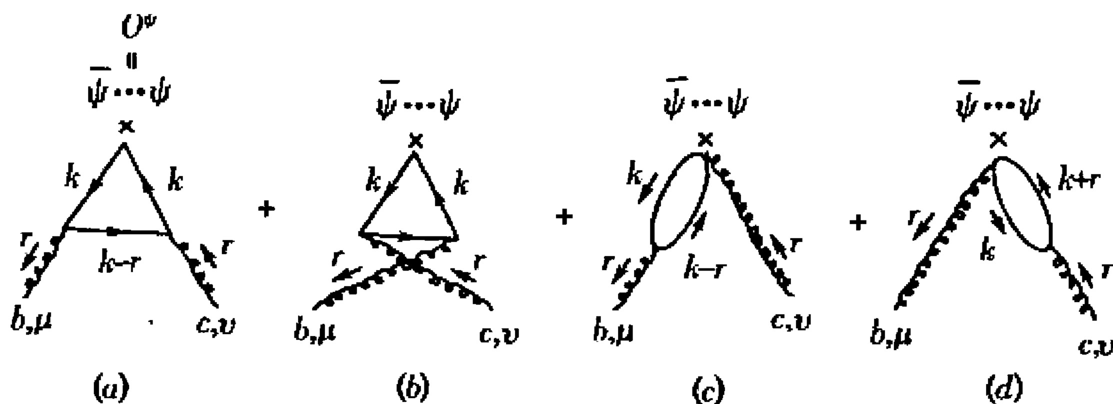
$$\cdot\delta_{bc}(2\pi)^4\delta^4(r-r')$$

$$= (-2i)[\delta_{\mu\nu}(r\cdot x)^N - r_\nu x_\mu(r\cdot x)^{N-1} - r_\mu x_\nu(r\cdot x)^{N-1} + r^2x_\mu x_\nu(r\cdot x)^{N-2}]$$

$$\cdot\delta_{bc}(2\pi)^4\delta^4(r-r') \qquad (A3.99)$$



$C_{\psi A}$的一圈图项：



$$(a)=(-)\,g^2\int \mathrm{d}^4k\cdot \mathrm{Tr}\left((i\cdot i\gamma_\mu)\frac{-\hat{k}'}{k^2}\cdot\hat{x}\cdot\frac{-\hat{k}'}{k^2}(i\cdot i\gamma_\nu)\frac{-(\hat{k}'-\hat{r})}{(k-r)^2}\right)$$

$$\cdot(T^b_{\alpha\beta}T^c_{\beta\alpha})(x\cdot k)^{N-1}\delta^4(r-r')$$

$$=g^2\int \mathrm{d}^4k\cdot\frac{\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\hat{k}\hat{x}\hat{k}\gamma_\nu(\hat{k}'-\hat{r}))}{k^2\cdot k^2\cdot(k-r)^2}T(R)\delta_{bc}(x\cdot k)^{N-1}\delta^4(r-r')$$

$$(b)=(-)g^2\int \mathrm{d}^4k\cdot \mathrm{Tr}(i\cdot i\gamma_\nu)\frac{-\hat{k}'}{k^2}\cdot\hat{x}\cdot\frac{-\hat{k}'}{k^2}(i\cdot i\gamma_\mu)\frac{-(\hat{k}'+\hat{r})}{(k+r)^2}$$

$$\cdot(T^c_{\alpha\beta}T^b_{\beta\alpha})(x\cdot k)^{N-1}\delta^4(r-r')$$

$$=g^2\int \mathrm{d}^4k\cdot\frac{\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\hat{k}\hat{x}\hat{k}\gamma_\mu(\hat{k}'-\hat{r}))}{k^2\cdot k^2\cdot(k+r)^2}T(R)\delta_{bc}(x\cdot k)^{n-1}\delta^4(r-r')(k\to -k)$$

$$=g^2\int \mathrm{d}^4k\cdot\frac{\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\hat{k}\hat{x}\hat{k}\gamma_\mu(\hat{k}'-\hat{r}))}{k^2\cdot k^2\cdot(k-r)^2}\cdot T(R)\delta_{bc}(x\cdot k)^{N-1}(-1)^N\delta^4(r-r')$$

$(a)+(b)$

$$=g^2\int \mathrm{d}^4k\frac{1}{k^2\cdot k^2\cdot(k-r)^2}\{2(x\cdot k)[\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\hat{k}\gamma_\nu(\hat{k}-\hat{r}))+\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\hat{k}\gamma_\mu(\hat{k}-\hat{r}))(-1)^N]$$

$$-k^2[\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\hat{x}\gamma_\nu(\hat{k}-\hat{r}))+\mathrm{Tr}(\gamma_\nu\hat{x}\gamma_\mu(\hat{k}-\hat{r}(-1)^N))]\}$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}(x\cdot k)^{N-1}\delta^4(r-r')$$

$$=4g^2\int_0^1\mathrm{d}y\cdot 2y\int \mathrm{d}^4k\frac{1}{(k^2-2(r\cdot k)(1-y)+r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot\{2(x\cdot k)[(k_\mu(k_\nu-r_\nu)+k_\nu(k_\mu-r_\mu)-\delta_{\mu\nu}k\cdot(k-r))$$

$$+(k_\mu(k_\nu-r_\nu)+k_\nu(k_\mu-r_\mu)-\delta_{\mu\nu}k\cdot(k-r))(-1)^N]\}$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}(x\cdot k)^{N-1}\delta^4(r-r')$$

$$-4g^2\int_0^1 dy\int d^4k \frac{1}{(k^2-2(r\cdot k)(1-y)+r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot\{(x_\mu(k_\nu-r_\nu)+x_\nu(k_\mu-r_\mu)-\delta_{\mu\nu}x\cdot(k-r))+(x_\nu(k_\mu-r_\mu)+x_\mu(k_\nu-r_\nu)$$

$$-\delta_{\mu\nu}x\cdot(k-r))(-1)^N\}\cdot T(R)\delta_{bc}(x\cdot k)^{N-1}\delta^4(r-r')$$

N=偶，就是两倍；N=奇，就是零。

（取 N=偶）

$$=32g^2\int_0^1 dy\cdot y\int d^4k \frac{k_\mu(k_\nu-\gamma_\nu)+k_\nu(k_\mu-r_\mu)-\delta_{\mu\nu}k\cdot(k-r)}{(k^2-2r\cdot k(1-y)+r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}(x\cdot k)^N\delta^4(r-r')$$

$$-8g^2\int_0^1 dy\int d^4k \frac{x_\mu(k_\nu-\gamma_\nu)+x_\nu(k_\mu-r_\mu)-\delta_{\mu\nu}k\cdot(k-r)}{(k^2-2r\cdot k(1-y)+r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}(x\cdot k)^{N-1}\delta^4(r-r')$$

（也作 $k=k'+r\ (1-y)$ 的变换）

$$=32g^2\int_0^1 dy\cdot y\int d^4k' \frac{1}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot[(k'_\mu+r_\mu(1-y))(k'_\nu+r_\nu y)+(k'_\nu+r_\nu(1-y))(k'_\mu-r_\mu y)-\delta_{\mu\nu}(k'+r(1-y))$$

$$\cdot(k'-ry)]\cdot T(R)\delta_{bc}[(x\cdot k')+(x\cdot r)(1-y)]^N\delta^4(r-r')$$

$$-8g^2\int_0^1 dy\int d^4k' \frac{1}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot[x_\mu(k'_\nu-r_\nu y)+x_\nu(k'_\mu-r_\mu y)-\delta_{\mu\nu}x\cdot(k'-ry)]$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}[(x\cdot k')+(x\cdot r)(1-y)]^{N-1}\delta^4(r-r')$$

先看第一个积分：

$$[(x\cdot k')+(x\cdot r)(1-y)]^N=(x\cdot r)^N(1-y)^N$$

$$+N(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}(x\cdot k')$$

$$+\frac{N(N-1)}{2!}(x\cdot k')^2(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2}+\cdots$$

对发散有贡献的项是 k 二次项。k 三次项积分为0。k 四次项有 $(x\cdot k')^2$ 参与，会出现 $x_\mu x_\nu$，（也有的 k 四次项出现 $x^2\to0$），不可略去。但是 $(x\cdot k')^4$ 项积分后一定出现 $x^2\to0$。所以展开中可以略去 $(x\cdot k')^3$，$(x\cdot k')^4$ 等。把第一个积分再重新写一下：

$$32g^2\int_0^1 dy\cdot y\int d^4k \frac{1}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot[2k'_\mu k'_\nu-2r_\mu r_\nu(1-y)y+k'_\mu r_\nu(1-2y)+k'_\nu r_\mu(1-2y)$$

$$-\delta_{\mu\nu}(k'^2+(k'\cdot r)(1-2y)-r^2(1-y)y)]$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}[(x\cdot r)^N(1-y)^N+N(x\cdot k')(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}$$

$$+\frac{N(N-1)}{2!}(x\cdot k')^2(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2}+\cdots]\delta^4(r-r')$$

它的发散部分是：

$$\Rightarrow\{32g^2\int_0^1 dy\cdot y\int d^4k' \frac{2k'_\mu k'_\nu-\delta_{\mu\nu}k'^2}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot[(x\cdot r)^N(1-y)^N+\frac{N(N-1)}{2!}(x\cdot k)^2(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2}]$$

$$+32g^2\int_0^1 dy\cdot y\int d^4k'\frac{[k'_\mu r_\nu+k'_\nu r_\mu-\delta_{\mu\nu}(k'\cdot r)](1-2y)}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot[N(x\cdot k')(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}\}\cdot T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r') \qquad \text{(A3.100)}$$

再看第二个积分：

$$[(x\cdot k')+(x\cdot r)(1-y)]^{N-1}=(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}+(N-1)(x\cdot k')$$
$$(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2}+\cdots$$

只需保留到 $(x\cdot k')$ 一次。$(x\cdot k')^2$，$(x\cdot k')^3$ 都没有贡献（因为不是出现奇函数，就是出现 $x^2\to 0$）。这个积分的发散部分是：

$$\Rightarrow 8g^2\int_0^1 dy\int d^4k'\frac{x_\mu r_\nu+x_\nu r_\mu-\delta_{\mu\nu}(x\cdot r)}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot y(1-y)^{N-1}(x\cdot r)^{N-1}T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r')$$

$$-8g^2\int_0^1 dy\int d^4k'\frac{x_\mu k'_\nu+x_\nu k'_\mu-\delta_{\mu\nu}(x\cdot k')}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot(N-1)(x\cdot k')(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2}\cdot T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r') \qquad \text{(A3.101)}$$

现在要把（A3.100）和（A3.101）作维数正常化的积分。用第六章的延拓办法，可得

$$\int d^nk'\frac{k'_\mu k'_\nu}{(k'^2-l)^2}=\frac{4}{n-2}\int d^nk'\frac{k'_\mu k'_\nu\cdot l}{(k'^2-l)^3}$$

$$\int d^nk'\frac{k'_\mu k'_\nu k'_\sigma k'_\rho}{(k'^2-l)^3}=\frac{6}{n-2}\int d^nk'\frac{k'_\mu k'_\nu k'_\sigma k'_\rho\cdot l}{(k'^2-l)^4} \qquad (n\to 4)$$

$$\therefore \qquad \int d^nk'\frac{k'_\mu k'_\nu}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}$$

$$=2\int d^nk'\frac{k'_\mu k'_\nu(r^2(1-y)^2-r^2(1-y))}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^3}\Rightarrow$$

发散部分（自第六章公式）：

$$\Rightarrow(r^2(1-y)^2-r^2(1-y))\cdot\frac{i\pi^2\delta_{\mu\nu}}{4-n} \qquad \text{(A3.102)}$$

$$\int d^nk'\frac{k'_\mu k'_\nu k'_\sigma k'_\rho}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^3}$$

$$=3\int d^nk'\frac{k'_\mu k'_\nu k'_\sigma k'_\rho(r^2(1-y)^2-r^2(1-y))}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^4}\Rightarrow$$

发散部分（自第六章公式）：

$$\Rightarrow\frac{1}{4}(r^2(1-y)^2-r^2(1-y))\cdot\frac{i\pi^2}{4-n}\cdot(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\rho}+\delta_{\nu\lambda}\delta_{\mu\rho}+\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\rho}) \qquad \text{(A3.103)}$$

于是（A3.100）的发散部分为：

$$\text{(A3.100)}\xrightarrow{\text{发散部分}}\Big\{32g^2\frac{1}{(N+1)(N+2)}\frac{i\pi^2}{\Gamma(3)}\Big(\delta_{\mu\nu}\Gamma\Big(2-\frac{n}{2}\Big)$$

$$- \delta_{\mu\nu}\frac{n}{2}\Gamma\left(2 - \frac{N}{2}\right)(x\cdot r)^{N}\Big)$$

$$+ 32g^2\int_0^1 dy\cdot y\cdot 3\int d^4k'\,\frac{(2k'_\mu k'_\nu - \delta_{\mu\nu}k'^2)(r^2(1-y)^N - r^2(1-y)^{N-1})}{(k'^2 - r^2(1-y)^2 + r^2(1-y))^4}$$

$$\cdot\frac{N(N-1)}{2}(x\cdot k')^2(x\cdot r)^{N-2} + 32g^2\frac{N(N-2)}{N(N+1)(N+2)}\frac{i\pi^2}{\Gamma(3)}$$

$$\cdot\left(\frac{x_\mu x_\nu}{2} + \frac{x_\nu x_\mu}{2} - \delta_{\mu\nu}\frac{(x\cdot r)}{2}\right)(x\cdot r)^{N-1}\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)\Big\}\Big]$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}\delta^4(r - r')$$

$$\Rightarrow\Big\{32g^2\frac{1}{(N+1)(N+2)}\cdot i\pi^2\cdot\left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{4-n} - 2\frac{\delta_{\mu\nu}}{4-n}\right)(x\cdot r)^N$$

$$+ 32g^2\frac{-2r^2}{N(N+1)(N+2)}\cdot\frac{3N(N-1)}{2}\cdot\frac{i\pi^2}{2\Gamma(4)}$$

$$\cdot\frac{1}{2}(4x_\mu x_\nu)(x\cdot r)^{N-2}\cdot\frac{1}{2-\frac{n}{2}} + 32g^2\frac{N(N-2)}{N(N+1)(N+2)}\cdot i\pi^2$$

$$\cdot\left(\frac{x_\mu x_\nu}{2} + \frac{x_\nu x_\mu}{2} - \delta_{\mu\nu}\frac{x\cdot r}{2}\right)(x\cdot r)^{N-1}\frac{1}{4-n}\Big\}\cdot T(R)\delta_{bc}\delta^4(r - r')$$

$$= \Big\{-32g^2\frac{1}{(N+1)(N+2)}\cdot i\pi^2\cdot\delta_{\mu\nu}(x\cdot r)^N\frac{1}{4-n}$$

$$-32g^2\frac{N(N-1)}{N(N+1)(N+2)}\cdot i\pi^2\cdot x_\mu x_\nu r^2(x\cdot r)^{N-2}\cdot\frac{1}{4-n}$$

$$+16g^2\frac{N(N-2)}{N(N+1)(N+2)}\cdot i\pi^2\cdot(x_\mu r_\nu + x_\nu r_\mu - \delta_{\mu\nu}(x\cdot r))(x\cdot r)^{N-1}\frac{1}{4-n}\Big\}$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}\delta^4(r - r') \qquad \text{(A3.104)}$$

而（A3.104）的发散部分为

$$\text{(A3.101)}\xrightarrow{\text{发散部分}}8g^2\cdot\frac{1}{N(N+1)}(x_\mu r_\nu + x_\nu r_\mu - \delta_{\mu\nu}(x\cdot r))(x\cdot r)^{N-1}T(R)\delta_{ba}$$

$$\cdot\frac{i\pi^2}{\Gamma(2)}\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)\delta^4(r - r')$$

$$-8g^2\int_0^1 dy\int d^nk'\,\frac{x_\mu k'_\nu + x_\nu k'_\mu - \delta_{\mu\nu}(x\cdot k')}{(k'^2 - r^2(1-y)^2 + r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot 2(r^2(1-y)^N - r^2(1-y)^{N-1})\cdot(N-1)(x\cdot k')(x\cdot r)^{N-2}$$

$$\cdot T(R)\delta_{bc}\cdot\delta^4(r - r')$$

$$= 16g^2\frac{1}{N(N+1)}(x_\mu r_\nu + x_\nu r_\mu - \delta_{\mu\nu}(x\cdot r))(x\cdot r)^{N-1}T(R)\delta_{bc}i\pi^2\frac{1}{4-n}\delta^4(r - r')$$

$$+16g^2\frac{N-1}{(N+1)N}r^2(x\cdot r)^{N-2}\frac{i\pi^2}{\Gamma(3)}\left[\frac{x_\mu x_\nu}{2} + \frac{x_\nu x_\mu}{2}\right]$$

$$\cdot\left(2 - \frac{n}{2}\right)T(R)\delta_{bc}\delta^4(r - r')$$

$$= 16g^2\Big(\frac{1}{N(N+1)}(x_\mu r_\nu + x_\nu r_\mu - \delta_{\mu\nu}(x\cdot r))(x\cdot r)^{N-1}$$

$$+\frac{N-1}{N(N+1)}r^2(x\cdot r)^{N-2}x_\mu x_\upsilon\Big)\cdot\frac{i\pi^2}{4-n}T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r') \tag{A3.105}$$

（A3.104）+（A3.105）给出（a）+（b）的发散部分：

$$(a)+(b)\text{ 的发散部分}\Rightarrow g^2\Big\{\frac{16}{N(N+1)}(x_\mu r_\upsilon+x_\upsilon r_\mu-\delta_{\mu\upsilon}(x\cdot r))(x\cdot r)^{N-1}$$

$$+16\frac{(N-1)}{N(N+1)}r^2(x\cdot r)^{N-2}x_\mu x_\upsilon-32\frac{1}{(N+1)(N+2)}\cdot\delta_{\mu\upsilon}(x\cdot r)^N$$

$$-32\frac{N(N-1)}{N(N+1)(N+2)}\cdot x_\mu x_\upsilon\cdot r^2\cdot(x\cdot r)^{N-2}$$

$$+16\frac{N(N-2)}{N(N+1)(N+2)}\cdot(x_\mu r_\upsilon+x_\upsilon r_\mu-\delta_{\mu\upsilon}(x\cdot r))(x\cdot r)^{N-1}\Big\}$$

$$\cdot\frac{i\pi^2}{4-n}T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r') \tag{A3.106}$$

$$(c)+(d)=\underset{\text{费米圈}\uparrow}{(-1)}g^2\int d^4k(i\cdot iT^b_{\alpha\beta}[(-i)(-i)T^c_{\beta\alpha}x_\upsilon]\mathrm{Tr}\frac{\gamma_\mu(-)\hat{k}\hat{x}(-)(\hat{k}-\hat{r})}{k^2(k+r)^2}$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot k)^j(x\cdot(k-r))^{n-2-j}\delta^4(r-r')$$

$$+(-1)g^2\int d^4k(i\cdot iT^c_{\alpha\beta})[(-i)(-i)T^b_{\beta\alpha}x_\mu]\mathrm{Tr}\frac{(-)\hat{k}\gamma_\upsilon(-)(\hat{k}-\hat{r})\hat{x}}{k^2(k+r)^2}$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot k)^j(x\cdot(k+r))^{N-2-j}\delta^4(r-r')$$

$$=-g^2\int d^4k\cdot 4\cdot\frac{k_\mu x\cdot(k-r)+(k\cdot x)(k_\mu-r_\mu)-x_\mu k\cdot(k-r)}{k^2(k-r)^2}\cdot x_\upsilon$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot k)^j(x\cdot(k-r))^{N-2-j}T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r')$$

$$-g^2\int d^4k\cdot 4\cdot\frac{k_\mu x\cdot(k+r)+(k\cdot x)(k_\upsilon+r_\upsilon)-x_\upsilon k\cdot(k+r)}{k^2(k+r)^2}x_\upsilon$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot k)^j(x\cdot(k+r))^{N-2-j}T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r')$$

（作 $k=k'+r(1-y)$ 变换）：

$$=-4g^2\int_0^1 dyd^4k'\frac{1}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot[(k'_\mu+r_\mu(1-y))x\cdot(k'-ry)x_\upsilon+(x\cdot k'+x\cdot r(1-y))(k'_\mu-r_\mu y)x_\upsilon$$

$$\cdot-(k'+r(1-y))\cdot(k'-ry)x_\mu x_\upsilon]\cdot\sum_{j=0}^{N-2}[x\cdot(k'+r(1-y))]^j$$

$$\cdot[x\cdot(k'-ry)]^{N-2-j}\cdot\delta_{bc}T(R)\delta^4(r-r')$$

（第二个积分 $k=k'+r(1-y)$ 变换后再作 $k'\to-k'$变换）

$$-4g^2\int_0^1 dyd^4k'\frac{1}{(k'^2-r^2(1-y)^2+r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot[(k'_\upsilon+r_\upsilon(1-y))x\cdot(k'-ry)x_\mu+(x\cdot k'+x\cdot r(1-y))(k'_\upsilon-r_\upsilon y)x_\mu$$

$$- (k' + r(1-y)) \cdot (k' - ry) x_\mu x_\nu] \cdot \sum_{j=0}^{N-2} (-1)^N [x \cdot (k' + r(1-y))]^j$$

$$\cdot [x \cdot (k' - ry)]^{N-2-j} \cdot \delta_{bc} T(R) \delta^4 (r - r')$$

$$= -4g^2 \int_0^1 \mathrm{d}y \mathrm{d}^4 k' \frac{1}{(k'^2 - r^2(1-y)^2 + r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot [2k'_\mu x_\nu (x \cdot k') - k'^2 x_\mu x_\nu + k'_\mu x_\nu (x \cdot r)(1-2y)$$

$$+ (x \cdot k') r_\mu x_\nu (1-2y) - (k' \cdot r) x_\mu x_\nu (1-2y)$$

$$- 2r_\mu x_\nu (x \cdot r)(1-y)y + r^2 y(1-2y) x_\mu x_\nu]$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{N-2} [(x \cdot r)^j (1-y)^j + j(x \cdot r)^{j-1} (1-y)^{j-1} (x \cdot k')]$$

$$\cdot (-1)^{N-2-i} [(x \cdot r)^{N-2-j} y^{N-2-j} - (N-2-j)(x \cdot r)^{N-3-j} y^{N-3-j} (x \cdot k')]$$

$$\cdot \delta_{bc} T(R) \delta^4 (r - r')$$

$$- 4g^2 \int_0^1 \mathrm{d}y \mathrm{d}^4 k' \frac{1}{(k'^2 - r^2(1-y)^2 + r^2(1-y))^2} \cdot (-1)^N$$

$$\cdot [2k'_\nu x_\mu (x \cdot k') - k'^2 x_\mu x_\nu + k'_\nu x_\mu (x \cdot r)(1-2y)$$

$$+ (x \cdot k') r_\nu x_\mu (1-2y) - (k' \cdot r) x_\mu x_\nu (1-2y)$$

$$- 2r_\mu x_\nu (x \cdot r)(1-y)y + r^2 y(1-y) x_\mu x_\nu]$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{N-2} [(x \cdot r)^j (1-y)^j + j(x \cdot r)^{j-1} (1-y)^{j-1} (x \cdot k')]$$

$$\cdot (-1)^{N-2-i} [(x \cdot r)^{N-2-j} y^{N-2-j} - (N-2-j)(x \cdot r)^{N-3-j} y^{N-3-j} (x \cdot k')]$$

$$\cdot \delta_{bc} T(R) \delta^4 (r - r')$$

（我们将只讨论 N = 偶的情况）维数正常化积分：

$$\xrightarrow{N = \text{偶}} -4g^2 \int_0^1 \mathrm{d}y \cdot 2 \int \mathrm{d}^n k \frac{r^2(1-y)^2 - r^2(1-y)}{(k'^2 - r^2(1-y)^2 + r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot \{[(2k'_\mu x_\nu (x \cdot k') - k'^2 x_\mu x_\nu) + (2k'_\nu x_\mu (x \cdot k') - k'^2 x_\mu x_\nu)]$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{N-2} (-1)^j (x \cdot r)^{N-2} (1-y)^i y^{N-2-j} + [k'_\mu x_\nu (x \cdot r)(1-2y)$$

$$+ (x \cdot k') r_\mu x_\nu (1-2y) + k'_\nu x_\mu (x \cdot r)(1-2y)$$

$$+ (x \cdot k') r_\nu x_\mu (1-2y) - 2(k' \cdot r) x_\mu x_\nu (1-2y)]$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{N-2} (-1)^j [-(N-2-j)(x \cdot r)^{N-3} y^{N-3-j} (1-y)^j (x \cdot k')$$

$$+ j(x \cdot r)^{N-3} y^{N-2-j} (1-y)^{j-1} (x \cdot k')]\} \cdot T(R) \delta_{bc} \delta^4 (r - r')$$

$$- 4g^2 \int_0^1 \mathrm{d}y \cdot \int \mathrm{d}^n k \frac{1}{(k'^2 - r^2(1-y)^2 + r^2(1-y))^2}$$

$$\cdot \{[-2r_\mu x_\nu (x \cdot r)(1-y)y - 2r_\nu x_\mu (x \cdot r)(1-y)y + 2r^2 y(1-y) x_\mu x_\nu]$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{N-2} (x \cdot r)^{N-2} (1-y)^j y^{N-2-j} (-1)^j\} \cdot T(R) \delta_{bc} \delta^4 (r - r')$$

$$\Rightarrow -4g^2 \int_0^1 \mathrm{d}y \cdot 2(r^2(1-y)^2 - r^2(1-y)) \frac{i\pi^2}{\Gamma(3)} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)$$

$$\cdot\{[(x_\mu x_\nu - 2x_\mu x_\nu) + (x_\mu x_\nu - 2x_\mu x_\nu)]\sum_{j=0}^{N-2}(-1)^j(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^j y^{N-2-j}$$

$$+\left[\frac{x_\mu x_\nu}{2}(x\cdot r)(1-2y) + \frac{x_\mu x_\nu}{2}(x\cdot r)(1-2y) - x_\mu x_\nu(x\cdot r)(1-2y)\right]$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{N-2}(-1)^j[-(N-2-j)(x\cdot r)^{N-3}y^{N-3-j}(1-y)^j$$

$$+j(x\cdot r)^{N-3}y^{N-2-j}(1-y)^{j-1}]\}T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r')$$

$$-4g^2\int_0^1 dy[-2r_\mu x_\nu(x\cdot r)(1-y)y - 2r_\nu x_\mu(x\cdot r)(1-y)y$$

$$+2r^2(1-y)yx_\mu x_\nu]\frac{i\pi^2}{\Gamma(2)}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{N-2}(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^j y^{N-2-j}(-1)^j T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r')$$

$$=\Big\{-4g^2r^2(-4x_\mu x_\nu)(x\cdot r)^{N-2}\frac{i\pi^2}{4-n}\sum_{j=0}^{N-2}\int_0^1 dy(-1)^j$$

$$\cdot[(1-y)^{j+2}-(1-y)^{j+1}]y^{N-2-j}$$

$$-4g^2(-r_\mu x_\nu(x\cdot r) - r_\nu x_\mu(x\cdot r) + r^2\cdot x_\mu x_\nu)(x\cdot r)^{N-2}\cdot 4\cdot\frac{i\pi}{4-n}$$

$$\cdot\int_0^1 dy\sum_{j=0}^{N-2}(1-y)^{j+1}y^{N-1-j}(-1)^j\Big\}T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r')$$

(由于$(1-y)^{j+2}-(1-y)^{j+1}=-(1-y)^{j+1}y$)

$$=\Big\{-16g^2r^2x_\mu x_\nu(x\cdot r)^{N-2}\frac{i\pi^2}{4-n}\cdot\sum_{j=0}^{N-2}\int_0^1 dy(-1)^i(1-y)^{j+1}y^{N-1-j}$$

$$+16g^2(r_\mu x_\nu(x\cdot r)^{N-1} + r_\nu x_\mu(x\cdot r)^{N-1} - r^2x_\mu x_\nu(x\cdot r)^{N-2})$$

$$\cdot\frac{i\pi^2}{4-n}\sum_{j=0}^{N-2}\int_0^1 dy(-1)^j(1-y)^{j+1}y^{N-1-j}\Big\}\cdot T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r')$$

$$=16g^2\frac{i\pi^2}{4-n}(r_\mu x_\nu(x\cdot r)^{N-1} + r_\nu x_\mu(x\cdot r)^{N-1} - 2r^2x_\mu x_\nu(x\cdot r)^{N-2})$$

$$\cdot\sum_{j=0}^{N-2}\int_0^1 dy(-1)^j(1-y)^{j+1}y^{N-1-j}\cdot T(R)\delta_{bc}\delta^4(r-r')$$

N = 偶数时，有

$$\int_0^1 dy \sum_{j=0}^{N-2} (-1)^j (1-y)^{j+1} y^{N-1-j} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)n} = 2B(2,n+1)$$

证明：$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{b-1} dy = B(b,a)$

$$2B(2,n+1) = \int_0^1 (y(1-y)^n + y^n(1-y)) dy$$

然而$\int_0^1 (y(1-y)^n) dy = \int_0^1 y(1-y)^{n-1}(1-y) dy$

$$= \int_0^1 (y(1-y)^{n-1} - y^2(1-y)^{n-1}) dy = \int_0^1 (y(1-y)^{n-1} - y^2(1-y)^{n-2}$$

$$+ \cdots + y^{n-1}(1-y) - y^n(1-y)) dy$$

$\therefore \quad 2B(2,n+1) = \int_0^1 (y(1-y)^{n-1} - y^2(1-y)^{n-2} + \cdots + y^{n-1}(1-y)) dy$

$$= \int_0^1 dy \sum_{j=0}^{N-2} (-1)^j (1-y)^{j+1} y^{n-1-j}$$

$$\therefore \quad (c) + (d) \xrightarrow{\text{发散部分}} g^2 \frac{32N}{N(N+1)(N+2)} \cdot \frac{i\pi^2}{4-n} \cdot (r_\mu x_\upsilon (x \cdot r)^{N-1} + r_\upsilon x_\mu (x \cdot r)^{N-1} - 2r^2 x_\mu x_\upsilon (x \cdot r)^{N-2}) \cdot T(R) \delta_{bc} \delta^4(r - r') \tag{A3.107}$$

把（A3.106）和（A3.107）合起来：

[(a) + (b) + (c) + (d)] 的发散部分

$$\Rightarrow g^2 \left\{ \frac{-16(N+2) - 32N - 16N(N-2)}{N(N+1)(N+2)} \delta_{\mu\upsilon} (x \cdot r)^N + \frac{16(N+2) + 16N(N-2) + 32N}{N(N+1)(N+2)} (r_\mu x_\upsilon (x \cdot r)^{N-1} + r_\upsilon x_\mu (x \cdot r)^{N-1}) + \frac{16(N-1)(N+2) - 32N(N-1) - 64N}{N(N+1)(N+2)} x_\mu x_\upsilon r^2 (x \cdot r)^{N-2} \right\} \cdot \frac{i\pi^2}{4-n} T(R) \delta_{bc} \delta^4(r - r')$$

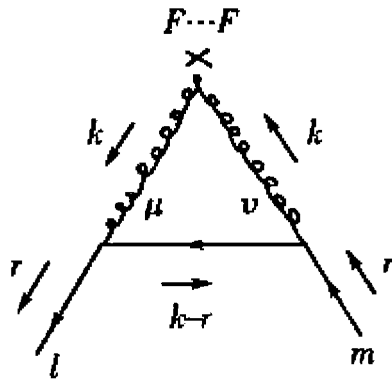
$$= -2i[\delta_{\mu\upsilon}(x \cdot r)^N - r_\mu x_\upsilon (x \cdot r)^{N-1} - r_\upsilon x_\mu (x \cdot r)^{N-1} + x_\mu x_\upsilon r^2 (x \cdot r)^{N-2}] \cdot \delta_{bc} (2\pi)^4 \delta^4(r - r') \cdot \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{T(R)}{4-n} \frac{8(N^2+N+2)}{N(N+1)(N+2)} \tag{A3.108}$$

与（A3.99）比较，得到

$$\gamma_{\psi A}^N = r_{\psi A}^N = -\frac{g^2}{16\pi^2} T(R) \frac{8(N^2+N+2)}{N(N+1)(N+2)} \tag{A3.109}$$

求 $\gamma_{A\psi}$：

计算 $G_{A\psi}$的一圈近似：



$$\int d^4k(-2i)(\delta_{\mu\nu}(x\cdot k)^N + k^2x_\mu x_\nu(x\cdot k)^{N-2} - k_\mu x_\nu(x\cdot k)^{N-1}$$

$$-k_\nu x_\mu(x\cdot k)^{N-1})\cdot i^4g^2\cdot T^a_{ln}T^a_{nm}\frac{-i}{k^2}\cdot\frac{-i}{k^2}\gamma_\mu\frac{(\hat{k}-\hat{r})}{(k-r)^2}\gamma_\nu\delta^4(r-r')$$

$$=-ig^2\int_0^1 2y\mathrm{d}y\int d^4k\delta_{lm}C(R)\cdot\frac{1}{(k^2-2(r\cdot k)(1-y)+r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot\delta^4(r-r')\cdot[4k^2\hat{x}(x\cdot r)(x\cdot k)^{N-2}+4\hat{k}(x\cdot k)^N$$

$$-4\hat{k}(x\cdot r)(x\cdot k)^{N-1}-4\hat{x}(k\cdot r)(x\cdot k)^{N-1}]$$

（也作 $k=k'+r\ (1-y)$ 变换，把 $(x\cdot k)^{N-2}$等展开，并取发散部分）

$$\Rightarrow -4ig^2\int 2y\mathrm{d}y\int d^4k'\delta_{lm}C(R)\frac{1}{(k'^2-r^2(1-y)+r^2(1-y))^3}$$

$$\cdot[k'^2\hat{x}(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-2}$$

$$+2(k'\cdot r)\hat{x}(N-2)(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2}(x\cdot k')$$

$$+N\hat{k}'(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}(x\cdot k')$$

$$-\hat{k}'(x\cdot r)^{N-1}(N-1)(1-y)^{N-2}(x\cdot k')$$

$$-\hat{x}(k'\cdot r)(N-1)(x\cdot r)^{N-2}(1-y)^{N-2}(x\cdot k')]\delta^4(r-r')$$

（作维数正常化积分，取发散部分）

$$\Rightarrow -4ig^2\int 2y\mathrm{d}y\cdot\delta_{lm}C(R)\cdot\frac{1}{\Gamma(3)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{i\pi^2}{2-\frac{n}{2}}$$

$$\cdot[4\hat{x}(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-2}+2(x\cdot r)^{N-1}\hat{x}(N-2)(1-y)^{N-2}$$

$$+N\hat{x}(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-1}-\hat{x}(x\cdot r)^{N-1}(N-1)(1-y)^{N-2}$$

$$-\hat{x}(N-1)(x\cdot r)^{N-1}(1-y)^{N-2}]\delta^4(r-r')$$

$$=4g^2\frac{\pi^2}{4-n}\delta_{lm}C(R)\cdot\hat{x}(x\cdot r)^{N-1}\cdot\delta^4(r-r')$$

$$\cdot\left[4\frac{1}{N(N-1)}+\frac{2(N-2)}{N(N-1)}+\frac{N}{N(N-1)}-\frac{(N-1)}{N(N-1)}-\frac{(N-1)}{N(N+1)}\right]$$

$$=4g^2\frac{\pi^2}{4-n}\delta_{lm}C(R)\cdot\hat{x}(x\cdot r)^{N-1}\cdot\frac{N^2+N+2}{(N-1)N(N+1)}\cdot\delta^4(r-r')$$

$$=\hat{x}(x\cdot r)^{N-1}(2\pi)^4\delta^4(r-r')\delta_{lm}\frac{1}{4-n}\cdot\frac{g^2}{16\pi^2}C(R)\cdot 4\cdot\frac{N^2+N+2}{N(N-1)(N+1)}\tag{A3.110}$$

与（A3.94）比较，得到：

$$\gamma_{A\psi}^{N} = r_{A\psi}^{N} = -\frac{g^2}{16\pi^2}C(R)4\frac{N^2+N+2}{N(N-1)(N+1)} \tag{A3.111}$$

另外还有一个 γ_{AA}：

$$\gamma_{AA}^{N} = \frac{g^2}{16\pi^2}\left[C_2(G)\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{N(N-1)}-\frac{8}{(N+1)(N+2)}+8\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}\right)+\frac{8}{3}T(R)\right] \tag{A3.112}$$

作为一个练习，请读者把 γ_{AA}^{N} 求出来。

参 考 文 献

1 D. J. Gross, F. Wilczek, Phys, Rev., D8 (1973) 3633.

2 H. Georgi, H. D. Politzer, Phys. Rev., D9 (1974) 416.

3 H. D. Politzer, Phys. Reports., C14 (1974) 129.

4 D. J. Gross, Methods in Fielb Theory, Edited by R. Baliam, Jean Zinn-Jnstin, 1976.

5 A. J. Buras, Rev. Mod. Phys., 52 (1980) 199.

6 杨炳麟，微扰量子色动力学及重正化群的应用，郑州大学讲义（1980）.

再版后记

这个后记，我们本来准备简介本书出版后粒子物理和场论的20多年来的进展。但考虑到现在已有很多专著和文献介绍和总结过，我们的水平又有限，故放弃了。为纪念汪容先生，我们留下这些空间给先生的朋友、家人和学生，记录下他们笔下、眼中和心里的汪容先生。

“……1945年2月，我奉王淦昌先生召回母校任助教。回到湄潭就联系上了潘寰、汪容、许梅、薛禹谷、谢学锦、顾以健、程嘉钧。3月，遵义学生自治会为响应由郭沫若起草的《重庆文化界对时局进言》，以浙大全体学生的名义发表《为促进民主宪政宣言》（简称《国是宣言》），要求‘停止一党专政，实行民主政治’；‘确切保障人民言论、出版、通讯等等自由’；等等。这个宣言在全国各大学中立即引起强烈反响。国民党当局慌了神，指使湄潭学生中的爪牙，炮制反宣言，……，气焰十分嚣张。面对如此严峻形势，我找了汪容，商议组织还击，……，最后否决了反动的反宣言，……。这次公开斗争的胜利，党团分子恼羞成怒，……，不让汪容毕业后留校。汪容是那一届物理系毕业生中功课最好的。……”

——许良英

“……他在永兴已开始谱曲。他虽与我不同住一个宿舍。但由于我喜欢汪容不凡的性格，他也因为我愿耐心听他的歌，故我和他交往密切。

他谱曲时选的题材非常随便。有时我们写的诗他亦拿来谱曲。我记得当时邓炳恩将姚雪垠的‘乌兰不浪夜祭’改成长诗。汪容花了不少时间为它谱曲。……由于谱的曲调很美，故我一直记得。

我除了喜欢他的性格和愿意听他唱他新谱的歌曲外，钦佩他是数学与物理的天才。他上课时并不很专心，下课后也不用复习，而是去阅读大本的理论物理德文原著。考试成绩一直很好，但他似乎并不在乎得最好。有时上了几天课之后，对我说，他再也忍不住他心中音乐旋律的荡漾了。于是就不上课，跑到湄江边竹林中去谱交响乐。等一两天曲子谱完了，才又去上课。”

——谢学锦

“于子三事件以后，杭州、上海两地的进步学生准备发起抗议。杭州学生代表去上海与上海各大学的学生代表讨论行动计划。汪容因病在上海家中修养，当时正在住院，这些讨论都是利用探视汪容作掩护，在汪容的病房里进行的。汪容在生病期间还掩护过上海的中共地下党员。解放后在青年出版社担任领导的朱吾今就曾在汪容家住过半个月，随身携带的发报机就藏在汪容的床底下。”

——姚竺绍

“1965 年他参加了强子结构的层子模型研究。这项工作是当时国家科研的重点项目，参加的有原子能所、数学所、北大、科大等单位共 39 人。汪容是其中坚力量。1966 年 8 月召开粒子物理理论国际会议北京物理讨论会，由周培源主持，参加的有日本、巴基斯坦等国的物理学家。汪容代表北京研究组报告层子模型理论的进展，引起了广泛注意。

1972 年，以张文裕为首的 18 位物理学家联名上书周恩来总理，建议重视高能物理研究，建造高能加速器，得到了批复。这封信就是由汪容起草的。1973 年，高能物理研究所成立（以原子能研究所一个部分为基础），派汪容带领一个小组到美国考察加速器的预制。”

——许良英

“我在浙大读了 9 年多书，从本科到博士。汪先生是我大学毕业论文的指导老师。后来是我的研究生导师。我跟汪先生整整做了 6 年，直到博士毕业。刚开始一段时间，汪先生一人住在杭州。我几乎天天去与他讨论。他从不厌倦，非常享受研究和解决问题的乐趣。但在生活上，他是一个惜时如金的人，从来不会因为省钱而浪费时间，他经常说：‘用钱买时间。’

汪先生当时60 多岁了，但他对国际上理论物理前沿的发展很敏感。1982 年以后，规范反常和引力反常的研究是国际上一大热点，汪先生请来侯伯元先生给我们讲微分几何，又请国内这方面的专家葛墨林先生和郭汉英先生介绍最新进展。1984 年以后，超弦理论迅速兴起。这时，我们这些学生也已进入工作状态。汪先生鼓励我们去做超弦。汪先生带我们到北京理论物理所多次参加由郭汉英、朱重远先生等组织的超弦工作。他的最后一篇研究论文是与胡红亮和我合作的关于弦场论的工作。”

——虞跃

“1991 年浙江近代物理中心成立，我考入汪先生的门下，成为汪先生的关门弟子，我的论文由他和师兄沈建民老师共同指导，由于中心刚刚成立，有很多事情需要汪先生处理，虽然在具体问题上我主要与沈建民老师讨论，但汪先生在学习、科研各方面均给予很多的关心，时常了解我的研究进展，并给予鼓励。毕业后我与汪先生一直保持着密切的关系，也许特别有缘，我们的生日是同一天，均是 3 月 14 日，每当生日到来时总会马上想到对方，互致生日快乐。汪先生也为与爱因斯坦有相同的生日而荣幸。

汪先生给我留下深刻印象的是：他看书非常仔细，都要做详细的推导。退休后他花费极大的精力撰写《数学物理中的微分几何与拓扑学》，由于他记忆力逐渐衰退，前面推导的内容，几天以后部分内容自己又忘了，需要重新推导，有些内容会重复多遍，这对汪先生产生了很大的压力，我们劝他早点了结书稿，否则会影响他的身体健康，但汪先生的信念是要么不做，要做就做好，尽其所能将书稿完成。汪先生原来计划与我的硕士生导师龚尧圭先生（是汪先生的同学）共同撰写一部有关群论和李代数方面的书，他们已经花了大量的时间做前期准备工作（龚先生已经写了多个章节的初稿），但考虑

到身体状况，担心不能保证书稿的质量，最后还是没有出版。”

——盛正卯

“我第一次见到慈眉善目的汪先生是1990年夏天由郭汉英先生引荐的。1991年新年前夕我来到浙江大学做博士后。汪先生是我的博士后指导教师。我来浙大之前的有关招收程序均是汪先生亲自跑行政楼一件件办理的。我那时的研究集中在与葛墨林先生指导我完成的博士论文相关的领域。当时汪先生虽然没有在这方面展开研究，但他却在各个方面对我非常关心，有一次他还亲自来到我的住处问寒问暖。尽管他因筹建浙江近代物理中心而非常忙，他对当时在那里的年轻人个个非常关爱。博士后出站我留在浙江近代物理中心工作也是汪先生推动的。据说当时有“编制限制”的阻力，汪先生说‘我今年不是退休吗，怎么会没编制。我不要求返聘，把编制让给年轻人。’

汪先生退休多年以后，我每次到他家都见他仍在孜孜不倦地工作。他在撰写《数学物理中的微分几何与拓扑学》的后期，记忆力明显下降，但每一步推导他从不马虎。有一次，姚老师告诉我，汪先生已花了好几天在推导一段公式。在钻研物理学的事业上，汪先生从来也未退休，汪先生最后还是战胜了记忆力下降的挑战，成功完成了书稿，”

——李有泉